대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 4, 663 ~ 678. Nov 2017

개념 형성 과정에 관여하는 표현의 기호학적 분석

최 병 철*

수학교육학 연구 중에서 기호학적 연구는 Saussure, Peirce, Frege의 기호학에 근거하고 있음을 알게 된다. 이들 선행연구는 기호학의 관점에서 개념을 다루어 왔지만 기호학의 요소들의 관계와 개념의 형성과 발전 과정은 여전히 많은 부분이 모호하고 베일에 싸여 있다. 본 논문은 기호학의 관점에서 기호학의 한 요소인 표현에 의해서 개념이 어떻게 형성되고 발전하는지를 보이고자 하였으며 이 과정에서 기호학의 세 요소인 표현, 개념, 대상의 관계를 부분적으로 조명하고자 하였다.

Ⅰ. 서론

수학교육 연구자와 이론가들은 '학생들이 수학적 개념을 어떻게 학습하는가?'에 대하여 오랜 동안 연구해 왔다. 이와 같은 연구 중에 주목할 만한 것은 기호학적 측면에서 학습을 분석한 Cobb(2002), Otte(2006), Presmeg (2006), Whiston (1997), Bakker(2004) 등의 연구이다. 이들 연구의 특징은 학습 주체가 개념을 획득하는 과정을 분석함에 있어서 기존의 연구와 달리 기호학적인 관점에서 접근하고 있다는 것이다. Saussure, Peirce 그리고 Frege 등의 기호학에 기초를 둔 이러한 연구는 개념과 기호의 관계에 주목하고 있는 것이다.

Saussure는 기호가 기의와 기표의 이중성을 가지고 있으며 이것은 마치 종이의 양면과 같아서 서로 분리될 수 없는 불가분의 관계라고 말하고 있다. 이 놀라운 아이디어는 Cobb(2002)와 Gravmeijer & Stephan(2002)의 연구로 이어졌다. 한편, Peirce의 기호학은 대상체, 표현체, 해석체의 삼원적 관계에 관한 이론이고(김선희와 이종희, 2002, 2003; 송상헌과 신은주, 2007; Presmeg, 2006; Whiston, 1997; Bakker & Hoffmann, 2005), 이와 유사하게 Frege의 기호학은 대상, 표현, 의미의 삼원적 관계를 다루는 이론이다. (Azarello, Bazzini & Chiappini, 2001, Duval, 2006).

Peirce의 기호학의 대표적인 연구자인 Bakker와 Hoffmann(2005)은 학생들의 개념 이해 과정을 교수 실험을 통하여 보여주었고, Azarello와 그 동료들(2001)은 Frege의 기호학에 근거하여 표현의 변화과정과 의미의 변화과정으로부터 개념의 이해과정을 다루고 있다.

기호학적 측면에서 표현과 의미, 대상 사이의 관계에 관한 이런 선행 연구는 개념의 형성과 발전을 연구하는데 있어서 매우 중요한 역할을 하였는데, 그들은 서로 분리될 수 없는 세 요소에 대하여 때로는 해석체의 관점에서 때로는 표현의 관점에서 개념의 발전을 설명하고자 하였다. 후자의 관점에서 대표적으로 Duval(2006)은

* 경동고등학교, cbc2005@naver.com

표현체계에서 표현의 변화를 중심으로 설명하고 있다. 한편, 전자의 관점에서 대표적으로 Bakker와 Hoffmann(2005)은 표현의 변화를 해석체의 관점에서 다루고 있다.

이들 연구는 표현과 개념이 서로 긴밀하게 상호작용하고 있음을 함의하고 있지만 개념과 표현의 관계에서 표현의 변화라는 가시적인 현상에 집중하면서 개념의 형성이라는 부분을 다루지 않거나 개념의 이해의 과정에 집중하면서 표현이 개념에 어떻게 작용하는지는 간과하고 있다. 또한 Peirce와 Frege의 기호학 이론을 바탕으로 하고 있지만 표현과 개념의 관계를 설명하면서 대상이 이들과 어떤 관계가 있는지는 연구과정에서 명확히 드러나 있지 않다. 표현과 개념이 서로 상호작용을 하며 개념이 형성되고 발전한다고 한다면 우리는 기호학의 세 요소가 어떤 관계를 가지면서 이러한 작용이 일어나는지를 설명해야 할 것이다.

본 논문은 이러한 관점에서 기호학의 세 요소의 관계로부터 어떤 한 표현에 의한 한 개념의 형성과 발전을 설명하고자 한다. 이를 위하여 다음과 같은 연구 주제를 중심으로 사례를 들어 논의할 것이다.

<C1> 한 표현은 한 개념을 조작적 개념에서 구조적 개념으로 발전하도록 돕는다.

<C2> 한 표현은 한 개념을 다른 개념으로 발전하도록 한다.

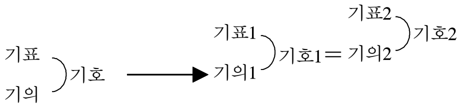
<C3> 한 표현은 새로운 개념을 형성하도록 한다.

II. 이론적 배경

기호학적인 측면에서 언어학자인 Saussure는 기호는 본질적으로 기의(signified)와 기표(signifier)의 이중성을 가지고 있으며 이를 분리해서는 존재할 수 없다고 설명하고 있다. 여기서 기의는 기호에 표현된 언어의 개념 또는 의미이며, 기표는 '기의'를 표명하는 청각인상이다(Saussure, 1986). Saussure는 언어학을 연구하는 가운데 이에 토대가 되는 기호학을 제안하였고 그 기호학의 이론에 근거하여 언어를 연구하였다. 그가 제시한 기호학은 풍부한 언어학적 관점에서 만들어졌기 때문에 여타 기호학적 관점, 특히 수학적 기호의 특성이 충분히 언급되지는 않았다. 그렇지만 그의 기호학은 수학적 기호에도 그대로 적용될 수 있다. 예를 들면, 우리가 기호 '+'를 Saussure의 기호학으로 보면 덧셈 개념의 기의와 더하기(또는 플러스)라는 기표로 이루어진 기호라는 것을 알 수 있다. 또, 기호 $\int_a^b f(x)\,dx$는 '+'기호와 달리 좀 복잡하기는 하지만 적분개념의 기의와 적분개념을 표명하는 기표 $\int_a^b f(x)\,dx$로 이루어져 있다. 여기서 기호 $\int_a^b f(x)\,dx$를 잘 들여다보면 여러 가지 기호로 이루어져 있다는 것을 알 수 있는데($\int$, $a,\ b,\ f(x),\ dx$), 분리된 각 기호들은 적분개념과 일치하지 않거나 다른 개념이 된다. 이것은 낱말에서 '나무' 또는 '학생'을 분리하면 본래의 개념과 일치하지 않거나 다른 의미가 되는 것과 마찬가지이다.

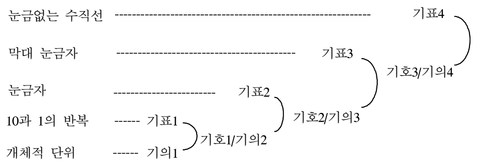
그는 기호학이라는 새로운 학문을 제시하였지만 언어학 연구의 토대로 제시였기 때문에 개념에 대하여 깊이 있게 들어가지 않았으며 특히 개념의 발전에 대해서는 다루지 않았다. 이에 대한 연구는 Cobb(2002), Gravemeijer와 Stephan (2002)의 논문에서 발견할 수 있다. 그들은 Saussure의 기호학 이론을 이용하여 개념의 발전이 '의미의 연쇄'에 의해서 일어난다고 주장하였다. 기의와

기표로 이루어진 기호가 새로운 기의 안으로 들어가서 그것이 새로운 기표를 만드는 연쇄적인 과정이 개념의 발달이라는 것이다. 즉, 기호는 새로운 기의에 포함이 되고 새로운 기의는 새로운 기표와 함께 새로운 기호를 형성하며 새로운 기호는 다시 새로운 기의에 의미를 주는 것이다.



[그림 II-1] 기호의 구성 (Gravemeijer & Stephan, 2002, p. 160)

Gravemeijer와 Stephan은 Saussure의 이론에 근거하여 의미의 연쇄를 통하여 개념의 발전을 설명한 것이다. 그들은 초등학교 3학년 학생들이 측정의 과정에서 어떻게 의미의 연쇄가 일어나는지 예를 들어 보여주었다. 학생들은 활동을 통하여 10개의 블록으로 이루어진 스머프 막대기를 다루고, 다음에는 10개의 눈금이 있는 자로 이동하여 100까지 눈금이 있는 자를 다루게 되고, 그 후 막대자, 그리고 눈금 없는 수직선을 사용한다는 것을 관찰하였다. 이 과정에서 그들은 다음과 같은 의미의 연쇄를 제시하였다([그림 II-2]).



[그림 II-2] 의미의 연쇄 (Gravemeijer & Stephan, 2002, p. 161)

Gravemeijer와 Stephan의 연구는 Saussure의 이론에서 보면 기호와 기호 사이에 연쇄과정을 분석한 것이라고 볼 수 있는데 그들의 연구는 개념의 발전을 기호학적 측면에서 접근했다는 점에서 의의가 있다.

그들의 분석을 통하여 다른 관점에서 생각해 볼 수 있는 것은 우리가 다음에 다룰 하나의 표현에 대한 기의, 즉 개념의 변화이다. 그런데 이것을 논하기 위해서는 기호를 구성하는 기표와 기의 외에 다른 요소가 고려되어야 한다. 그것은 대상이다. 한 표현에 대한 다른 두 개념을 생각할 때, 우리는 대상의 관점에서 다음 두 가지 경우를 고려해야 한다.

<O1> 한 표현이 한 대상을 지시하지만 다른 두 개 이상의 개념을 갖는 경우

<O2> 한 표현이 다른 대상을 지시하면서 각각에 대한 개념을 갖는 경우

<O2>의 경우는 '눈'(하늘에서 내리는 대상)과 '눈'(동물 신체의 일부분의 대상)을 예로 들 수 있는데, '눈'이라는 동일한 표현이 다른 대상을 지시하고 있으면서 각각의 대상에 대응하는 개념을 갖는다는 것이다. <O1>의 경우는 우리가 먹는 '물'을 예로 들 수 있는데, '물'이라는 한 표현에 대하여 어린아이가 갖는 개념과 화학을 전공하는 교수나 전문가가 갖는 개념이 다르다는 것이다. 이런 점에서 우리가 개념의 형성과 발전을 논하기 위해서는 Saussure의 기호학에서 기호의 관점뿐만 아니라 대상의 관점에서 바라보아야 한다.

바로 Peirce와 Frege의 기호학은 약간의 차이는 있지만 Saussure의 기호학에 대상이 추가된 이론이라 할 수 있다. 먼저 Peirce의 기호학은 기호, 대상, 해석체[1]의 삼원적 상호관계이다. 여기서 해석체는 기호를 해석하는 사람의 행동, 느낌, 혹은 사고에서의 반응이나 결과이다.

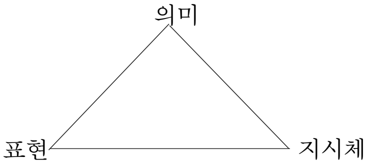
> 해석체는 표현에 대한 작용 혹은 활동, 감정 그리고 사고 혹은 다른 말로 하면 표현의 '의미'일 수 있다(Bakker, 2007. p. 15).

1) 기호, 대상, 해석체는 영어로 각각 sign, object, interpretant이다.

예를 들면, 비가 올 확률이 65%라는 일기예보를 듣고 어떤 사람이 우산을 준비한다고 하자. 이때 '비가 올 확률 65%'은 '기호'를 나타내고, '우산을 준비하는 것'은 '해석체'이며, 이것이 지시하는 '대상'은 '비'이다(Whitson, 1997). Saussure의 기호학 이론에서 보면 해석체도 기호로 볼 수 있으므로 Peirce의 기호학은 Saussure의 기호학에 대상의 관점이 추가된 것이라 할 수 있다.

Bakker(2007)는 Peirce의 기호학을 근거로 연구를 진행하였는데 그는 Peirce의 기호학에서 해석체의 관점에서 개념이 어떻게 발전하는지 다루고 있다. 그는 통계 실험을 통하여 그래프를 보고 학생들이 개념을 구성하는 과정에서 학생들은 적은 자료의 점그래프를 보고 처음에는 "함께 있다.", "떨어져 있다."라는 술어를 사용하다가 좀 더 많은 자료의 점 그래프에서 "퍼짐"이라는 명사형의 용어를 사용한다는 것을 발견하였다. 그는 표현의 변화(적은 자료의 그래프에서 많은 자료의 그래프)가 어떻게 의미의 변화를 만드는지 해석체의 관점에서 이를 보여 준 것이다.

한편 Frege의 기호학은 해석체를 의미로 대체하여 설명하고 있는데([그림 II-3]), Peirce의 기호학과 마찬가지로 지시체라는 대상을 포함하고 있다.



[그림 II-3] Frege의 기호학

Frege의 기호학은 Arzarello와 그 동료들의(2001)의 연구에 토대가 되고 있는데, 그들의 연구를 보면 대상의 관점을 발견할 수 있다. 그들은 다음과 같은 질문에 대한 아동의 프로토콜을 분석하였다.

p, q가 홀수인 소수일 때, $\frac{(p-1)(q^2-1)}{8}$가 짝수임을 보여라

Ann의 프로토콜

에피소드1. Ann은 다음 식을 쓰고 그 옆에 짝수, 홀수를 적는다.

$$\frac{(p-1)(q^2-1)}{8} = \frac{(p-1)(q+1)(q-1)}{8} \quad \text{.......... ㉠}$$

(…생략…)

에피소드5. Ann은 종이를 바꿔서 다음 식을 쓴다.

$$\frac{(p-1)(q^2-1)}{8} = \frac{(2h+1-1)((2k+1)^2-1)}{2}$$

$$= \frac{2h4k(k+1)}{8} \quad \text{.......... ㉡}$$

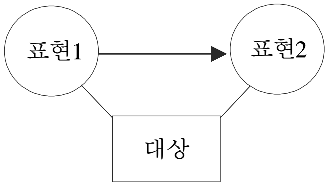
그리고 ≪…k가 짝수이면, 4 곱하기 k는 8의 배수(Ann은 식에서 8을 가리킨다), 그래서 2의 배수가 남는다(Ann은 식에서 8을 가리킨다). 그래서 맞다. k가 홀수이면, …(Ann은 8을 4로 나누어 8옆에 2를 쓴다; 그러고 나서 h의 계수 2로 2를 나눈다)k가 홀수 이면 해결할 수 없어…아니야! k가 홀수이면 k더하기 1(Ann은 식에서 k+1을 가리킨다.)은 짝수이구나. 해결했어!≫ (ibid, p. 65-67)

에피소드1, 5에서 Ann은 주어진 식이 짝수임을 보이기 위하여 식을 변형하고 있다. 즉, 식 ㉠, ㉡에서 주어진 식은 Ann에 의하여 구문론적인 표현의 변화를 관찰할 수 있다. 그러나 식 ㉠과 식 ㉡에서 표현의 변화에는 차이가 있다. 식 ㉠의 표현의 변화에서는 구문론적인 표현의 변화는 있지만 Ann은 기존에 가지고 있는 수학적 지식(홀수와 짝수의 개념과 관련된 지식의 틀[2])을 유지하고 있다. 그러나 식 ㉡의 표현의 변화

2) Arzarello와 그 동료(2001)는 이러한 지식의 틀을 개념적 틀이라고 하였다.

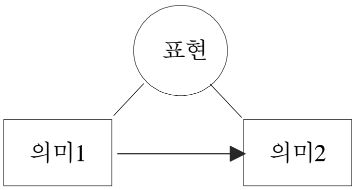
에는 단순히 표현의 변화에 머무는 것이 아닌 변화된 표현에 의하여 학습자의 지식의 틀의 변화를 관찰할 수 있다.

여기에서 Arzarello와 그 동료들은 우리가 앞에서 언급한 한 대상에 대한 표현의 변화라는 중요한 도식을 제시한다([그림 II-4]). 이 도식이 중요한 이유는 표현의 변화에서 보이는 각각의 표현들이 하나의 대상을 지시하고 있다는 것이고, 이것으로부터 한 대상에 대하여 학습자의 개념이 어떻게 발전하게 되는지를 설명할 수 있기 때문이다.



[그림 II-4] 표현의 변화(Azarello et. al., 2001)

식㉠, ㉡에서 Ann은 식의 모양을 변화시키는 형식적 조작을 하고 있는데, 이것은 동일한 대상에 대하여 하나의 표현을 다른 표현으로 변형시키는 조작이다. Arzarello는 다음으로 표현이 어떻게 의미의 변화에 관여하는지 설명하고 있는데 그것은 식 ㉡에서의 변화이다. 식 ㉠에서는 표현의 변화를 관찰할 수 있지만 대수적 구문의 변화이지 의미의 변화를 일으키지 않는다고 말한다. 왜냐하면 변화된 표현이 Ann에게 아무런 정보를 제공해 주지 않기 때문에 의미에 변화가 일어나지 않는다는 것이다. 그런데 식 ㉡에서는 변화된 표현에 의한 의미의 변화를 관찰할 수 있다. Ann은 ㉡의 마지막 식에서 k가 짝수이면 4k(k+1)이 8의 배수가 된다고 말하고 있다. p를 $2h+1$, q를 $2k+1$로 바꿈으로 인하여 변화된 식이 Ann에게 정보를 제공하고 있는 것이다. 잠시 후 Ann은 k가 홀수이면 해결할 수 없다고 곤란해 하지만 곧 k가 홀수일 때, 역시, k+1이 짝수가 된다는 것을 알아차리게 된다. 하나의 표현이 의미의 변화를 일으킨 것이다. Azarello는 이를 다음과 같이 도식화하고 있다.



[그림 II-5] 의미의 변화(Azarello, et. al, 2001)

Azarello와 그의 동료의 연구에서 주목할 두 가지 중요한 점은, 첫째 <O1>의 경우인데 한 대상을 지향하는 표현의 변화([그림 II-4])이고, 둘째 한 표현에 대한 의미의 변화([그림 II-5])이다. 전자는 앞에서 언급한 바와 같이 우리가 한 표현에 의한 개념의 발전을 논의하려고 하면 그 표현이 한 대상을 지시하고 있다는 것을 전제해야 한다는 것이다. 후자의 의미는 한 대상을 지시하는 표현의 무수한 식의 변형에서 어떤 특정한 표현이 의미의 변화를 수반한다는 것이다. Azarello와 그 동료들이 보여준 한 표현에 의한 의미의 변화는 이미 형성된 두 개념, 즉 짝수의 개념과 홀수의 개념의 연결[3]인데, 이 도식은 한 개념의 발전을 설명할 때도 그대로 적용될 수 있다. 여기서 개념의 발전은 두 가지 측면에서 바라볼 수 있다. 그것은 한 개념 안에서의 발전(C1)과 다른 개념으로의 발전(C2)이다.

C1은 Sfard(1991)가 말한 조작적 개념에서 구조적 개념으로 발전을 말한다[4]. 앞에서 논한 Bakker의 연구는 그가 이에 대하여 언급하고 있지는 않지만 어떤 적절한 표현에 의하여 조작적 개념이 구조적 개념으로 발전한 것을 보여준 것

3) Azarello와 그 동료들은(2001) 이것을 개념적 틀의 변환이라고 말하고 있다.
4) 조작적 개념과 구조적 개념에 관해서는 Sfard(1991)와 최병철(2016)의 논문에 자세히 기술되어 있다.

이라 할 수 있다. C2는 다른 두 개념에 대하여 한 개념에서 다른 개념으로의 발전을 말하는데 예를 들면 수 개념, 즉 자연수의 개념에서 정수의 개념으로의 발전 혹은 이산적인 양의 개념에서 연속적인 양의 개념과 같은 개념의 발전이다. 우리는 C1과 C2에 대하여 사례를 들어 자세히 논의할 것이다.

III. 연구방법

1. 연구대상

본 논문의 연구대상은 기호학의 세 요소인 표현, 개념, 대상이다. 여기서 표현은 Duval(2006)이 말한 기호학적 표현 체계인 언어, 대수식, 다이어그램, 그래프 등을 말한다. 개념은 의미의 일종으로 어떤 특정한 의미들의 집합체라 할 수 있다. 예를 들면 어떤 물체의 힘의 의미는 '질량', '가속도'라는 의미뿐만 아니라 주체가 갖는 모든 의식들, '강하다', '약하다', '세다' 등의 의식들 역시 의미이다. 이 의미 중에서 질량, 가속도, 그리고 그것들의 결합 등으로 이루어진 집합체를 힘의 개념이라 할 수 있는데 본 논문은 이와 같은 것을 개념이라 할 것이다. 한편 대상은 '나무', '돌', '물'과 같은 구체적인 존재는 물론 '하나', '둘', '사랑' 등과 같이 추상화된 존재를 말한다.

본 연구는 표현이 개념 형성에 관여하는 과정에서 기호학의 세 요소 사이의 관계 중에 표현과 개념 사이의 관계와 표현과 대상 사이의 관계를 다룰 것이다.[5] 표현을 통하여 개념이 형성된다는 것은 상식적으로 당연하게 여겨지지만 그럼에도 불구하고 개념 형성이 쉽지 않은 이유는 여러 가지가 있을 수 있는데 그 중에 주요한 한 가지는 표현과 개념 사이의 관계와 표현과 대상 사이의 관계가 그 자체로서 분명하게 드러나는 것이 아니라 모호하기 때문이다. 그들 사이의 관계를 명확히 드러내는 것은 쉽지 않지만 표현이 개념 형성에 작용하는 과정에서 그 관계를 부분적으로 보일 수 있다.

2. 연구방법 및 절차

표현이 개념 형성에 어떻게 작용하는지를 보이기 위하여 하나의 개념을 선정해야 하는데 본 논문은 그 전형으로 정수 개념을 들었다. 그 이유는 초등학교에서 자연수 개념을 형성한 학생들이 중학교 1학년 학생이 되어서 처음으로 정수 개념을 학습하기 때문이며 다른 개념에 비해서 정수 개념이 그 개념 형성 과정에 작용하는 표현의 역할을 보다 분명하게 드러낼 수 있다는 판단에서이다. 이를 위하여 S중학교 1학년 한개 반 학생을 대상으로 정수와 유리수 단원을 지도하였고, 그 수업 내용을 영상으로 촬영하여 그 내용을 스크립트하고 그 중에서 저자와 학생 두 명의 질의응답을 발췌하여 프로토콜을 만들었다.

그런데 개념 형성 과정에 작용하는 표현에 대하여 그 표현이 지향하는 대상은 보통 잘 드러나지 않거나 일반적으로 그 대상이 명확한 경우에는 자명한 것으로 보고 표현과 개념 사이의 관계만으로 개념의 형성을 설명하게 된다. 자연수 개념과 정수 개념과 같은 개념들이 후자의 경우인데 자연수 개념의 대상은 자연수이고, 정수 개념의 대상은 정수이다. 개념 형성 과정에서 표현이 한 대상을 지향하는 관계는 특히 상위의 고등 개념을 다룰 때 고려되어야 하는데 그런 상위의 고등 개념으로 본 논문은 질량중심 개념을 선정하였다. 질량중심 개념을 다루는 과정에서

5) 기호학의 세 요소 사이의 관계는 세 가지로 분류할 수 있다. 즉, 표현과 개념의 관계, 표현과 대상의 관계, 개념과 대상의 관계이다. 본 연구는 표현을 중심으로 앞의 두 가지 관계를 다룰 것이며 세 번째, 개념과 대상의 관계는 연구의 범위를 넘으므로 본 논문에서 직접적으로 다루지는 않을 것이다.

표현과 대상과의 관계를 파악할 수 있는데 이를 위해서 본 논문은 Thomas, Weir & Hass(2010, pp. 402~416)의 질량중심에 대한 정리를 분석하여 표현과 대상 사이의 관계를 다루었다.

또한 조작적 개념에서 구조적 개념으로 이르는 과정에서 표현이 어떤 역할을 하는지를 논의하기 위하여 H 과학 고등학교의 2학년 학생 70명을 대상으로 개념 형성에 대한 연구를 한 최병철(2016)의 면담분석에서 교사와 학생의 질의 응답을 발췌하였다.

그리고 기호학의 세 요소에 대하여 표현과 개념, 표현과 대상 사이의 관계를 조명하기 위하여 각 사례에서 다룰 내용을 코드화하였다. 그것은 Saussure, Gravemeijer와 Stephan, Arzarello와 그 동료들의 선행연구를 바탕으로 하였고 서론과 이론적 배경에서 언급한 바와 같으며, 그것을 정리하면 다음과 같다<표 III-1>.

<표 III-1> 개념에서 다룰 내용에 대한 코드

코드	내 용	관련 요소
O1	한 표현이 한 대상을 지시하지만 다른 두 개 이상의 개념을 갖는 경우	표현, 대상
O2	한 표현이 다른 대상을 지시하면서 각각에 대한 개념을 갖는 경우	표현, 대상
C1	한 표현은 한 개념을 조작적 개념에서 구조적 개념으로 발전하도록 돕는다.	표현, 개념
C2	한 표현은 한 개념을 다른 개념으로 발전하도록 한다.	표현, 개념
C3	한 표현은 새로운 개념을 형성하도록 한다.	표현, 개념

다음에 논의할 정수 개념의 사례에서는 자연수의 개념에서 정수의 개념을 형성하는 과정에서 표현이 어떤 역할을 하는가를 보이기 위한 것으로 여기에서는 C2에 대하여 두 학생의 프로토콜을 통하여 알아볼 것이다. 또한 질량중심 개념의 사례에서는 표현과 개념, 표현과 대상 사이의 관계를 보이기 위하여 O1, O2, C1, C2, C3에 대하여 분석할 것이다.

Ⅳ. 결과 및 논의

1. 정수 개념 형성에 관여하는 표현

개념에 대한 연구에 의하면 새로운 개념으로서 수학적 개념은 비자발적 개념이며 학습에 의하여 과학적 개념으로 발전하게 된다(Vygotsky, 1987). 그러면 비자발적 개념인 새로운 수 개념, 예컨대 정수 개념을 학습하기 위해서는 우리는 어디에서 출발해야 하는가? 그것은 이전 개념, 즉 기존의 수 개념의 구조 위에서 조작적 활동이 수반되어야 하며 조작의 활동을 통하여 만들어진 새로운 구조 위에 새로운 수 개념이 대상으로서 인식이 된다는 것에 주목해야 한다(Davis, & Maher, 1997). 이에 대한 구체적인 예는 Sfard (1991)의 연구에서 찾아볼 수 있다. Sfard는 자연수라는 대상을 아동이 개념형성하기 위해서는 과정으로서 '세기'라는 조작적 활동이 내면화되어 구상화되면 자연수라는 구조를 학생들이 형성하게 된다고 말하고 있다.

이와 같은 맥락에서 기호학에 근거하여 학생들이 정수 개념 형성 과정을 살펴보고자 한다. 정수 개념은 기존의 수 개념에서 어떻게 정수라는 새로운 대상의 개념을 구성하게 되는가? 교실상황에서 교사와 학생의 대화를 통하여 이를 살펴보자.

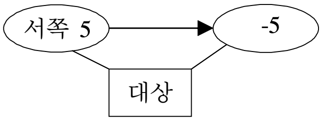
(1) Q: 현재 위치를 0으로 할 때 철수는 동쪽 또는 오른쪽 3km지점에 있고, 영희는 서쪽 또는 왼쪽 5km 지점에 있다. 이럴 때 동쪽 3km지점을 +3km라고 한다면 서쪽 5km지점은 어떻게 나타낼 수 있지?

(2) B1: -5요[6].

(3) Q: 약속시간이 4시야. 철수는 약속시간이 지나서 30분 후에 도착했고, 영희는 20분전에 도착했어. 이것도 역시 어떤 시간을 기준으로 철수는 30분 후에 영희는 20분 전에 도착했으니까, 30분 후를 +30분으로 나타낸다면 20분 전은 어떻게 나타낼 수 있을까?
(4) B1: -20이요.

학생 B1의 대답에서 우리는 그 학생이 이미 기존의 개념에서 양의 상대적인 관념을 가지고 있다는 것을 알 수 있다. 기존의 개념에서 학생 B1은 현재 위치를 기준으로 동쪽 3km를 +3km로 기호화할 수 있다는 것으로부터 그 상대적인 관념인 서쪽이라는 의미가 '서쪽 5km'라는 표현을 '-5km'라는 기호로 표현하게 된다. 마찬가지로 30분 후를 +30분으로 기호화한 것으로부터 '전'이라는 후의 상대적인 관념은 '20분 전'이라는 표현을 '-20'이라는 기호로 표현하고 있다.

우리는 학생 B1의 대답으로부터 하나의 구체적인 사례들이 기호로 표현되면서 추상화되고 있음을 발견할 수 있다. '서쪽 5km'는 '-5'로 '20분 전'은 '-20'으로 표현되고 있다. 이것을 도식화 하면 다음과 같다.



[그림 IV-1] 표현의 변화

그러나 학생 B1이 표현한 '-5', '-20'은 정수라는 새로운 개념의 대상이라기보다는 상대적인 관념으로서의 수에 머물러 있다고 보아야 한다. '-5'는 여전히 서쪽 5km의 관념에서 표현된 기호에 불과하며 '-20'은 20분 전이라는 관념에 대한 표현에 불과하다. 이것이 새로운 수라는 인식은 다음의 대화에서 볼 수 있다.

(5) Q: 철수가 서쪽으로 3km를 가다가 (방향을 바꿔서) 동쪽으로 2km를 갔다. 철수는 처음 위치를 기준으로 어디에 있을까?
(6) B2: 서쪽 1km요.
(7) Q: 서쪽은 왼쪽이지. 서쪽 3km갔다는 것을 기호로 어떻게 나타내지?
(8) B2: -3
(9) Q: 동쪽 2km는?
(10) B2: +2
(11) Q: '철수가 서쪽으로 3km를 가다가 (방향을 바꿔서) 동쪽으로 2km를 갔다'를 식으로 나타내면?
(12) B2: (-3)+(+2)입니다.
(13) Q: (-3)+(+2)는 얼마지?
(14) B2: -1
(15) Q: 철수가 서쪽으로 2km를 가다가 다시 서쪽으로 4km를 갔다. 철수의 위치는 처음 위치를 기준으로 어디에 있을까?
(16) B3: 서쪽 6km
(17) Q: 이것을 식으로 표시하면?
(18) B3: (-2)+(-4)입니다.
(19) Q: (-2)+(-4)는 얼마지?
(20) B3: -6

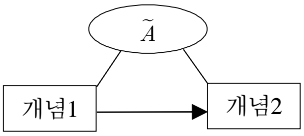
학생 B2의 대답에서 우리는 기존의 개념에서 덧셈이 어떻게 정수의 덧셈으로 작용하는지를 관찰할 수 있다. '철수가 서쪽으로 2km를 가다가 다시 서쪽으로 4km를 갔다.'에서 학생 B2는 상대적인 수의 관념을 가진 상태에서 그것을 기호로 표현한다.

$$(-2)+(-4).$$

그리고 기호로 표현된 이 식은 구체적인 사례인 상대적인 수의 맥락에서 그 값이 -6이라는 것과 동치라는 것을 알게 된다. 이때 기호 (-2)+(-4)는 (-2)+(-4)=-6이라는 관계를 갖게 된다. 이 관계는 이제 맥락이 제거된 순순한 기호적 관계가 된다. 즉, (-2)라는 수와 (-4)라는 수가 있어서 그 두 수의 합은 -6이라는 순수한 대수적 관계에 놓이게 되는 것이다.

6) 학생들은 이미 기호 '-'를 학습한 상태이다.

표현, $\widetilde{A}=(-2)+(-4)$는 이전 의미로서 맥락에 의한 수의 덧셈의 관계라는 개념에서 새로운 수 즉, 정수의 덧셈의 관계로의 개념의 이행에 관여 한다.



[그림 IV-2] 개념의 변화1

구체적인 경우에서 맥락에 의한 기호화된 표현은 이제 개별적인 특성은 사라지고 탈맥락화되어 순수하게 추상적인 기호의 표현으로 변하는데 [그림 IV-1], 이것은 유사한 맥락으로 ‘2시간 전’, ‘2시간 후’, 또는 ‘지하 2m’, ‘지상 2m’에 대해서도 ‘-2’, ‘+2’라는 표현을 사용하게 된다. 또한 한 개념 안에서 표현 A: ‘서쪽 2km를 가다가 다시 서쪽 4km를 갔다’는 표현 $\widetilde{A}$: ‘(-2)+(-4)’로 변환되고 변환된 표현 $\widetilde{A}$은 이전 개념(자연수)에서 다른 개념(정수)으로의 개념의 발전을 가능하게 한다[그림 IV-2].

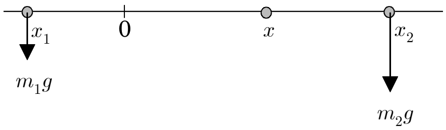
정수의 개념은 추상화의 위계에서 상위의 개념이고 일반성을 갖고 있으며, 추상화의 특징에 의해서 임의의 하위의 개념에 적용된다. 이것은 개념의 발전이며 표현에 의해서 개념이 발전한다는 것을 함의한다.

2. 질량중심 개념의 형성에 관여하는 표현

우리는 앞에서 기존 개념으로서 자연수의 개념이 표현의 변환을 통하여 정수의 개념으로 발전하는 것을 살펴보았다.

그런데 이러한 과정은 상위의 고등 개념을 다룰 때 더 복잡하고 다양하게 나타난다. 이에 본 절에서는 상위의 고등 개념의 한 예인 질량중심 개념을 사례로 표현이 개념에 어떤 역할을 하는지와 그 표현과 대상의 관계를 살펴볼 것이다.

수직선 위의 두 물체의 무게중심을 구한다고 생각해보자. 두 물체의 위치를 각각 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$라 하고, 질량을 m_1, m_2라고 하며, 무게중심을 x라고 하자.



[그림 IV-3] 지렛대 위의 두 물체

그러면 x를 중심으로 두 물체의 회전력이 같으므로 다음이 성립한다.

$$(x-x_1)m_1 g=(x_2-x)m_2 g$$

①

$$(x_1-x)m_1 g+(x_2-x)m_2 g=0$$

②

$$(x_1-x)m_1 +(x_2-x)m_2 =0$$

③

$$x=\frac{x_1 m_1+x_2 m_2}{m_1+m_2}$$

④

$$x=\frac{\sum x_k m_k}{\sum m_k}$$

ⓐ

①, ②, ③은 대수적 조작에 의한 표현의 변화이고 ④은 동일한 대수식의 다른 표현이다. ①은 동일한 의미에 대한 대수적 조작에 의한 표현의 변화이지만 변화된 표현은 이전 표현보다 규칙적이다. 각각의 위치 x_1, x_2에서 x를 빼고 있으며 순서를 동시에 바꾸어도 된다. 이 규칙 때문에 이 표현은 두 개의 물체에서 세 개 이상의 물체로 확장할 수 있는 기능이 있다. 즉 세 개의 물체에 대하여

$$(x_1-x)m_1 g+(x_2-x)m_2 g+(x_3-x)m_3 g=0$$

이고 이것은 그 이상의 물체에 대해서도 적용된다.

과정 ②는 단순히 중력가속도 g를 약분하여 다른 표현을 만들었지만 변화된 그 표현은 다른 두 개의 개념과 연결된다. 그것은 무게의 개념과

질량의 개념이다. 무게중심을 구하는 과정에서 중력가속도가 영향을 주지 않는다는 것으로부터 무게중심은 질량과 위치에 의존하는 질량중심과 같게 된다. 이러한 동일한 표현은 무게중심의 개념과 질량중심의 개념이 같다는 착각을 불러일으킬 수 있다. 그러나 두 개념은 동일하지 않다. 두 개념은 동일한 하나의 표현을 같이 사용하고 있지만 다른 대상을 지향하고 있다(O2). 하나는 무게이고 다른 하나는 질량이다. 지구 위에서 위치 x_1, x_2에 있는 물체의 중력가속도는 보통 같다고 놓기 때문에 두 개념에 대한 표현이 같은 것이지 두 개념이 같은 것은 아니다. 만약 두 위치의 물체의 중력가속도가 다르다면([그림 IV-3]) 무게 중심과 질량중심은 다를 것이다. 따라서 우리는 한 개념을 다룰 때 그 표현이 그 개념에 대하여 같은 대상을 지향하고 있는지 다른 대상을 지향하고 있는지를 구분해야 한다. 그렇지 않으면 다른 두 개념을 동일한 것으로 착각할 수 있으며 그로 인하여 한 대상에 대한 개념의 확장과 발전을 파악하는 것이 어렵게 된다.

표현과 대상의 이러한 관계, 즉 표현이 동일한 대상을 지향하는 관계가 명확할 때 표현에 의한 한 개념의 발전 과정을 설명할 수 있다. 이러한 측면에서 질량이라는 대상을 지향하는 표현에 대하여 적당한 표현이 질량중심 개념에서의 개념의 발전에 어떤 역할을 하는지 자세히 살펴볼 것이다.

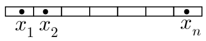
이전에 먼저 표현에 의해서 새로운 개념이 어떻게 형성되는지 살펴보자(C3).

과정 ③은 대수적 조작에 의한 표현의 변화이지만 변화된 표현은 중요한 정보를 제공하고 있다. 그것은 분자의 표현과 분모의 표현에서 드러난다. 분모의 표현은 질량의 합을 의미하고 분자의 표현은 위치와 질량의 곱의 합이다. 이때 위치와 질량의 곱의 합을 모멘트라는 용어를 사용하여 새 개념을 만든다. 대수적 조작에 의해 변화된 표현에 새 이름을 붙여서 새 개념을 구성한 것이다. 즉, 위치와 질량의 곱이라는 모멘트의 개념은 질량중심을 구하는 표현의 과정에서 생성된 개념이다. 이렇게 새로 구성된 모멘트 개념은 ①, ②, ③의 단계 없이 바로 질량중심을 구할 수 있다. 새 개념이 질량중심 개념의 단순화에 효율적으로 작용하는 것이다.

이제 질량중심 개념에 있어서 이산적인 개념을 연속적인 개념으로 변하게 하는 표현에 대하여 살펴보자(C2).

과정 ④는 동일한 대수식이며 동일한 의미를 갖고 있는 표현의 변화이지만 변화된 표현ⓐ는 여러 개의 물체에 대한 질량중심의 표현을 연속체의 질량중심을 구하는 표현으로 변하도록 하는데 기여한다. 이를 자세히 살펴보면 다음과 같다.

여기 균질한 얇은 막대가 있다.



밀도가 ρ이고 길이가 l인 얇은 막대를 일정하게 n개로 분할하여 각각의 위치를 $x_1, x_2, \cdots x_n$이라 하고, 분할된 각각의 막대의 질량을 $\triangle m_k$라 하자. 얇은 막대의 질량은 ρl이므로 $\triangle m_k = \frac{\rho l}{n}$는 임의의 k에 대하여 일정하다. 분할된 n개의 막대의 질량 중심을 s_n이라고 하면 s_n은 모멘트를 전체 질량으로 나누면 되므로 표현 ⓐ 에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

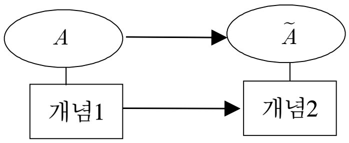
$$s_n = \frac{\sum x_k \triangle m_k}{\sum \triangle m_k}$$

얇은 막대를 무한히 분할하면, 즉 n을 ∞로 보내면 얇은 막대의 질량중심 s는 다음과 같다.

$$s = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum x_k \triangle m_k}{\sum \triangle m_k} = \frac{\int x\,dm}{\int dm}$$

정적분의 개념이 형성된 학생은 이산적인 물체의 질량의 표현 $A(\sum \triangle m_k)$를 연속적인 물체의 질량의 표현 $\widetilde{A}(\int dm)$으로 바꿀 수 있고, 이산적

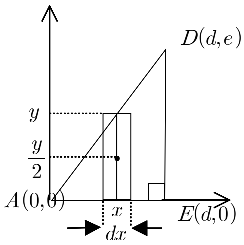
인 물체의 모멘트의 표현 $A(\sum x_k \triangle m_k)$ 를 연속적인 물체의 모멘트의 표현 $\tilde{A}(\int x\,dm)$로 바꿀 수 있다. 표현A가 표현 $\tilde{A}$로 변화됨으로 인하여 이산적인 개념이 연속적인 개념으로 바뀌는 것이다.



[그림 IV-4] 개념의 변화2

다음으로 삼각형의 질량중심을 구하는 과정을 통하여 연속적인 양에서 표현들이 어떻게 변하고, 조작적 개념을 구조적 개념으로 변하게 하는데 어떻게 관여하는지 알아보자(C1).

편의상 밀도가 일정한 직각삼각형으로 단순화하여 이를 살펴볼 것이다.



[그림 IV-5] 직각삼각형의 미소 분할

질량중심$(\bar{x}, \bar{y})$의 x좌표를 $\bar{x}$라 하자. 그러면 $\bar{x}$는 모멘트를 전체 질량 M으로 나눈 것이며 다음과 같은 대수적 조작을 할 수 있다.

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{M}$$

⑤

$$= \frac{\int x\,\delta\,dA}{\delta\frac{1}{2}de}$$

⑥

$$= \frac{\int x\,dA}{\frac{1}{2}de}$$

⑦

$$= \frac{\int_0^d x\,\frac{e}{d}x\,dx}{\frac{1}{2}\,de}$$

과정 ⑤의 표현의 변화는 질량 개념과 넓이 개념이 연결되어 있다. 과정 ⑥은 밀도가 약분되는 대수적 조작에 의한 표현의 변화이다. 그런데 변화된 표현은 여전히 질량이라는 대상을 지향하고 있음에 유의해야 한다. 왜냐하면 앞에서와 마찬가지로 변화된 표현이 다른 두 대상, 질량과 면적을 지시하고 있기 때문이다[7].

질량중심의 y좌표 값인 $\bar{y}$에 대해서도 생각해보자.

$$\bar{y} = \frac{\int \frac{y}{2}dm}{M}$$

ⓑ

⑧

$$= \frac{\int \frac{y}{2}\,\delta\,dA}{\delta\frac{1}{2}de}$$

⑨

$$= \frac{\int \frac{y}{2}\,dA}{\frac{1}{2}de}$$

⑩

$$= \frac{\int \frac{y}{2}\,y\,dx}{\frac{1}{2}\,de}$$

⑪

$$= \frac{\int_0^d \frac{1}{2}\left(\frac{e}{d}x\right)^2 dx}{\frac{1}{2}\,de}$$

7) 과정 ②에서 논의한 바와 마찬가지로 여기서 두 개념, 질량중심 개념과 면적 중심 개념은 동일한 표현을 쓰고 있지만 다른 대상을 지향하고 있음에 주의해야 한다. 하나는 질량이고 다른 하나는 면적이다. [그림 IV-5]에서 직각삼각형의 밀도를 같다고 했을 때 동일한 표현이지만 밀도가 일정하지 않다면 질량중심과 면적중심은 다른 표현을 갖는다.

과정 ⑧, ⑨, ⑩는 과정 ⑤, ⑥, ⑦과 비슷한 맥락으로 이해할 수 있다. ⑪의 표현은 적분개념이 형성된 상태에서의 표현의 변화이다. 그런데 여기서 중요한 것은 표현 ⓑ ($\frac{\int \frac{y}{2}dm}{M}$)이다. 앞에서 [그림 IV-5]과 같이 미소 직사각형으로 분할한 경우 x에 대한 질량 중심 $\bar{x}$의 표현 f는 $\frac{\int xdm}{M}$ 이다.

$$\boxed{x} \xrightarrow{f} \boxed{\bar{x}}$$

[그림 IV-6] x에 대한 질량 중심 $\bar{x}$의 표현 f

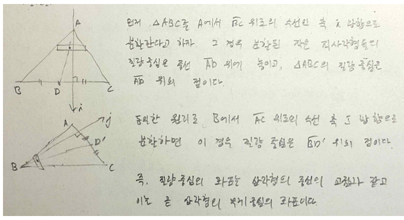
그런데 y에 대한 질량 중심 $\bar{y}$를 구하기 위한 모멘트는 $\int y\,dm$이 아니고 $\int \frac{y}{2}dm$이다. 그것은 밀도가 일정한 얇은 직사각형의 질량중심은 중앙에 있어서 그 중앙 위치의 y좌표가 $\frac{y}{2}$이고 그 위치에 대한 모멘트이기 때문이다. 이것은 질량중심의 x좌표인 $\bar{x}$에서는 잘 드러나지 않지만 y좌표인 $\bar{y}$를 구할 때 나타나는 표현인데, 이 표현은 밀도가 일정한 미소 직사각형의 질량이 중앙에 집중되어 있다는 구조적 개념 형성을 유도한다.

$$\boxed{y} \xrightarrow{g} \boxed{\bar{y}}$$

[그림 IV-7] y에 대한 질량 중심 $\bar{y}$의 표현 g

개념에 대한 Sfard의 관점에서 보면 표현 g는 질량중심의 구조적 개념 형성에 중요한 역할을 하는 표현인 것이다.

그렇다면 표현 g에 의해서 학생들은 질량중심의 구조적 개념을 형성할 수 있을까? 최병철(2016)의 연구에 의하면 구조적 개념을 형성한 학생은 매우 적은 것으로 나타났는데, 구조적 개념을 형성한 학생 중에 학생 O는 분할된 직사각형의 중심을 이용하여 질량중심을 다음과 같이 구하였다.



[그림 IV-8] 학생 O의 응답 (최병철, 2016, p. 36)

학생 O는 표현 g와 같은 방식으로 문제를 해결한 것이다. 그러나 대부분의 학생들은 조작적 개념의 수준에 머물러 있다고 알려져 있는데, 이것은 표현 g가 모든 학생에게 구조적 개념의 수준에 이르게 하는 것은 아니라는 것을 말한다. 그렇다면 조작적 개념의 수준에 있는 학생이 어떻게 구조적 개념에 이를 수 있을까? 사각형의 질량중심을 구하는 문제에 대한 다음 학생 C의 답변에서 그것을 찾을 수 있었다.

(19) T: 질량중심이 무엇이라고 생각해?
(20) C: 부분마다 질량이 있는데 부분마다 해당하는 위치에 질량을 곱한 것을 모두 더한 다음에 총질량으로 나누면 무게중심이 나와요.
(중략)
(23) T: 사각형의 질량중심을 구할 때, 두 개의 삼각형으로 나누어 생각하면 어떻게 될까?
(24) C: 그러면 각각의 삼각형에 대해서 구하고, 어…(생각을 잠시 하다가) 각각의 삼각형에 대해서 구하는데 그러면 그 두 삼각형의 넓이가 다르잖아요. 그러면 두 삼각형의 넓이의 비까지 고려해서 그 무게중심에 그 비를 적용하면 무게중심이 나오지 않을까요? (최병철, 2016, p. 40)

학생 C는 질량중심의 조작적 개념을 형성하였고(20), 표현 f와 g를 학습하였지만 사각형의 질량중심을 구하지 못한 상태였다. 그런데, 사각형을 두 개의 삼각형으로 나누는 표현(23)에서 질량중심의 구조적 개념을 형성하게 된다(24). 학생 C는 표현 g에서 바로 구조적 개념이 형성되지 않았지만 다른 표현을 통하여 구조적 개념에 이른 것이다.

이상에서 알 수 있는 것은 어떤 한 표현이 한 개념을 구조적 개념으로 발전하도록 한다는 것과 혹 그 표현이 한 개념을 구조적 개념으로 바로 발전을 유도하지 않더라도 학생 C의 경우에서 알 수 있는 바와 같이 조작적 개념에 이른 학생은 다른 적절한 표현을 통하여 구조적 개념에 이를 수 있다는 것이다.

V. 결론 및 제언

수학적 개념의 이해의 과정을 Piaget는 인지 주체의 조작적 활동으로 보았고 Vygotsky는 언어를 통한 사회화의 과정으로 보았다. 지식의 구성에 있어서 구성주의 입장에서 활동의 강조나 사회문화적 입장에서 언어의 역할의 강조는 수학적 개념의 이해의 과정이 인식 주체의 조작뿐만 아니라 사회화의 과정에 의해서 이루어진다는 것을 설명하고 있다. 그러나 이러한 연구에서는 인식 주체의 활동을 매개하는 기호 혹은 사회화의 과정에서 의사소통을 매개하는 언어의 특성인 기호의 기능에는 주의하지 않았다.

수학적 개념의 이해의 과정에서 기호의 역할의 중요성은 Saussure, Peirce, Frege의 기호학에 의하여 부각되기 시작하였는데, 기호학은 언어의 구조적 측면에서 접근하여 수학적 개념의 이해의 과정을 설명한 것이다. 본 연구는 기호학적 측면에서 수학적 개념의 이해의 과정을 표현에 주목하여 표현이 개념 형성에 어떤 역할을 하는가와 그 표현과 대상 사이의 관계를 알아보았다.

기호학에서 수학적 개념은 Saussure의 관점에서 기의와 기표의 이원론의 관계로 설명되다가 Peirce와 Frege의 관점에서 삼원론의 관계로 진전하였다. Bakker와 Hoffmann, Azarello 외는 각각 Peirce와 Frege의 기호학에 근거하여 표현과 의미의 관계를 연구하였는데, 이들 연구는 기존에 형성된 개념에서의 의미의 변화과정을 다루고 있다. 본 논문은 이와 더불어 한 대상을 지시하는 표현을 통하여 아직 형성되지 않은 새로운 개념으로 이행하는 데 어떻게 관여하는지, 그리고 한 개념이 어떻게 구조적 개념으로 발전하는 데 관여하는지를 정수개념과 질량중심 개념을 사례로 다루었다.

정수와 질량중심의 사례에서 살펴본 바와 같이 한 개념 안에서 표현 A는 $\widetilde{A}$로 변환되고 변환된 표현 $\widetilde{A}$은 이전 개념에서 다른 개념으로의 개념의 발전을 가능하게 한다.

이때 주의해야 하는 것은 그 표현이 어떤 대상을 지시 혹은 지향하는가이다. 한 개념 안에서 개념의 발전을 다루고자 할 때 우리는 그 개념이 지시하는 대상이 무엇인지 알아야 한다. 그것이 중요한 이유는 한 개념이 같은 대상을 지향하고 있을 때 그 대상에 대한 개념이 어떻게 확장하여 발전하는지를 논할 수 있기 때문이다. 그렇지 않을 경우 무게중심의 개념과 질량중심의 개념과 같이 두 개념이 다른 대상을 지시함에도 불구하고 그 개념들에 대한 표현이 동일하다는 이유로 같은 개념이라고 착각할지 모른다. 이것이 개념의 형성(C1, C2, C3)에 관여하는 표현의 작용을 단순히 표현과 개념 사이의 이원적 관계가 아니라 표현, 개념, 대상의 삼원적 관계에서 바라보아야 하는 이유이다.

여기서 표현은 한 대상을 지시하는 개념 안에서 무한할 정도로 많은 양식으로 나타나는데 그

중에서 어떤 적절한 표현은 기존의 개념을 구조적 개념으로 혹은 다른 개념으로 확장하거나 새로운 개념을 형성하도록 하는 데 기여하는 것이다. 우리는 그것을 정수의 개념과 질량중심의 개념의 사례에서 살펴보았다([그림 IV-2], [그림 IV-7], (23)).

다양한 양식의 표현들(Duval, 2006)과 무수히 많은 동치의 대수적 표현들 중에 동치의 표현들이 같은 대상을 지시하고 있는지 우리는 구별해야 하며 동일한 대상을 지향하는 무수히 많은 표현들 중에서 어떤 적절한 표현이 개념의 발전을 유도하는지에 주의해야 한다. 개념의 발전을 유도하는 표현은 이전 개념에서 새로운 개념으로 이행하도록 하는 데에 적극적으로 관여하고 있다. 한 개념에 대하여 특히 어떤 표현은 학생들이 가지고 있는 조작적 개념을 구조적 개념으로 발전하도록 그 이행을 촉진시킬 수 있으며 Sfard(1991)가 말하는 의사구조적 개념에 이르는 것을 막을 수 있는 것이다.

또한 대수적 조작에 의한 표현의 변화 과정에서 새 개념이 구성되기도(C3)하는데 새 개념의 구성은 문제를 해결하는 단계를 단축시킴으로 사고의 효율성을 높일 수 있다. 따라서 대수적 조작을 통하여 새 개념을 구성할 수 있는 적절한 표현을 찾아야 하며 그러한 연구는 지속적으로 이루어져야 할 것이다.

수학적 개념은 기호학적 관점에서 이해될 수 있으며 표현은 개념 형성에 있어서 핵심적인 역할을 수행한다. 따라서 우리는 정수 개념, 질량중심 개념뿐만 아니라 다른 수학적 개념에 대한 연구를 통하여 적절한 표현을 개발하고 이를 이용하여 학생들이 수학적 개념을 잘 형성할 수 있도록 도와주어야 할 것이다.

참고문헌

김선희, 이종희(2002). 수학기호와 그 의미에 대한 고찰 및 도입 방법. **학교수학, 4**(4), pp. 539-554.

김선희, 이종희(2003). 기호학 관점에서의 문자와 식 분석. **학교수학, 5**(1), pp. 59-76.

송상헌, 신은주(2007). 수학 영재의 추상화 학습에서 기호의 의미 작용 과정 사례 분석. **학교수학, 9**(1), pp. 161-180.

최병철(2016). 질량중심 개념의 구조적 개념 형성에 관한 연구. **수학교육학연구, 26**(1). pp. 23-45.

Azarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G.(2001). A Model For Analysing Algebraic Processes of Thinking. In Sutherland et al.(eds), *Perspectives on School Algebra*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht. pp. 13-36.

Bakker, A.(2004). *Design research in statistics education On symbolizing and computer tools*. Dissertation Utrecht University.

Bakker, A., & Hoffmann, M. H. G.(2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics 60*, pp. 333-358.

Bakker, A.(2007). Diagrammatic reasoning and hypostatic abstraction in statistics and education. Semiotica 164. pp. 9-29.

Cobb, P. (2002). Modeling, symbolizing, and tool use in statistical data analysis. In K. P. E. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers. pp. 171-196.

Davis, R. B. & Maher, C. A.(1997). How students think: The role of representation. In English, L. D.(Eds.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. pp. 93-115.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learnin of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 61*, pp. 103-131.

Gravemeijer, K. & Stephan, M.(2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In K. P. E. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers. pp. 145-169.

Otte, M.(2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics 61*, pp. 11-38.

Presmeg, N.(2006) Semiotic and the “connections” standards: Signification of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 61*, pp. 163-182.

Saussure, F, de (1986). *Course in General Linguistics*. Eds. Charles Bally, Albert Sechehaye, and Albert Riedlinger. Trans. Roy Harris. LaSalle, Ill: Open Court.

Sfard, A.(1991). on the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22*. pp. 1-36.

Thomas, G. B., Weir, M.D. & Hass, J. R(2010). Thomas’ Calculus: Early Transcendentals. Twelfth Edition. PEARSON: International Edition.

Vygotsky, L. S.(1987). Thinking and speech. In Rieber, R. W. & Caton, A. S.(Eds.), *The collection works of L.S. Vygotsky: Volume 1, Problems of general Psychology*. New York and London: Plenum Press. pp. 39-285.

Whitson, J. A. (1997). Cognition as a semiotic process: From situated mediation to critical reflective transcendence. In D. Kirshner & J. A. Whitson (Eds.), *Situated cognition theory: Social, semiotic, and neurological perspectives*. Hillsdale, NJ: Erlbaum. pp. 97-150.

A Semiotical Analysis of Expressions Which is Involved with The Process of A Conceptual Formation

Choi, Byung Chul (Kyungdong High School)

Semiotic studies in mathematical education have been based on Saussure, Peirce, and Frege and many prior researches have explored the concepts in a perspective of semiotics. However, the relationship among semiotical elements and the formation and the evolution of a conception are still ambiguous and veiled in many aspects.

This thesis is intended to show how a conception was formed and evolved by expression, which is an element of semiotics. In this process, I sought to partially illuminate the relationship among expressions, concepts, and objects.

* Key Words : semiotics(기호학), sense(의미), expression(표현), object(대상), conception(개념), structural conception(구조적 개념), integer number(정수), center of mass(질량중심)

논문접수 : 2017. 10. 9
논문수정 : 2017. 11. 4
심사완료 : 2017. 11. 8