Journal of Korea Game Society 2017 Feb; 17(1): 89–98 http://dx.doi.org/10.7583/JKGS.2017.17.1.89

컴퓨터 그래픽스

방향성 입자를 이용한 ARAP 동적 변형

최민규 광운대학교 컴퓨터과학과 mgchoi@kw.ac.kr

As-Rigid-As-Possible Dynamic Deformation with Oriented Particles

Min Gyu Choi Dept. of Computer Science, Kwangwoon University

요 약

본 논문에서는 물리기반 동적 변형을 실시간에 안정적으로 시뮬레이션하는 새로운 ARAP (as-rigid-as-possible) 방법을 제안한다. 1, 2, 3차원 물체의 변형을 안정적이며, 빠르고, 일관성 있게 다루기 위하여 방향성 입자로 이루어진 변형 그래프를 도입하고 그에 따른 ARAP 변형 에너지를 공식화한다. 방향성 입자의 안정적인 시간 적분을 위해서는 변분 공식화에 기반을 둔 내재적 시간 적분 기법을 개발한다. 또한 국지적/전역적 최적화를 교대로 반복 적용하여 방향성 입자의 최적 위치 및 회전을 구한다. 제안된 방법은 구현이 쉽고 복잡한 변형을 실시간에 시뮬 레이션할 수 있을 정도로 빠르다.

ABSTRACT

This paper presents a novel ARAP (as-rigid-as-possible) approach to real-time simulation of physics-based deformation. To cope with one, two and three dimensional deformable bodies in an efficient, robust and uniform manner, we introduce a deformation graph of oriented particles and formulate the corresponding ARAP deformation energy. For stable time integration of the oriented particles, we develop an implicit integration scheme formulated in a variational form. Our method seeks the optimal positions and rotations of the oriented particles by iteratively applying an alternating local/global optimization scheme. The proposed method is easy to implement and computationally efficient to simulate complex deformable models in real time.

Keywords : physics-based simulation(물리기반 시뮬레이션), dynamic deformation(동적 변 형), deformation graph(변형 그래프), oriented particle(방향성 입자)

Received: Jan, 15, 2016 Revised: Feb, 17, 2016	© The Korea Game Society. All rights reserved. This is an
Accepted: Feb, 20, 2016	open-access article distributed under the terms of the Creative
Corresponding Author: Min Gyu Choi(Kwangwoon University)	Commons Attribution Non-Commercial License
E-mail: mgchoi@kw.ac.kr	(http://creativecommons.otg/licenses/by-nc/3.0), which permits
	unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in
ISSN: 1598-4540 / eISSN: 2287-8211	any medium, provided the original work is properly cited.

1. 서 론

영화뿐만 아니라 게임, 가상현실 등의 실시간 응 용에서도 물리적 사실성을 높이기 위해 물리기반 시뮬레이션 기술을 활발히 도입하고 있다. 본 논문 은 물리기반 시뮬레이션 기술 중에서 실시간 동적 변형을 다룬다. 동적 변형은 컴퓨터 그래픽스 분야 에서 오랫동안 연구되어온 매우 중요한 문제임에도 불구하고 시각적으로 그럴듯하며 안정적인 변형을 실시간에 강건하게 생성하는 것은 여전히 도전적인 문제이다.

연속체 역학에 기반을 둔 유한요소법은 시뮬레 이션의 정확성은 높지만 실시간 응용에 적합한 속 도 및 안정성을 보장하기 어렵다. 의복이나 머리카 락 시뮬레이션에 널리 사용되는 질점-용수철 모델 또한 다양한 물체를 실시간에 안정적으로 시뮬레이 션하기 쉽지 않다. 최근에 들어 속도나 가속도가 아닌 위치를 직접 다루어 시뮬레이션 시간 간격에 상관없이 안정적이며 빠른 방법들이 대두 되고 있 다. 물체의 정점을 나타내는 입자의 위치를 직접 다루는 위치 기반 동역학[1], 입자 집합의 최적 회 전 및 이동을 통해 입자의 위치를 결정하는 형상 맞춤 기반의 무요소 변형[2,3], 위치뿐만 아니라 방 향 및 부피를 가지는 방향성 입자에 대한 국지적 형상 맞춤[4]. 변분 공식화(variational formulation)로 얻은 관성 에너지와 변형 에너지에 국지적/전역적 최적화를 번갈아 적용하는 사영 동 역학(projective dynamics)[5,6,7] 등의 실시간 기 법들이 제안되었다.

본 논문에서는 적은 수의 노드만으로도 안정적 인 변형을 시뮬레이션하기 위하여 공간 변형을 위 한 변형 그래프[8]의 노드를 방향을 가진 타원체 입자로 확장하여 ARAP 변형 에너지를 공식화한 다. 또한 동적 변형을 안정적으로 시뮬레이션하기 위하여 변분 공식화에 기반을 둔 관성 에너지를 도입한다. 최종 에너지의 최적화에는 국지적/전역 적 최적화를 교대로 반복 적용함으로써 방향성 입 자의 위치 및 회전을 손쉽고 빠르게 구한다. 물체 의 최종 변형은 메시의 각 정점에 방향성 입자들 의 위치 및 회전으로 표현된 변환들을 선형 혼합 스키닝하여 구한다.

2. 관련 연구

변형체 시뮬레이션은 Terzopoulos 등[9]의 선구 적인 연구 이후로 컴퓨터 그래픽스 분야에서 활발 히 연구되었다. 이 분야에 대한 종합적인 개론은 [10]에서 찾아볼 수 있다. 연속체 역학을 이용하여 고체의 변형을 정확히 시뮬레이션하거나 질점-용 수철 모델을 이용하여 의복이나 머리카락을 사실적 으로 시뮬레이션하는 것은 주로 영화와 같은 오프 라인 응용을 위한 것이다. 게임 등의 실시간 대화 적 응용에서는 시뮬레이션의 정확도보다 속도 및 안정성이 더 중요하다.

안정적인 실시간 시뮬레이션을 위해 입자들의 현재 위치 및 속도, 외력으로부터 예측한 위치와 초기 위치를 이용하여 다음 위치를 결정하고 속도 를 역산하는 방법들이 제안되었다. 형상 맞춤 기반 의 무요소 변형은 초기 위치와 예측된 위치 사이 의 최적 회전 및 이동을 이용하여 다음 위치를 결 정한다[2]. 이 방법은 시간 간격에 상관없이 안정 적이다. 하지만 단일 변환을 통한 형상 맞춤은 그 리 크지 않은 변형만을 만들어 낼 수 있다. 이를 확장한 격자 형상 맞춤은 서로 중첩되는 각각의 격자 집합에 국지적 형상 맞춤을 적용하여 시각적 으로 그럴듯한 큰 변형을 만들어 낼 수 있다[3]. 적은 수의 입자만으로도 1, 2, 3차원 물체의 복잡 한 동적 변형을 안정적으로 시뮬레이션하기 위하여 방향성 입자 기반의 형상 맞춤 기법이 제안되었다 [4]. 위치뿐만 아니라 방향과 부피를 가진 타원체 입자들로 물체를 근사하고 각 타원체에 직접 연결 된 타원체들의 집합에 국지적 형상 맞춤을 가우스 -자이델 방식으로 반복 적용한다.

형상 맞춤은 위치 기반 동역학에서의 강한 제약 조건으로 해석될 수 있다. 위치 기반 동역학은 제

약조건의 질량 가중 사영을 가우스-자이델 방식으 로 반복 적용함으로써 안정적인 변형을 만들어 낼 수 있다[1]. 하지만 변형체의 강성이 반복 횟수 및 시간 간격에 의존하는 단점이 있다. 이는 형상 맞 춤에 기반을 둔 방법들에서도 발생하는 문제이다. 이러한 단점에도 불구하고 위치 기반 동역학은 고 체 및 유체의 여러 다양한 현상의 실시간 시뮬레 이션에 효과적으로 사용되었다[11,12,13,14]. 실시간 응용에 있어서는 속도 및 안정성이 정확성보다 중 요하기 때문이며 강성과 관련된 반복 횟수 및 시 간 간격을 제어 변수로 간주할 수 있기 때문이다. 강성에 반비례하는 컴플라이언스를 도입하여 반복 횟수 및 시간 간격에 상관없이 강성을 다룰 수 있 는 확장된 위치 기반 동역학도 제안되었다[15]. 하 지만 이 방법 역시 가우스-자이델 반복을 사용하 기 때문에 국지적/전역적 최적화에 비해 수렴 속도 가 느리다. 또한 본 논문에서와 같은 방향성 입자 에 대한 고려는 아직까지 제시되지 않았다.

최근에 들어 내재적 오일러 적분의 변분 공식화 에 기반을 둔 관성 에너지 및 제약 공간에서 공식 화한 변형 에너지의 최적화에 국지적/전역적 최적 화를 교대로 반복 적용한 방법들이 대두되고 있다. 먼저 질점-용수철 모델에서 용수철 방향에 대한 부가 제약 변수를 도입하여 고정된 질점 위치에 대한 방향의 국지적 최적화와 고정된 방향에 대한 위치의 전역적 최적화를 교대로 적용하는 방법이 제안되었다[6]. 국지적 최적화는 방향 공간으로 사 영이 되며 전역적 최적화는 미리 계산 가능한 희 박 콜레스키 분해를 이용한 역대입이 된다. 이 방 법은 유한요소를 포함하여 다양한 제약 조건에 적 용 가능한 사영 동역학 기법으로 확장 되었다[5]. 최근에 들어 체비쇼프 반반복(semi-iterative) 기법 을 이용하여 사영 동역학 및 위치 기반 동역학의 수렴성을 향상시키는 방법이 제안되었다[16]. 또한 사영 동역학을 방법으로 가주하고 준뉴턴 L-BFGS 방법을 적용하여 수렴성을 가속화하는 기법이 제안되었다[17].

블록 좌표 강하(block coordinate descent)로 불

리는 국지적/전역적 최적화의 교대 반복 적용은 ARAP 곡면 모델링에서 도입되었다[18]. 이 방법 에서는 각 정점에 인접한 정점들의 초기 위치에 각 정점에서의 회전을 적용한 위치와 실제 변형된 위치 사이의 거리의 제곱으로 ARAP 변형 에너지 를 정의한다. 따라서 각 정점마다 위치뿐만 아니라 주변 점들의 회전에 대한 부가적인 최적화 변수가 있다. 최적 회전은 주변 점들에 대한 형상 맞춤을 통해 구할 수 있으며 이는 3차원 회전 행렬 공간 으로의 사영인 극분해를 필요로 한다. 최적 위치는 선형 시스템을 풀어서 구할 수 있으며 초기 메시 에만 의존적이므로 희박 콜레스키 분해를 미리 계 산해 둘 수 있다.

형상 변환을 위한 임베디드 변형[8]은 강체 변환 에 해당하는 노드들로 이루어진 변형 그래프에 ARAP 변형 에너지를 사용한다. 각 노드는 주변 공간을 변형하기 때문에 ARAP 곡면 모델링에서 와 달리 메시, 다각형 수프 등 다양하게 표현된 형 상들의 변형에 적용가능하다. 하지만 노드에 위치 와 방향만 있고 부피가 없기 때문에 방향을 가진 타원체 입자의 형상 맞춤과 달리 1차원적인 구조 를 포함한 형상 변형을 안정적으로 다룰 수 없다 [4]. 또한 반복적 가우스-뉴턴 방법을 이용하여 위 치와 회전을 동시에 비선형 최적화하기 때문에 적 당한 수준의 해를 구하는데 있어서는 국지적/전역 적 최적화보다 더 많은 시간이 걸린다.

3. 방 법

본 논문에서는 변형체를 감싸는 공간을 적은 수 의 노드만으로도 안정적으로 변형하기 위하여, 방 향을 가진 타원체 입자로 구성된 변형 그래프를 도입한다. 앞으로 방향을 가진 타원체 입자를 방향 성 입자로 부른다. 방향성 입자의 위치 및 회전은 변형 에너지 E^e , 관성 에너지 E^k , 직접 조작 제약 조건 에너지 E^e 를 모두 합한 최종 에너지 $E=(E^k+E^e+E^e)$ 를 최소화하는 문제를 풀어서 구할 수 있다. 최적 해를 빠르고 강건하게 구하기 위해서 국지적/전역적 최적화의 교대 반복 적용을 채택한다. 물체의 변형은 각 정점에 방향성 입자의 위치 및 회전으로 이루어진 강체 변환을 선형 혼 합 스키닝하여 구할 수 있다.

방향성 입자로 이루어진 변형 그래프 및 변형 그래프를 이용한 공간 변형에 대하여 3.1절에서 설명하고, 이를 기반으로 3.2절에서 ARAP 변형 에너지를 유도한다. 설명의 편의를 위하여 3.3절에 서 변형 에너지에만 국지적/전역적 최적화를 교대 반복 적용하는 방법을 설명한 후, 3.4절에서 직접 조작 제약 조건 에너지를 고려하고, 3.5절에서 관 성 에너지를 추가한다.

3.1 방향성 입자로 이루어진 변형 그래프

방향성 입자 e_j 의 현재 위치 및 방향을 각각 x_j 와 $E_j = [e_j^a | e_j^b | e_j^c] \equiv$ 이용하여 나타내자. 여기서 e_j^a , e_j^b , e_j^c 는 반지름 a_j , b_j , c_j 를 가지는 타원체의 세 축을 나타내는 단위 벡터이다. 입자 e_j 의 초기 위치 및 방향은 각각 $\overline{x_j}$ 와 $\overline{E_j}$ 로 나타낸다. 입자 e_j 와 에지로 직접 연결된 입자들의 집합은 N_j 로 나 타낸다.

변형 그래프로부터 물체의 변형을 빠르고 손쉽 게 구하기 위하여 [8]에서와 같은 선형 혼합 스키 닝을 채택한다. 개별적인 입자의 영향은 부드럽게 혼합되어 변형 전 메시 정점 $\overline{p_i}$ 의 변형 후 위치 p_i 는 m개의 가장 가까운 입자들의 장체 변환을 적 용하여 계산한 가중합으로 결정된다.

$$p_{i} = \sum_{j=1}^{m} w_{j}(\bar{p}_{i}) [R_{j}(\bar{p}_{i} - \bar{x}_{j}) + x_{j}].$$
(1)

여기서 $R_j = E_j \overline{E_j}^T$ 는 방향성 입자 e_j 의 회전을 나 타내는 회전 행렬이다. 법선 벡터도 정점의 위치와 유사한 선형 혼합 스키닝으로 결정할 수 있다: $n_i = \sum_{j=1}^{m} w_j (\overline{p}_i) [R_j \overline{n}_i]$. 법선 벡터는 정점 계산과 달리 단위 벡터로 만들기 위한 정규화가 필요하다.

3.2 ARAP 변형 에너지

변형의 강성을 측정하기 위하여 [8,18]에서와 같 이 각 노드 e_i 의 인접 노드 e_j 들에 R_i 를 적용한 위치와 현재 위치 사이의 거리의 제곱으로 정의되 는 ARAP 변형 에너지를 채택한다. 본 논문에서의 노드는 [8,18]에서의 단일 정점과 달리 타원체 입 자이므로 타원체 입자에 속하는 모든 점들을 고려 하면 다음과 같은 변형 에너지를 정의할 수 있다.

$$E^{e} = \frac{k}{2} \sum_{i} \sum_{j \in N_{i}} \int_{e_{j}} ||R_{i}(\overline{x} - \overline{x}_{i}) - (x - x_{i})||^{2} dx .$$
(2)

여기서 k는 강성 상수이며, x는 타원체 내의 물질 점 x의 변형 전 위치이다. 위의 에너지를 부록 A 에서와 같이 적분하고 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{split} E^{e} &= \frac{k}{2} \sum_{i} \sum_{j \in N_{i}} \left(\left\| R_{i} \left(\overline{E_{j}} \sqrt{A_{j}} \right) - R_{j} \left(\overline{E_{j}} \sqrt{A_{j}} \right) \right\|_{F}^{2} \right. (3) \\ &+ v_{j} \left\| R_{i} \left(\overline{x}_{j} - \overline{x}_{i} \right) - (x_{j} - x_{i}) \right\|^{2} \right). \end{split}$$

 $A_j = 0.2 \cdot v_j \operatorname{diag}(a_j^2, b_j^2, c_j^2)$ 는 반지름 a_j, b_j, c_j 를 가지며 표준 축에 정렬되어 있는 타원체의 모멘트 행렬이고 $v_i = 4/3 \pi a_i b_i c_i$ 는 타원체의 부피이다.

3.3 최적화

식 (3)에 주어진 에너지를 최소화하는 최적 해 를 얻기 위해서 [18]에서와 같이 국지적/전역적 최 적화를 교대로 반복 적용한다. 국지적 단계에서는 입자들의 위치가 고정되어 있다는 가정 하에 입자 들의 최적 회전을 독립적으로 계산한다. 전역적 단 계에서는 입자들의 회전이 고정되어 있다는 가정 하에 입자들의 최적 위치에 관한 선형 시스템을 풀어서 입자들의 위치를 한꺼번에 계산한다. 이러 한 국지적/전역적 최적화 과정을 사용자가 명시한 횟수 이내에서 반복 수행한다.

방향성 입자 e_i 의 최적 회전 R_i 를 결정하기 위 해 식 (3)에서 모든 입자들의 위치 x_i 는 고정되어 있다고 가정한다. 이와 같은 가정 하에 [5]에서는 R_i 가 다른 입자들의 회전 R_j 들과 독립적이었다. 하지만 식 (3)에서 R_i 는 R_i 들과 관련이 있다. 따라 서 본 논문에서는 R_i 를 계산할 때 다른 R_j 들도 고 정되어 있다는 추가적인 가정을 도입한다.

[19]를 참고하면 $\sum v_j \|R\overline{u}_j - u_j\|^2$ 을 최소화하는 회전 R은 공분산 행렬 $C = \sum v_j u_j \overline{u}_j^T$ 의 특이값 분 해 $C = U\Sigma V^T$ 를 통한 안정적인 극분해 $C = (UV^T)(V\Sigma V^T) = RS$ 를 통해 얻을 수 있다. 또한 $\sum \|RM_j - \overline{M}_j\|_F^2$ 를 최소화하는 회전 R은 프로베니우스 놈의 정의에 따라 전개한 후 정리하 면 $C = \sum M_j \overline{M}_j^T$ 의 극분해를 통해 얻을 수 있다.

따라서 식 (3)을 최소화하는 최적 회전 R_i 는 다 음 행렬의 극분해를 통해 얻을 수 있다.

$$\begin{split} C_i^e &= k \sum_{j \in N_i} R_j (\overline{A}_j + \overline{A}_i) + v_j (x_j - x_i) (\overline{x}_j - \overline{x}_i)^T. \enskip (4) \\ & \forall \forall A, \enskip (\overline{A}_j = \overline{E}_j A_j \overline{E}_j^T \vdash \enskip (\overline{A}_j - \overline{A}_i)^T. \\ & \forall \forall A, \enskip (A) = \overline{E}_j A_j \overline{E}_j^T \vdash \enskip (A) \\ & \forall \forall B \in A_i \enskip (A) \\ & \forall \forall B \in A_i \enskip (A) \\ & \forall \forall B \in A_i \enskip (A) \\ & \forall \forall A \enskip (A) \enskip (A) \\ & \forall \forall A \enskip (A) \enskip (A) \\ & \forall A \enskip (A) \enskip (A$$

입자들의 회전이 주어지면 식 (3)의 변형 에너 지의 위치에 대한 편도함수 $\partial E^e / \partial x_i$ 를 구하고 영 이 되는 x_i 들을 구하여 최적 위치를 계산한다. 즉 $\partial E^e / \partial x_i = 0$ 인 선형 시스템의 해를 구한다. 식 (3) 을 x_i 에 대해서 편미분하면 다음과 같은 편도함수 들을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial E^e}{\partial x_i} = k \sum_{j \in N_i} (v_j + v_i) (x_i - x_j)$$

$$- (v_j R_i + v_i R_j) (\overline{x}_i - \overline{x}_j).$$
(5)

이제 $\partial E^e / \partial x_i = 0$ 으로부터 다음과 같은 식들로 구 성된 희박 선형 시스템을 얻을 수 있다.

$$k \sum_{j \in N_{i}} (v_{j} + v_{i})(x_{i} - x_{j}) =$$

$$k \sum_{j \in N_{i}} (v_{j}R_{i} + v_{i}R_{j})(\overline{x}_{i} - \overline{x}_{j}).$$
(6)

입자의 위치 x_i 들로 구성한 3n차원 벡터 x를 도입하면 식 (6)을 다음과 같은 간략한 형태로 적 을 수 있다.

$$Lx = b. (7)$$

여기서 b는 식 (6)의 우변들로 구성한 3n차원 벡 터이며, L은 좌변으로부터 구성한 3n×3n 희박 행렬이다. 제약조건 및 관성 에너지의 최적화까지 포함시키면 시스템 행렬 L은 희박 대칭 양의 정부 호 상수 행렬이 된다. 따라서 L의 희박 콜레스키 분해를 미리 계산해둔 후 상황에 따라 변하는 b에 역대입을 적용하는 직접 해법을 채택한다.

3.4 제약 조건

변형 전의 메시 정점 v_c 를 직접 조작하여 v_c 에 위치시키는 직접 조작에 의한 위치 제약 조건을 지원한다. 이를 위해 식 (1)에 기술한 선형 혼합 스키닝을 v_c 에 적용한 위치와 사용자가 지정한 위 치 v_c 사이의 거리의 제곱에 관한 다음과 같은 에 너지를 정의한다.

$$E_{p}^{c} = \frac{w_{p}^{c}}{2} \left\| \sum_{j \in N_{c}} w_{j}(\bar{v}_{c}) \left[R_{j}(\bar{v}_{c} - \bar{x}_{j}) + x_{j} \right] - v_{c} \right\|^{2}$$
(8)

 w_p^c 는 최종 에너지를 위한 가중치이며, N_c 는 v_c 를 선형 혼합 스키닝하는데 사용될 v_c 에 가장 가까운 k개의 입자 집합이다. 따라서 입자들의 최적 위치 를 계산할 때 위치 제약 조건에 영향을 받는 $i \in N_c$ 인 입자들에서 편도함수 $\partial E_p^c / \partial x_i$ 를 추가적 으로 고려한다.

$$\frac{\partial E_p^c}{\partial x_i} = w_p^c w_i \left(\sum_{j \in N_c} w_j \left[R_j (\overline{v_c} - \overline{x_j}) + x_j \right] - v_c \right). \tag{9}$$

즉, 식 (6)의 선형 시스템에서 $i \in N_c$ 를 만족하는 i번째 식의 좌변에 $w_p^c w_i \sum w_j x_j$ 를 더하고, 우변에 $w_p^c w_i [v_c - \sum w_j R_j (\bar{v}_c - \bar{x}_j)]$ 를 더하면 된다. 또한 위치 제약 조건을 방향성 입자들의 최적 회전 계 산에 반영하기 위해 식 (8)에 기술한 에너지를 $E_p^c = 0.5 \cdot w_p^c \|R_i \bar{u}_i - u_i\|^2$ 와 같은 형태로 R_i 의 관 점에서 다시 적는다. 이때 $\bar{u}_i = w_i (\bar{v}_c - \bar{x}_i)$ 이며, $u_i = v_c - \sum_{j \in N_c} w_j [R_j (\bar{v}_c - \bar{x}_j) + x_j] + R_i \bar{u}_i$ 이다. 이제 $i \in N_c$ 인 방향성 입자에 대해서 식 (4)의 우변에 $w_p^c u_i \bar{u}_i^T$ 를 더하면 된다.

위치 제약 조건과 유사하게 변형 전의 메시 정

점 $\overline{v_c}$ 에서의 단위 방향 벡터 $\overline{n_c}$ 를 직접 조작하여 n_c 가 되게 하는 직접 조작에 의한 방향 제약 조건 도 부가할 수 있다. 이를 위하여 선형 혼합 스키닝 을 $\overline{n_c}$ 에 적용한 방향 벡터와 사용자가 지정한 방 향 벡터 n_c 사이의 차이의 제곱에 관한 다음과 같 은 에너지를 정의한다.

$$E_d^c = \frac{w_d^c}{2} \left\| \frac{\sum_{j \in N_c} w_j(\bar{v}_c) R_j \bar{n}_c}{\left\| \sum_{j \in N_c} w_j(\bar{v}_c) R_j \bar{n}_c \right\|} - n_c \right\|^2.$$
(10)

 w_d^c 는 최종 에너지를 위한 가중치이다. 이 에너지 는 방향성 입자들의 회전에만 관련되어 있다. 선형 혼합 스키닝을 통해 얻은 방향 벡터는 단위 크기 로의 정규화가 필요하므로 이를 곧바로 최소화하는 것은 매우 어렵다. 비정규화 전의 벡터의 크기 $l = \|\sum w_j R_j \overline{n}_c \|$ 이 $i \in N_c$ 인 R_i 에 의존적이지만 R_i 의 국지적 최적화 단계 동안 최적화의 편의를 위 하여 상수 취급한다. 그렇다면 식 (10)에 기술한 에너지를 $E_d^c = 0.5 \cdot w_d^c \|R_i \overline{r}_i - r_i\|^2$ 와 같은 형태로 R_i 의 관점에서 다시 적을 수 있다. 여기서 $\overline{r}_i = (w_i/l) \overline{n}_c$ 이며, $r_i = n_c - \sum (w_j/l) R_j \overline{n}_c + R_i \overline{r}_i$ 이다. 최종적으로 $i \in N_c$ 인 방향성 입자에 대해서 식 (4)의 우변에 $w_d^c r_i \overline{r}_i^T =$ 더해 주면 된다.

3.5 관성 에너지

변분 공식화에 기반을 둔 관성 에너지[5]를 타원 체의 모든 점에 적용하면 방향성 입자로 이루어진 변형 그래프의 관성 에너지는 다음과 같이 정의된 다.

$$E^{k} = \frac{1}{2h^{2}} \sum_{i} \int_{e_{i}} \rho \|x - 2x^{(1)} + x^{(2)}\|^{2} dx.$$
(11)

여기서 ρ는 입자의 밀도이며 x⁽¹⁾과 x⁽²⁾는 현재와 이전 시간 간격에서의 위치이다. 탄성 에너지에서 와 같이 적분하고 정리하면 다음과 같은 관성 에 너지를 얻을 수 있다.

$$\begin{split} E^{k} &= \frac{1}{2h^{2}} \sum_{i} (\|[R_{i} - 2\,R_{i}^{(1)} + R_{i}^{(2)}]\,\overline{E_{i}}\,\sqrt{A_{i}}\,\|_{F}^{2} \quad (12) \\ &+ m_{i}\|x_{i} - 2\,x_{i}^{(1)} + x_{i}^{(2)})\|^{2}). \end{split}$$

여기서 $m_i = \rho v_i$ 는 입자의 질량이며 $R_i^{(1)}$ 와 $R_i^{(2)}$, $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$ 는 현재와 이전 시간 간격에서의 방향 및 위치이다. 이제 회전 항이 관성 에너지에 나타나게 되었다.

식 (12)를 최소화하는 최적 회전 R_i 를 구하는 것은 식 (3)에서 식 (4)를 유도한 것과 유사하며 다음 행렬의 극분해를 통해 얻을 수 있다.

$$C_i^k = \frac{1}{h^2} \left(2R_i^{(1)} - R_i^{(2)} \right) \overline{A}_i.$$
(13)

따라서 이를 식 (4)에 더해 주면 된다. 또한 최적 위치를 위한 편도함수는 다음과 같다.

$$\frac{\partial E^{k}}{\partial x_{i}} = \frac{m_{i}}{h^{2}} \Big(x_{i} - 2 \, x_{i}^{(1)} + x_{i}^{(2)} \Big). \tag{14}$$

따라서 식 (6)의 선형 시스템에서 i번째 식의 좌변 에 $m_i x_i / h^2$ 를 더하고 우변에 $m_i (2x_i^{(1)} - x_i^{(2)}) / h^2$ 를 더하면 된다.

4. 실험 결과

본 논문에서 제안한 방향성 입자를 이용한 실시 간 대화적 ARAP 동적 변형 시뮬레이션 기술은 오토데스크 마야의 플러그인 소프트웨어로 구현되 었다. 모든 실험에서는 2.6GHz 인텔 코어-i7 프 로세서와 엔비디아 지포스 GT 750M 그래픽카드, 16GB 메모리를 장착한 맥북 프로 컴퓨터가 사용 되었다. 현재 단일 쓰레드만을 사용하고 있으며 추 후 다중 쓰레드로 확장하고자 한다. 모든 실험에서 시뮬레이션 시간 간격은 1/60초이며, 국지적/전역 적 최적화 반복 횟수는 10회이다.

첫 번째 실험은 동일한 형태의 변형체에 식 (3) 에서의 강성 상수 k를 달리해가며 강성이 제대로 표현되는지 확인하는 것이다. [Fig. 1]은 위치 제약 조건들에 의해 한쪽 끝 면이 고정되어 있는 사각 막대 모양의 변형체가 중력에 의해 변형되다가 진 동이 멈추고 정지한 상태를 보여준다. 녹색 막대는 빨간색 막대보다 2배 높은 강성을 가지고 있으며 파란색 막대는 빨간색 막대보다 4배 높은 강성을 가지고 있다. 방향성 입자를 이용한 형상 맞춤 기 법[4]에서와 달리 변형의 강성이 반복 횟수나 시뮬 레이션 시간 간격에 의존적이지 않다.



[Fig. 1] Bars deformed under gravity with different stiffness values.



[Fig. 2] Twisting and manipulating a bar (left) with a serial deformation graph (right).

다음은 사각 막대의 한쪽 끝을 위치 및 방향 제 약 조건을 이용하여 꼬고 이동시키는 실험이다. 방 향 및 부피가 있는 타원체 입자로 이루어진 변형 그래프의 ARAP 변형 에너지를 사용하기 때문에 입자가 선형적으로 연결되어 있는 경우에도 [Fig. 2]에서와 같이 안정적인 시뮬레이션이 가능하다. 이 실험에서는 [Fig. 1]에 도시된 첫 번째 실험에 서와 마찬가지로 20개의 방향성 입자가 19개의 에 지에 의해 선형적으로 연결된 변형 그래프를 사용 하였다. 한쪽 끝 면의 모든 점을 고정시키기 위하 여 25개의 위치 제약 조건이 사용되었으며 다른 쪽 끝을 꼬고 이동시키기 위하여 1개의 위치 제약 조건과 3개의 방향 제약조건이 사용되었다. 시뮬레 이션 시간 간격마다 평균적으로 0.62ms가 소요되 었다. 이는 첫 번째 실험의 평균 소요시간 0.51ms 보다 21.6%가 더 증가된 것이다. 한쪽 끝의 꼬임 에 의해 방향성 입자들의 회전이 더 복잡해지고 이에 따라 국지적 최적화에 사용된 반복적 특이값 분해에 더 많은 시간이 소요되었기 때문이다.



[Fig. 3] A dinosaur returns to its rest pose from an extremely deformed pose, a single position.



[Fig. 4] A dinosaur falling down on the floor.

에너지 최적화를 통해 입자의 방향과 위치를 직 접 계산하기 때문에 [Fig. 3]에서와 같이 극단적인 상태에서도 절대적으로 안정적인 시뮬레이션이 가 능하다. 이 실험은 공룡 모델의 모든 입자를 한 점 에 위치시키고 입자들의 방향을 임의의 값으로 설 정한 후 시뮬레이션한 것이다. 아주 빠른 시간 내 에 안정적으로 본래의 모습으로 회복되는 것을 확 인할 수 있다. 이와 같이 과격한 변형에서는 식 (4)의 최적 회전 계산에 주의가 필요하다. 어느 한 입자에 직접 연결된 입자들의 연결 관계가 반전되 어 형상 맞춤 행렬의 행렬식이 음수가 될 수 있기 때문이다. 본 논문에서 채택한 특이값 분해를 이용 한 극분해는 고윳값이 음수가 나오는 경우도 안정 적으로 처리할 수 있다[19].

[Fig. 4]는 공룡 모델이 바닥에 넘어져 바닥과 충돌하는 실험결과를 보여준다. 타원체 입자와 바 닥 사이의 충돌 검사는 [4]에서의 방법을 사용하였 으며 충돌 처리는 바닥을 파고든 입자를 바닥 위 로 올리는 간단한 방법을 사용하였다. 바닥과의 마 찰은 타원체 입자의 선속도 및 각속도를 매 시간 간격마다 일정 비율로 감쇠시키는 간단한 방법을 택하였다. 입자의 선속도는 식 (14)에서 $2x_i^{(1)}-x_i^{(2)}$ $=x_i^{(1)}+hv_i^{(1)}, v_i^{(1)}=(x_i^{(1)}-x_i^{(2)})/h로 해석하고 각속$ $도는 식 (13)에서<math>2R_i^{(1)}-R_i^{(2)}=R_i^{(1)}+h\omega_i^{(1)} \times R_i^{(1)}$ 로 해석하면 된다. 따라서 $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}$ 대신에 $x_i^{(1)}, v_i^{(1)}$ 을 위치 관련 상태 변수로 간직하고 $R_i^{(1)}, R_i^{(2)}$ 대신에 $R_i^{(1)}, \omega_i^{(1)} \times R_i^{(1)}$ 을 회전 관련 상태 변수로 간직하 면 된다. 이 실험에서는 100개의 방향성 입자와 261개의 에지로 연결된 변형그래프를 사용하였으 며 시뮬레이션 시간 간격마다 평균적으로 2.25ms 의 시간이 소요되었다.

5. 결 론

본 논문에서는 적은 수의 노드만으로도 안정적 인 변형을 시뮬레이션하기 위하여 변형 그래프의 노드를 방향을 가진 타원체 입자로 확장하여 ARAP 변형 에너지를 공식화하였다. 또한 동적 변 형을 안정적으로 시뮬레이션하기 위하여 변분 공식 화에 기반을 둔 에너지 최적화 접근 방법을 택하 고 국지적/전역적 최적화를 교대로 반복 적용함으 로써 해를 손쉽고 빠르게 구하였다. 물체의 최종 변형은 방향성 입자들의 강체 변환을 선형 혼합 스키닝하여 빠르게 얻을 수 있다. 제안된 방법은 방향성 입자를 이용한 형상 맞춤 기법에서와 달리 변형의 강성이 반복 횟수나 시뮬레이션 시간 간격 에 의존적이지 않다. 또한 위치와 방향뿐만 아니라 부피가 있는 타원체 입자를 사용하기 때문에 선형 적으로 연결되어 있는 변형 그래프에서도 안정적인 시뮬레이션이 가능하다.

A. 부록

타원체 e_i 에 대한 타원체 e_j 의 변형 에너지 E_{ij} 를 계산해 보자.

$$E_{\!ij} = \int_{e_j} \! \|R_i(\bar{x} - \bar{x}_i) - (x - x_i)\|^2 dx \, .$$

벡터 놈에 관한 정의에 따라
$$E_{ij}$$
를 전개하자.

$$\begin{split} E_{ij} &= \int_{e_j} (\overline{x} - \overline{x}_i)^T (\overline{x} - \overline{x}_i) dx - 2 \int_{e_j} (\overline{x} - \overline{x}_i)^T R_i^T (x - x_i) dx \\ &+ \int_{e_i} (x - x_i)^T (x - x_i) dx \,. \end{split}$$

적분 항의 계산을 위해 다음 성질들을 이용하자. $\int_{e_j} x dx = v_j x_j, \qquad \int_{e_j} x^T x dx = tr(\sqrt{A_j}^T \sqrt{A_j}) + v_j x_j^T x_j,$ $\int_{e_j} \overline{x}^T R_i^T x dx = tr(\sqrt{A_j}^T E_j^T R_i \overline{E_j} \sqrt{A_j}) + v_j \overline{x}_j^T R_i^T x_j. \quad O \mid A$ $E_{ij} \leftarrow \Gamma \triangleq \mu \quad \nleftrightarrow O \mid A \to C \cap A$

$$\begin{split} E_{ij} &= tr(\sqrt{A_j}^T\sqrt{A_j}) + v_j(\overline{x}_j - \overline{x}_i)^T(\overline{x}_j - \overline{x}_i) \\ &+ 2tr(\sqrt{A_j}^T\overline{E}_j^TR_i^TE_j\sqrt{A_j}) - 2v_j(\overline{x}_j - \overline{x}_i)^TR_i^T(x_j - x_i) \\ &+ tr(\sqrt{A_j}^T\sqrt{A_j}) + v_j(x_j - x_i)^T(x_j - x_i). \end{split}$$

행렬의 대각합 항들과 벡터 내적 항들을 각각 정 리하면 다음과 같다.

$$\begin{split} E_{ij} &= tr(\left[R_i\overline{E_j}\sqrt{A_j} - E_j\sqrt{A_j}\right]^T \left[R_i\overline{E_j}\sqrt{A_j} - E_j\sqrt{A_j}\right]) \\ &+ v_j \|R_i(\overline{x_j} - \overline{x_i}) - (x_j - x_i)\|^2. \end{split}$$

프로베니우스 놈에 관한 성질 $tr(M^T M) = ||M||_F^2$ 을 이용하면 E_{ij} 는 다음과 같이 정리된다. $E_{ij} = ||R_i \overline{E}_i \sqrt{A_j} - E_j \sqrt{A_j}||_F^2 + m_j ||R_i (\overline{x}_j - \overline{x}_j) - (x_j - x_j)||^2.$

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the National Research Foundation of Korea (NRF) grant funded by the Korean Government (NRF-2014R1A1A1008486) and the Research Grant of Kwangwoon University in 2015. - As-Rigid-As-Possible Dynamic Deformation with Oriented Particles -

REFERENCES

- M. Müller, B. Heidelberger, M. Hennix, and J. Ratcliff, "Position based dynamics," Journal of Visual Communication and Image Representation, Vol. 18, pp. 109–118, 2007.
- [2] M. Müller, B. Heidelberger, M. Teschner, and M. Gross, "Meshless deformations based on shape matching," ACM Transactions on Graphics, Vol. 24, No. 3, pp. 471 - 478, 2005.
- [3] A. R. Rivers and D. L. James, "FastLSM: fast lattice shape matching for robust real-time deformations", Vol 26, No. 3, Article 82, 2007.
- [4] M. Müller and N. Chentanez, "Solid simulation with oriented particles", ACM Transactions on Graphics, Vol. 30, No. 4, Article 92, 2011.
- [5] S. Bouaziz, S. Martin, T. Liu, L. Kavan, and M. Pauly, "Projective dynamics: fusing constraint projections for fast simulation," ACM Transactions on Graphics, Vol. 33, No. 4, Article 154, 2014.
- [6] T. Liu, A. W. Bargteil, J. F. O'Brien, and L. Kavan, "Fast simulation of mass-spring systems," ACM Transactions on Graphics, Vol. 32, No. 6, Article 214, 2013.
- [7] R. Narain, M. Overby, and G. E. Brown, "ADMM⊇ projective dynamics: fast simulation of general constitutive models," Proc. ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation 2016, pp. 21-28, 2016.
- [8] R. W. Sumner, J. Schmid, and M. Pauly, "Embedded deformation for shape manipulation," ACM Transactions on Graphics, Vol. 26, No. 3, Article. 80, 2007.
- [9] D. Terzopoulos and K. Fleischer, "Modeling inelastic deformation: viscoelasticity, plasticity, fracture", Computer Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH), Vol. 22, No. 4, pp. 269–278, 1988.
- [10] A. Nealen, M. Müller, R. Keiser, E. Boxerman, and M. Carlson, "Physically based deformable models in computer graphics", Computer Graphics Forum, Vol. 25, No. 4, pp. 809–836, 2006.

- [11] J. Bender, D. Koschier, P. Charrier, and D. Weber, "Position-based simulation of continuous materials", Computers and Graphics. Vol. 44, pp. 1–10, 2014.
- [12] M. Müller, N. Chentanez, T. Y. Kim, and M. Macklin, "Strain based dynamics", Proc. ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation 2014, pp. 149–157, 2014.
- [13] M. Macklin and M. Müller, "Position based fluids", ACM Transactions on Graphics, Vol. 32, No. 4, Article 104, 2013.
- [14] M. Macklin, M. Müller, N. Chentanez, and T. Y. Kim, "Unified particle physics for real-time applications", ACM Transactions on Graphics, Vol. 33, No. 4, Article 153, 2014.
- [15] M. Macklin, M. Müller, and N. Chentanez, "XPBD: Position-based simulation of compliant constrained dynamics", Proc. ACM Motion in Games 2016, pp. 49–54, 2016.
- [16] H. Wang, "A Chebyshev semi-iterative approach for accelerating projective and position-based dynamics," ACM Transactions on Graphics, Vol. 34, No. 6, Article 246, 2015.
- [17] T Liu, S. Bouaziz, and L. Kavan, "Towards real-time simulation of hyperelastic materials", arXiv preprint arXiv, 1604.07378, 2016.
- [18] O. Sorkine and M. Alexa, "As-rigid-aspossible surface modeling", Proc. Eurographics Symposium on Geometry Processing 2007, pp. 109–116, 2007.
- [19] S. Umeyama, "Least-squares estimation of transformation parameters between two point patterns," IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 13, No. 4, pp. 376 - 380, 1991.

최민규(Choi, Min Gyu)



약 력 : 1996년 한국과학기술원 전산학과 학사 1998년 한국과학기술원 전산학과 석사 2003년 한국과학기술원 전산학과 박사 2003년 - 2005년 서울대학교 박사후 연구원 2005년 - 현재 광운대학교 컴퓨터과학과 교수

관심분야 : 물리기반 모델링 및 시뮬레이션, 게임 물리, 캐릭터 애니메이션