The Korean Journal of Applied Statistics (2017) DOI: https://doi.org/10.5351/KJAS.2017.30.3.427
30(3), 427–439

Nonparametric method using linear statistics in analysis of covariance model

Yoonjung Choi[a] · Dongjae Kim[a,1]

[a]Department of Biomedicine · Health Science, The Catholic University of Korea

(Received March 8, 2017; Revised April 26, 2017; Accepted April 26, 2017)

Abstract

Quade (1967) proposed RANK ANCOVA, which is a nonparametric method to test differences between treatments when there are covariates. Hwang and Kim (2012) also proposed a joint placement test on covariate-adjusted residuals. In this paper, we proposed a new nonparametric method to control the effect of covariate on a response variable that uses linear statistics on covariate adjusted-residuals. The score function used in the linear statistics was proposed by Jeon and Kim (2016). Monte Carlo simulation is also conducted to compare the empirical powers of the proposed method with previous methods.

Keywords: analysis of covariance, nonparametric method, covariate adjusted-residuals, linear statistics

1. 서론

고혈압 신약을 개발하는 임상시험에서 고혈압 환자들에게 위약, 활성대조약, 신약을 처방하였다. 연구자는 순수한 처리 간 효과에 차이가 있는지를 보고자 했지만 나이와 체중도 혈압 측정값에 영향을 줄 것으로 예상되었다. 분산분석이 필요한 실험계획에서 관심 있는 독립변수는 아니지만 반응변수의 모평균에 영향을 줄 가능성이 있는 또 다른 독립변수가 존재할 때, 이를 고려하지 않으면 통계분석의 오차가 커질 수 있다. 이러한 독립변수가 연속형인 경우를 공변량(covariate)이라 하며, 공변량이 유의하다면 단순히 처리 간 차이 뿐 아니라 그 영향이 보정(adjust)된 처리 간 반응변수의 보정된 모평균을 비교하는 공분산분석을 시행하는 것이 추정의 정확도를 높일 수 있다 (Lee, 2005).

공변량이 있는 경우 처리 간 효과 차이의 유무를 검정하는 기존 방법들은 다음과 같다. 먼저 공분산분석(analysis of covariance)은 가장 대표적인 모수적 방법으로 회귀분석과 분산분석이 결합된 형태이다. RANK ANCOVA는 Quade (1967)가 제안한 비모수적 방법으로 공변량과 반응변수 각각에서 순위를 매긴 후 보정된 순위를 구하고 이에 대해 회귀분석과 분산분석을 차례로 시행한다. 순위를 사용하는 비모수적 방법은 모수적 방법에서 필요로 하는 가정들이 위배되는 경우에 효과적이다. 다음은 잔차(covariate-adjusted residual)을 이용한 방법들로, 여기서 잔차는 처리 구분 없이 반응변수에 대해 공변량으로 단순선형회귀분석을 시행하여 구한다. 잔차는 처리 별 공변량 효과와 평균이 동일한 경우에 공변량 효과가 보정된 관측값으로 볼 수 있으며, 그 자체를 이용하여 처리 간 효과의 차이를 검정하는

[1]Corresponding author: Department of Biomedicine · Health Science, The Catholic University of Korea, 222 Banpo-dero Seocho-gu, Seoul 06591, Korea. E-mail: djkim@catholic.ac.kr

기존 검정법들을 적용시킬 수 있다. 잔차를 이용한 기존 방법은 세 가지이다. 첫 번째는 잔차를 이용한 ANOVA검정법으로, 오차항이 정규성 및 등분산성을 따른다는 가정 하에서 처리 별 공변량 평균의 차이가 작을수록 공분산분석법과 검정력이 비슷하다고 알려져있다 (Ceyhan과 Goad, 2009). 두 번째는 잔차를 이용한 Kruskal-Wallis 검정법(K-W검정법)이다 (Kruskal과 Wallis, 1952). 잔차에 K-W검정법을 적용시킨 방법으로 잔차에 대해 처리 구분 없이 매긴 통합순위를 이용한다. 여기서 K-W검정법은 Mann-Whitney의 U통계량을 확장한 것이며 비교 그룹이 3개 이상일 때 그룹 간 효과 차이를 검정하는 비모수적 검정법이다. 마지막으로 잔차를 이용한 결합위치(joint placement)검정법은 Hwang과 Kim (2012)이 제안한 방법이다. 여기서 결합위치검정법은 세 군 이상의 처리들 중 특정 처리군에 속한 잔차값들과 그 처리군을 제외한 나머지 처리군들에 속한 잔차값들에 대한 상대적 위치정보를 이용하는 검정법이다. 표본 크기가 큰 처리의 효과가 표본 크기가 작은 처리의 처리 효과보다 클 때 효율적이며 처리 별 표본크기가 동일한 경우, K-W의 검정법과 동일하다.

본 논문에서는 Jeon과 Kim (2016)이 제안한 점수함수를 이용한 선형위치통계량을 잔차(covariate adjusted-residual)에 적용하여 공분산분석의 새로운 비모수적 검정법을 제안하고 검정통계량의 근사분포를 제시하였다. 처리 별 표본크기가 같을 때 잔차를 이용한 결합위치검정법이 잔차를 이용한 K-W검정법과 동일하며 기각역의 표본크기와 처리 수가 제한적이라는 한계점을 보완하기 위해 제안하였으며, Monte-Carlo simulation을 통해 제안방법과 기존의 모수적 방법인 공분산분석법(ANCOVA), 잔차를 이용한 ANOVA 검정법, 그리고 비모수적 방법인 RANK ANCOVA 검정법, 잔차를 이용한 K-W검정법, 잔차를 이용한 결합위치 검정법의 제 1종 오류 제어 정도와 검정력(power)을 비교하였다.

2. 기존 방법

2.1. 모형

하나의 공변량(X)이 있고 처리의 수가 k개인 공분산분석의 모형은 다음과 같다.

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta X_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad (i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, n_i),$$

여기서 Y_{ij}는 i번째 처리에서의 j번째 반응변수값, μ는 반응변수에 대한 미지의 전체평균, τ_i는 i번째 처리효과, β는 모든 처리에 공통적으로 작용하는 공변량 효과를 나타내는 회귀계수, X_{ij}는 i번째 처리의 j번째 공변량값이며 ϵ_{ij}는 오차항이다. 모수적 방법인 공분산분석을 시행하기위해 만족되어져야하는 가정에는 두 가지가 있다. 첫 번째는 오차항인 ϵ_{ij}가 등분산을 갖는 정규분포를 따른다는 것이고 두 번째는 공변량 X가 각 처리에 미치는 영향이 동일해야 한다는 것이다. 두 번째 가정은 공변량과 처리 간 교호작용에 대한 검정으로 가정이 만족되는지 알 수 있다.

공분산분석에서 각 처리의 효과가 모두 동일하다는 귀무가설과 그에 대한 일반 대립가설은 다음과 같다.

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k \quad \text{vs.} \quad H_1 : \tau_i\text{들이 모두 같지는 않다.}$$

2.2. RANK ANCOVA

Quade (1967)에 의하여 제안된 순위를 이용한 공분산분석은 순위를 이용한 방법이다. 공변량(X)의 순위평균으로 보정된 순위행렬을 C, 반응변수(Y)의 순위평균으로 보정된 순위행렬을 U라 하자. $\hat{U}$는 U에 대하여 C로 단순회귀를 시행하여 얻은 예측값의 행렬이며 그 식은 다음과 같다.

$$\hat{U} = C(C'C)^{-1}C'U.$$

$Z = U - \hat{U}$를 반응값 행렬과 예측값 행렬 간의 잔차행렬이라 할 때, 위에서 언급했던 각 처리 별 효과가 모두 동일하다는 귀무가설을 검정하기 위한 검정통계량은 다음과 같다.

$$\mathrm{VR} = \frac{(N-k)\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij}\right)^2 \Big/ n_i}{(k-1)\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij}\right)^2 \Big/ n_i\right]}.$$

검정통계량 VR은 근사적으로 자유도 $(k-1, N-k)$인 F분포를 따른다. 이 때 기각역은 $F_\alpha(k-1, N-k)$로 자유도가 $(k-1, N-k)$인 F분포의 상위 100α 백분위수이다.

2.3. 잔차를 이용한 방법

반응변수 Y에 대하여 공변량 X로 단순회귀분석을 시행하면 다음의 식을 통해 예측값 행렬 $\hat{Y}$를 구할 수 있다.

$$\hat{Y} = X(X'X)^{-1}X'Y$$

그리고 이를 이용하여 반응변수와 예측값의 행렬 간 잔차행렬 $R = Y - \hat{Y}$를 구할 수 있다. 이 때 R_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, n_i)$를 i번째 처리에서 j번째 관측치의 잔차값이라 하자. 이는 처리 별 공변량 효과와 평균이 동일할 때 공변량 효과를 보정한 반응변수값 의미를 가지며, 그 자체가 관측값이 될 수 있다 (Ceyhan과 Goad, 2009). 이 잔차 자체를 관측값으로 사용한 방법들은 다음과 같다.

2.3.1. 잔차를 이용한 분산분석법 이 방법은 공변량이 있는 경우 처리 간 효과차이 유무를 검정하는 또 다른 모수적 방법이다. 위에서 언급했듯이 잔차값은 공변량 효과를 보정한 반응변수값의 의미를 가지므로 잔차를 반응변수로 이용하는 분산분석법은 처리 간 공변량 효과가 보정된 반응변수값의 차이 유무를 검정하는 것과 같다. 따라서 이 잔차값 R_{ij}에 일원배치분산분석의 모형을 적용하면 다음과 같다.

$$R_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}, \quad (i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, n_i),$$

여기서 μ는 잔차의 전체 평균, τ_i는 i번째 처리효과, ϵ_{ij}는 오차항으로 평균이 0이고 등분산을 가지는 정규분포를 따른다. 분산분석에서는 반응변수의 총 제곱합을 변동요인에 따른 제곱합으로 분할하여 관측값 변동에 주된 영향을 미치는 요인을 밝혀내므로 잔차에 대해 이를 적용해보면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(R_{ij} - \overline{R})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{R_{i\cdot}} - \overline{R})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(R_{ij} - \overline{R_{i\cdot}})^2,$$

여기서 $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(R_{ij} - \overline{R})^2$는 총 제곱합(total sum of squares; TSS), $\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{R_{i\cdot}} - \overline{R})^2$는 처리제곱합(treatment sum of squares; SST), $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(R_{ij} - \overline{R_{i\cdot}})^2$는 오차제곱합(error sum of squares; SSE)이다. 처리제곱합과 오차제곱합을 각각 그들의 자유도로 나눈 처리평균제곱합(mean square of treatments; MST)과 오차평균제곱합(mean square of error; MSE)은 MST = SST$/(k-1)$, MSE = SSE$/(N-k)$이며 귀무가설 $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k$과 일반 대립가설 $H_1 : \tau_i$들이 모두 같지는 않다를 검정하기 위한 검정통계량은 다음과 같다.

$$F_R = \frac{\mathrm{MST}}{\mathrm{MSE}} \sim F(k-1, N-k).$$

이 때 검정통계량 F_R은 자유도 $(k-1, N-k)$인 F분포를 따르며 이 때 기각역은 $F_\alpha(k-1, N-k)$로 자유도가 $(k-1, N-k)$인 F분포의 상위 100α백분위수이다.

2.3.2. 잔차를 이용한 Kruskal-Wallis 검정법 잔차를 이용한 K-W검정법은 모든 처리의 잔차값을 합친 혼합표본에서 R_{ij}의 순위인 I_{ij}를 사용한다. 귀무가설 $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k$과 일반 대립가설 $H_1 : \tau_i$들이 모두 같지는 않다를 검정하기 위한 검정통계량 H_R은 다음과 같다.

$$H_R = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{I_{i\cdot}^2}{n_i} - 3(N+1).$$

이 때 기각역은 $H_R \geq h\ (\alpha, k, (n_1, \ldots, n_k))$이며 이는 K-W통계량 분포표에서 찾을 수 있다. 또한 검정통계량 H_R은 각 처리에서의 표본크기가 충분히 클 때, 근사적으로 자유도가 $k-1$인 χ^2분포를 따르며 이 때 기각역은 $H_R \geq \chi^2_\alpha(k-1)$이다. 여기서 $\chi^2_\alpha(k-1)$은 자유도가 $k-1$인 χ^2분포의 상위 100α백분위수이다.

2.3.3. 잔차를 이용한 결합위치 검정법 Hwang과 Kim (2012)는 공분산분석을 위한 비모수적 방법으로 위와 동일한 방식으로 구한 잔차를 결합위치에 적용하였다. i번째 처리의 j번째 잔차에 대한 결합위치 V_{ij}는 다음과 같다.

$$V_{ij} = \frac{1}{N - n_i} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{k} \sum_{s=1}^{n_h} \chi(R_{hs}, R_{ij}), \quad \chi(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

V_{ij}는 모든 처리를 합친 혼합표본에서 관측값 R_{ij}에 대하여 i번째 처리의 관측값을 제외한 후, R_{ij}보다 작거나 같은 관측값의 개수의 비중의 의미를 가진다. 이를 이용한 귀무가설 $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k$를 검정하기 위한 검정통계량은 다음과 같다.

$$\mathrm{JP} = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{V_{i\cdot}} - \overline{V_{\cdot\cdot}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{V_{i\cdot}^2}{n_i} - N\overline{V_{\cdot\cdot}}^2,$$

여기서 $\overline{V_{i\cdot}}$는 V_{ij}의 처리 별 평균, $\overline{V_{\cdot\cdot}}$는 V_{ij}의 전체 평균이며 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\overline{V_{i\cdot}} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} V_{ij}; \qquad \overline{V_{\cdot\cdot}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} V_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i \overline{V_{i\cdot}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} V_{i\cdot}$$

검정통계량 JP는 귀무가설 하에서 $\overline{V_{i\cdot}}$가 $\overline{V_{\cdot\cdot}}$에 가까워질 것으로 기대되기 때문에 값이 작을수록 귀무가설이 참일 가능성이 커진다. 검정통계량 JP의 기각역은 JP $\geq jp(\alpha, k, (n_1, \ldots, n_k))$이며 여기서 $jp(\alpha, k, (n_1, \ldots, n_k))$는 $P_0[jp(\alpha, k, (n_1, \ldots, n_k))] = \alpha$를 만족하는 상수이다. 처리 수가 3–4개이고 각 처리 별 표본 수가 5개 이하인 경우의 기각역은 Chung과 Kim (2007)의 논문에서 볼 수 있다. 결합위치검정법은 각 처리 별 표본크기가 동일할 때 K-W검정법과 같으므로, 잔차를 이용한 결합위치 검정법도 잔차를 이용한 K-W 방법과 같은 검정법이 된다.

3. 제안하는 방법

본 논문에서 제안하는 방법은 위와 동일한 방법으로 구한 잔차를 이용한 결합위치에 선형위치통계량을 적용하는 것이다. Chung과 Kim (2007)이 제안한 결합위치에 대한 선형위치통계량은 다음과 같이 정의된다.

$$S_N = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \phi\left(V_{ij}\right),$$

여기서 $\phi(\bullet)$은 $[0,1]$의 범위에서 정의된 실수값을 가지는 점수함수(score function)이다. 본 논문에서는 Jeon과 Kim (2016)이 제안한 점수함수인 $\phi(x) = |1-2x|$를 고려한다. 결합위치(V_{ij})는 귀무가설에 가까울수록 1/2에 가까운 값을 가진다. 따라서 $|1-2V_{ij}|$는 귀무가설이 참일수록 0에 가깝도록, 거짓일수록 1에 가깝도록 만들어진 점수함수이다. 이 점수함수를 이용한 선형위치통계량은 다음과 같다.

$$S_N^{\phi} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} |1-2V_{ij}|\,.$$

Hong과 Lee (2014)에 의하여 귀무가설 하에서 각각의 i에 대하여 $N\to\infty$, $n_i/N \to \lambda_i$ $(0<\lambda_i<1)$이면 표준화된 통계량 $\hat{S}_N$의 분포는 표준정규분포로 수렴하게 된다. 즉,

$$\hat{S}_N = \frac{S_N - E\left(S_N\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(S_N\right)}} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} N(0,1)$$

이다. 따라서 이를 본 논문에서 제시한 점수함수를 이용한 선형위치통계량에 적용하면 귀무가설 하에서 검정통계량 S_N^{ϕ}의 근사분포는 다음과 같다.

$$\hat{S_N^{\phi}} = \frac{S_N^{\phi} - E\left(S_N^{\phi}\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(S_N^{\phi}\right)}} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} N(0,1)$$

$E[\sum_{j=1}^{n_i}|1-2V_{ij}|]$은 귀무가설 하에서 다음과 같다.

$$E\left[\sum_{j=1}^{n_i}|1-2V_{ij}|\right] = \begin{cases} \dfrac{n_i(N-n_i+2)}{2(N-n_i+1)}, & N-n_i \text{ 짝수일 때}, \\ \dfrac{n_i(N-n_i+1)}{2(N-n_i)}, & N-n_i \text{ 홀수일 때}. \end{cases}$$

S_N^{ϕ}의 기대값은 각각의 n_i에 따라 $N-n_i$가 짝수와 홀수로 달라지므로 위 식을 이용하여 구할 수 있다. 또한 S_N^{ϕ}의 분산은 임의의 n_i와 k에 대해서는 구체적인 식으로 표현할 수 없고, 특정 n_i와 k에 대해서는 계산할 수 있다.

4. 예제

나병환자의 치료법을 연구하기 위하여 새로 개발된 2가지 약과 기존의 약의 효과를 비교하고자 각 치료약에 나병환자를 랜덤하게 배정하였다. 각 환자는 치료약을 투입하기 전에 먼저 몸 안에 있는 나병균의 실제 수를 측정하고, 치료 후 다시 나병균수를 측정하였다. 이 때 X는 실험하기 전의 나병균의 수, Y는 실험 후의 나병균의 수라고 하자. 이와 같은 임상시험에서 치료 전의 나병균 수는 치료 후의 세균 수에 영향을 줄 가능성이 있으므로, 치료 전 세균수를 공변량으로 포함시켜 분석하는 것이 바람직하다 (Lee, 2005) (Table 4.1).

$$S_N^{\phi} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}|1-2V_{ij}| = 0.572+0.858+0.714+\cdots+0.4+1+1 = 9.07,$$

$$E(S_N^{\phi}) = \frac{4(18-4+2)}{2(18-4+1)} + \frac{6(18-6+2)}{2(18-6+1)} + \frac{10(18-8+2)}{2(18-8+1)} = 9.728; \quad \operatorname{Var}(S_N^{\phi}) = 0.522,$$

$$\hat{S}_N^{\phi} = \frac{S_N^{\phi} - E\left(S_N^{\phi}\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(S_N^{\phi}\right)}} = \frac{9.07-9.728}{\sqrt{0.522}} = -0.911.$$

Table 4.1. Example

Group	X(치료전)	Y(치료후)	R_{ij}(잔차)	결합위치	V_{ij}	$\|1-2V_{ij}\|$
A	11	6	-1.89	3	0.214	0.572
	8	0	-3.88	1	0.071	0.858
	5	2	2.12	12	0.857	0.714
	14	8	-3.89	1	0.071	0.858
B	6	0	-1.21	6	0.500	0.000
	6	2	0.79	7	0.667	0.334
	7	3	0.45	7	0.583	0.166
	8	1	-2.88	3	0.250	0.500
	18	18	0.76	8	0.667	0.334
	8	4	0.12	8	0.667	0.334
C	16	13	-1.56	4	0.400	0.200
	13	10	-0.56	5	0.500	0.000
	11	18	10.11	10	1.000	1.000
	9	5	-0.22	5	0.500	0.000
	21	23	1.76	9	0.900	0.800
	16	12	-2.56	3	0.300	0.400
	12	5	-4.22	0	0.000	1.000
	12	16	6.78	10	1.000	1.000

따라서, 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 점수함수를 이용한 선형위치통계량의 절대값 0.911이 기각역인 $z_{0.025} = 1.96$보다 작아, 귀무가설을 기각하지 않는 결과를 나타낸다.

5. 모의실험 및 결과

[t!]

본 논문에서는 제안방법인 공분산분석에서 선형위치통계량을 이용한 검정법과 모수적, 비모수적인 기존의 검정법들의 제 1종 오류 제어 정도와 검정력을 비교하였다. 비교한 기존 방법들 중 모수적인 방법으로는 공분산분석법(ANCOVA)과 처리 구분 없이 단순선형회귀를 통해 구한 잔차(adjusted-residual)에 분산분석을 적용한 방법(R_ANOVA)이 있고 비모수적인 방법으로는 Quade (1967)가 제안한 RANK ANCOVA검정법과 잔차에 Kruskal-Wallis검정법을 적용한 방법(R_KW), 그리고 Hwang과 Kim (2012)이 제안한 잔차에 결합위치를 적용한 방법(R_JP)가 있다. 모집단의 분포는 정규분포, 지수분포, Cauchy분포, 이중지수분포를 고려하였다. 공변량은 한 개인 경우만 고려하였으며 연속형 변수임을 고려하여 난수는 정규분포에서 추출하였고 공변량 효과를 나타내는 회귀계수 β는 1로 고정하였다. 모의실험을 위한 프로그램은 SAS를 사용하였고 정규분포는 RANNOR함수, 지수분포는 RANEXP함수, Cauchy분포는 RANCAU함수, 그리고 이중지수분포는 RANUNI함수에 대해 역변환 방법을 적용하여 난수를 생성하였다. 유의수준 α는 0.05로 설정하였다.

처리 수는 3개, 6개인 경우, 각 처리별 표본크기는 모두 같은 경우와 모두 다른 경우, 소표본인 경우와 대표본인 경우를 고려하였다. 각 처리 별 표본크기가 동일한 경우에는 R_K-W검정법이 R_JP검정법의 통계량과 동일하기 때문에 R_KW검정법만 살펴보았다. 유의수준 α를 0.05로 보정하기 위해 확률화 검정을 실시하였으며 위와 같은 조건 하에서 각 검정법들에 대한 검정력을 비교하기 위하여 10,000번의 검정을 시행하는 Monte Carlo 모의실험을 실시하였다. 모의실험 결과는 처리가 3개이고 처리 별 표본크기가 모두 다른 경우는 Table 5.1, 처리 별 표본크기가 모두 같은 경우는 Table 5.2, 처리가 6개이고

Table 5.1. Monte Carlo power estimates: $\alpha = 0.05$, $k = 3$, unequal sample size

DIST	n_1	n_2	n_3	τ_1	τ_2	τ_3	ANC	RANC	rANO	rKW	JP	P
Normal	7	9	11	0	0	0	0.0500	0.0495	0.0498	0.0448	0.0498	0.0496
				0	0	1	0.5409	0.4857	0.5392	0.4996	0.5587	0.4865
				0	0.5	1.5	0.7619	0.6982	0.7602	0.7193	0.7504	0.6390
				1	0	1.5	0.7941	0.7304	0.7925	0.7528	0.7971	0.6957
				1	1	0	0.5397	0.4843	0.5386	0.4985	0.5580	0.4918
				1	1.5	0	0.8126	0.7520	0.8051	0.7719	0.8201	0.7450
				0	1	0	0.5081	0.4504	0.5091	0.4681	0.4921	0.3968
	15	17	19	0	0	0	0.0498	0.0519	0.0499	0.0474	0.0481	0.0494
				0	0	1	0.9773	0.9602	0.9765	0.9697	0.9712	0.9154
				0	0.5	1.5	0.9722	0.9519	0.9718	0.9634	0.9655	0.9140
				1	0	1.5	0.9788	0.9622	0.9770	0.9707	0.9725	0.9270
				1	1	0	0.8496	0.8039	0.8493	0.8268	0.8419	0.7579
				1	1.5	0	0.9822	0.9667	0.9821	0.9740	0.9788	0.9427
				0	1	0	0.8296	0.7776	0.8285	0.8019	0.8026	0.6759
Exponential	7	9	11	0	0	0	0.0428	0.0457	0.0421	0.0429	0.0484	0.0488
				0	0	1	0.5948	0.6219	0.5937	0.7291	0.7761	0.7763
				0	0.5	1.5	0.7911	0.8079	0.7865	0.8732	0.8925	0.8778
				1	0	1.5	0.5026	0.8037	0.7986	0.8557	0.8848	0.8268
				1	1	0	0.5898	0.5947	0.5855	0.6763	0.7287	0.6334
				1	1.5	0	0.8045	0.8258	0.8041	0.8806	0.9086	0.9066
				0	1	0	0.5628	0.5824	0.5596	0.6913	0.7177	0.7518
	15	17	19	0	0	0	0.0461	0.0475	0.0454	0.0459	0.0467	0.0543
				0	0	1	0.8543	0.8995	0.8523	0.9667	0.9704	0.9646
				0	0.5	1.5	0.9639	0.9812	0.9629	0.9955	0.9960	0.9937
				1	0	1.5	0.9644	0.9770	0.9636	0.9925	0.9939	0.9778
				1	1	0	0.6573	0.6810	0.6559	0.7282	0.7328	0.6666
				1	1.5	0	0.9682	0.9791	0.9683	0.9940	0.9948	0.9902
				0	1	0	0.8382	0.8832	0.8369	0.9663	0.9654	0.9688
Cauchy	7	9	11	0	0	0	0.0231	0.0515	0.0219	0.0449	0.0489	0.0481
				0	0	1	0.0481	0.1599	0.0464	0.1323	0.1530	0.1806
				0	0.5	1.5	0.0676	0.2227	0.0681	0.1775	0.1934	0.2239
				1	0	1.5	0.0734	0.2309	0.0721	0.1882	0.2140	0.2460
				1	1	0	0.0493	0.1573	0.0489	0.1315	0.1519	0.1785
				1	1.5	0	0.0726	0.2354	0.0718	0.1955	0.2282	0.2712
				0	1	0	0.0426	0.1377	0.0426	0.1133	0.1243	0.1379
	15	17	19	0	0	0	0.0172	0.0484	0.0173	0.0446	0.0438	0.0483
				0	0	1	0.0517	0.2518	0.0512	0.2191	0.2284	0.2959
				0	0.5	1.5	0.0725	0.3921	0.0731	0.3267	0.3354	0.4006
				1	0	1.5	0.0728	0.3929	0.0726	0.3262	0.3361	0.4081
				1	1	0	0.0486	0.2637	0.0491	0.2166	0.2245	0.2885
				1	1.5	0	0.0747	0.3997	0.0749	0.3306	0.3445	0.4353
				0	1	0	0.0473	0.2466	0.0473	0.2060	0.2058	0.2478
Double Exponential	7	9	11	0	0	0	0.0453	0.0484	0.0456	0.0447	0.0495	0.0500
				0	0	1	0.3280	0.3412	0.3266	0.3615	0.4138	0.4408
				0	0.5	1.5	0.4904	0.5088	0.4861	0.5410	0.5731	0.5569
				1	0	1.5	0.5227	0.5310	0.5157	0.5591	0.6094	0.6046
				1	1	0	0.3271	0.3442	0.3274	0.3644	0.4146	0.4379
				1	1.5	0	0.5335	0.5457	0.5330	0.5763	0.6376	0.6587
				0	1	0	0.3036	0.3155	0.3056	0.3341	0.3559	0.3337
	15	17	19	0	0	0	0.0450	0.0482	0.0450	0.0425	0.0421	0.0519
				0	0	1	0.5618	0.6008	0.5600	0.6648	0.6863	0.7227
				0	0.5	1.5	0.7909	0.8202	0.7905	0.8661	0.8692	0.8651
				1	0	1.5	0.7940	0.8220	0.7927	0.8693	0.8761	0.8780
				1	1	0	0.5573	0.6009	0.5567	0.6622	0.6799	0.7251
				1	1.5	0	0.7974	0.8304	0.7964	0.8740	0.8855	0.9024
				0	1	0	0.5392	0.5829	0.5378	0.6383	0.6367	0.6466

ANC = ANCOVA, RANC = RANK ANCOVA, rANO = 잔차를 이용한 ANOVA,
rKW = 잔차를 이용한 K-W검정법, JP = 잔차를 이용한 결합위치 검정법, P = 제안방법.

Table 5.2. Monte Carlo power estimates: $\alpha = 0.05$, $k = 3$, equal sample size

DIST	n_1	n_2	n_3	τ_1	τ_2	τ_3	ANC	RANC	rANO	rKW	P
Normal	7	7	7	0	0	0	0.0535	0.0542	0.0528	0.0482	0.0457
				0	0	1	0.3707	0.3281	0.3724	0.3305	0.2476
				0	0.5	1.5	0.6221	0.5532	0.6150	0.5697	0.4530
				1	0	1.5	0.6171	0.5429	0.6160	0.5663	0.4360
				1	1	0	0.3890	0.3476	0.3875	0.3532	0.2740
				1	1.5	0	0.6250	0.5473	0.6175	0.5667	0.4323
				0	1	0	0.3958	0.3481	0.3931	0.3563	0.2703
	17	17	17	0	0	0	0.0496	0.0487	0.0498	0.0486	0.0477
				0	0	1	0.8281	0.7797	0.8256	0.8007	0.6656
				0	0.5	1.5	0.9750	0.9544	0.9744	0.9656	0.8896
				1	0	1.5	0.9733	0.9538	0.9730	0.9635	0.8918
				1	1	0	0.8274	0.7847	0.8283	0.8017	0.6615
				1	1.5	0	0.9770	0.9589	0.9777	0.9680	0.8944
				0	1	0	0.8375	0.7851	0.8368	0.8056	0.6694
Exponential	7	7	7	0	0	0	0.0451	0.0496	0.0435	0.0467	0.0451
				0	0	1	0.4526	0.4460	0.4516	0.5302	0.6120
				0	0.5	1.5	0.6702	0.6677	0.6618	0.7430	0.7858
				1	0	1.5	0.6680	0.6491	0.6614	0.7132	0.6270
				1	1	0	0.4548	0.4487	0.4516	0.5051	0.3163
				1	1.5	0	0.6659	0.6540	0.6618	0.7064	0.6176
				0	1	0	0.4486	0.4467	0.4464	0.5299	0.6092
	17	17	17	0	0	0	0.0488	0.0500	0.0495	0.0494	0.0499
				0	0	1	0.8387	0.8852	0.8379	0.9637	0.9640
				0	0.5	1.5	0.9636	0.9830	0.9635	0.9967	0.9962
				1	0	1.5	0.9603	0.9739	0.9601	0.9895	0.9649
				1	1	0	0.8295	0.8544	0.8294	0.9186	0.7175
				1	1.5	0	0.9564	0.9709	0.9565	0.9905	0.9676
				0	1	0	0.8342	0.8809	0.8334	0.9634	0.9597
Cauchy	7	7	7	0	0	0	0.0181	0.0510	0.0179	0.0450	0.0451
				0	0	1	0.0436	0.1187	0.0435	0.0991	0.0972
				0	0.5	1.5	0.0638	0.1800	0.0635	0.1486	0.1464
				1	0	1.5	0.0655	0.1790	0.0667	0.1426	0.1444
				1	1	0	0.0421	0.1242	0.0424	0.0996	0.1012
				1	1.5	0	0.0657	0.1784	0.0639	0.1416	0.1426
				0	1	0	0.0448	0.1236	0.0458	0.1034	0.1001
	17	17	17	0	0	0	0.0195	0.0477	0.0196	0.0491	0.0496
				0	0	1	0.0466	0.2405	0.0464	0.2080	0.2353
				0	0.5	1.5	0.0701	0.3823	0.0715	0.3136	0.3508
				1	0	1.5	0.0661	0.3834	0.0654	0.3184	0.3587
				1	1	0	0.0468	0.2410	0.0473	0.2072	0.2349
				1	1.5	0	0.0734	0.3852	0.0734	0.3202	0.3594
				0	1	0	0.0467	0.2444	0.0470	0.2058	0.2290
Double Exponential	7	7	7	0	0	0	0.0460	0.0534	0.0463	0.0454	0.0457
				0	0	1	0.2381	0.2525	0.2367	0.2529	0.2294
				0	0.5	1.5	0.3804	0.3875	0.3801	0.3962	0.3521
				1	0	1.5	0.3791	0.3853	0.3769	0.3978	0.3501
				1	1	0	0.2387	0.2478	0.2395	0.2597	0.2296
				1	1.5	0	0.3864	0.3960	0.3872	0.4060	0.3530
				0	1	0	0.2329	0.2442	0.2364	0.2536	0.2289
	17	17	17	0	0	0	0.0485	0.0502	0.0479	0.0485	0.0472
				0	0	1	0.5338	0.5751	0.5313	0.6336	0.6225
				0	0.5	1.5	0.7780	0.8087	0.7780	0.8511	0.8254
				1	0	1.5	0.7799	0.8141	0.7782	0.8580	0.8312
				1	1	0	0.5374	0.5762	0.5353	0.6410	0.6281
				1	1.5	0	0.7707	0.8073	0.7686	0.8530	0.8243
				0	1	0	0.5418	0.5806	0.5409	0.6364	0.6216

ANC = ANCOVA, RANC = RANK ANCOVA, rANO = 잔차를 이용한 ANOVA,
rKW = 잔차를 이용한 K-W검정법, P = 제안방법.

Table 5.3. Monte Carlo power estimates: $\alpha = 0.05$, $k = 6$, unequal sample size

DIST	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	ANC	RANC	rANO	rKW	JP	P
Normal	5	7	9	11	13	15	0	0	0	0	0	0	0.0514	0.0517	0.0508	0.0442	0.0486	0.0490
							0	0	0	0	0	1	0.6713	0.6098	0.6716	0.6239	0.7073	0.6531
							0	1	0	1	0	1	0.8085	0.7610	0.8088	0.7758	0.8051	0.6181
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.9532	0.9302	0.9526	0.9368	0.9558	0.8813
							1	0	0	0	0	1	0.7558	0.6987	0.7555	0.7099	0.7605	0.6289
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.9698	0.9488	0.9697	0.9557	0.9608	0.7772
							2	2	1	1	0.5	0	0.9863	0.9722	0.9856	0.9756	0.9791	0.7990
							0	0	1	2	1	0	0.9953	0.9898	0.9951	0.9926	0.9951	0.9328
	10	12	14	16	18	20	0	0	0	0	0	0	0.0497	0.0503	0.0502	0.0453	0.0476	0.0493
							0	0	0	0	0	1	0.8485	0.7968	0.8487	0.8139	0.8589	0.7759
							0	1	0	1	0	1	0.9595	0.9362	0.9591	0.9471	0.9532	0.8325
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.9969	0.9933	0.9971	0.9952	0.9967	0.9699
							1	0	0	0	0	1	0.9335	0.9017	0.9328	0.9153	0.9281	0.7882
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.9988	0.9969	0.9987	0.9977	0.9977	0.9543
							2	2	1	1	0.5	0	1.0000	0.9997	1.0000	0.9996	0.9996	0.9808
							0	0	1	2	1	0	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9916
Exponential	5	7	9	11	13	15	0	0	0	0	0	0	0.0453	0.0493	0.0460	0.0423	0.0483	0.0498
							0	0	0	0	0	1	0.6995	0.7631	0.6991	0.8993	0.9430	0.9719
							0	1	0	1	0	1	0.8215	0.8608	0.8212	0.9383	0.9465	0.7393
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.9322	0.9558	0.9317	0.9840	0.9884	0.9695
							1	0	0	0	0	1	0.7743	0.8362	0.7749	0.9358	0.9532	0.9348
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.9439	0.9657	0.9432	0.9884	0.9897	0.8800
							2	2	1	1	0.5	0	0.9708	0.9879	0.9708	0.9969	0.9972	0.9901
							0	0	1	2	1	0	0.9912	0.9973	0.9907	0.9999	1.0000	0.9991
	10	12	14	16	18	20	0	0	0	0	0	0	0.0484	0.0461	0.0480	0.0420	0.0452	0.0492
							0	0	0	0	0	1	0.8589	0.9185	0.8588	0.9855	0.9917	0.9961
							0	1	0	1	0	1	0.9469	0.9742	0.9474	0.9956	0.9965	0.9190
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.9878	0.9960	0.9879	0.9992	0.9994	0.9960
							1	0	0	0	0	1	0.9280	0.9658	0.9274	0.9958	0.9969	0.9867
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.9953	0.9988	0.9953	0.9993	0.9994	0.9906
							2	2	1	1	0.5	0	0.9992	0.9999	0.9992	1.0000	1.0000	1.0000
							0	0	1	2	1	0	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000
Cauchy	5	7	9	11	13	15	0	0	0	0	0	0	0.0351	0.0468	0.0356	0.0429	0.0491	0.0499
							0	0	0	0	0	1	0.0501	0.1665	0.0506	0.1313	0.1673	0.2323
							0	1	0	1	0	1	0.0552	0.2143	0.0555	0.1731	0.1957	0.2182
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.0632	0.2996	0.0629	0.2353	0.2730	0.3390
							1	0	0	0	0	1	0.0550	0.1903	0.0552	0.1526	0.1793	0.2284
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.0677	0.3237	0.0675	0.2535	0.2740	0.2808
							2	2	1	1	0.5	0	0.0730	0.3586	0.0743	0.2805	0.2972	0.2756
							0	0	1	2	1	0	0.0815	0.4395	0.0826	0.3371	0.3707	0.3886
	10	12	14	16	18	20	0	0	0	0	0	0	0.0221	0.0501	0.0213	0.0455	0.0485	0.0500
							0	0	0	0	0	1	0.0355	0.2264	0.0357	0.1848	0.2108	0.2843
							0	1	0	1	0	1	0.0359	0.3157	0.0363	0.2592	0.2733	0.3169
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.0511	0.4479	0.0509	0.3547	0.3810	0.4504
							1	0	0	0	0	1	0.0361	0.2774	0.0355	0.2291	0.2470	0.2968
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.0540	0.4991	0.0539	0.4041	0.4183	0.4199
							2	2	1	1	0.5	0	0.0584	0.5812	0.0592	0.4595	0.4723	0.4587
							0	0	1	2	1	0	0.0677	0.6188	0.0683	0.4907	0.5086	0.5226
Double Expoenetial	5	7	9	11	13	15	0	0	0	0	0	0	0.0452	0.0468	0.0446	0.0416	0.0481	0.0494
							0	0	0	0	0	1	0.3824	0.4205	0.3823	0.4615	0.5464	0.6120
							0	1	0	1	0	1	0.4874	0.5368	0.4872	0.5880	0.6231	0.6118
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.6902	0.7318	0.6893	0.7814	0.8278	0.8224
							1	0	0	0	0	1	0.4413	0.4826	0.4430	0.5273	0.5806	0.5967
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.7296	0.7717	0.7280	0.8140	0.8297	0.7172
							2	2	1	1	0.5	0	0.7973	0.8261	0.7973	0.8598	0.8712	0.7147
							0	0	1	2	1	0	0.8541	0.8857	0.8533	0.9109	0.9236	0.8536
	10	12	14	16	18	20	0	0	0	0	0	0	0.0424	0.0443	0.0422	0.0413	0.0446	0.0501
							0	0	0	0	0	1	0.5230	0.5762	0.5223	0.6343	0.6952	0.7293
							0	1	0	1	0	1	0.7094	0.7644	0.7080	0.8254	0.8381	0.8248
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.8691	0.9041	0.8690	0.9427	0.9541	0.9442
							1	0	0	0	0	1	0.6507	0.7058	0.6511	0.7694	0.7926	0.7766
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.9178	0.9430	0.9186	0.9658	0.9685	0.9216
							2	2	1	1	0.5	0	0.9587	0.9431	09.588	0.9844	0.9867	0.9452
							0	0	1	2	1	0	0.9689	0.9815	0.9679	0.9901	0.9925	0.9748

ANC = ANCOVA, RANC = RANK ANCOVA, rANO = 잔차를 이용한 ANOVA,
rKW = 잔차를 이용한 K-W검정법, JP = 잔차를 이용한 결합위치 검정법, P = 제안방법.

Table 5.4. Monte Carlo power estimates: $\alpha = 0.05$, $k = 6$, equal sample size

DIST	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	ANC	RANC	rANO	rKW	P
Normal	7	7	7	7	7	7	0	0	0	0	0	0	0.0533	0.0533	0.0535	0.0443	0.0455
							0	0	0	0	0	1	0.3701	0.2962	0.3476	0.2760	0.1689
							0	1	0	1	0	1	0.6175	0.5695	0.6162	0.5658	0.4350
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.7568	0.6919	0.7562	0.6980	0.5203
							1	0	0	0	0	1	0.5690	0.5114	0.5687	0.5095	0.3719
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.8817	0.8318	0.8802	0.8354	0.6594
							2	2	1	1	0.5	0	0.9393	0.9025	0.9380	0.9060	0.7643
							0	0	1	2	1	0	0.9524	0.9166	0.9511	0.9211	0.7535
	17	17	17	17	17	17	0	0	0	0	0	0	0.0498	0.0486	0.0500	0.0445	0.0493
							0	0	0	0	0	1	0.8128	0.7537	0.8116	0.7676	0.5486
							0	1	0	1	0	1	0.9804	0.9662	0.9795	0.9735	0.8852
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.9985	0.9952	0.9985	0.9969	0.9564
							1	0	0	0	0	1	0.9624	0.9433	0.9621	0.9505	0.8268
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	1.0000	0.9993	1.0000	0.9998	0.9882
							2	2	1	1	0.5	0	1.0000	0.9998	1.0000	1.0000	0.9980
							0	0	1	2	1	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9975
Exponential	7	7	7	7	7	7	0	0	0	0	0	0	0.0461	0.0504	0.0465	0.0456	0.0458
							0	0	0	0	0	1	0.3885	0.4097	0.3865	0.4448	0.4405
							0	1	0	1	0	1	0.6455	0.6866	0.6427	0.7831	0.6385
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.7752	0.7982	0.7749	0.8627	0.6946
							1	0	0	0	0	1	0.5875	0.6354	0.5882	0.7430	0.7639
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.8747	0.8927	0.8747	0.9382	0.8555
							2	2	1	1	0.5	0	0.9211	0.9388	0.9215	0.9706	0.9613
							0	0	1	2	1	0	0.9350	0.9543	0.9331	0.9769	0.9151
	17	17	17	17	17	17	0	0	0	0	0	0	0.0453	0.0478	0.0453	0.0423	0.0504
							0	0	0	0	0	1	0.8212	0.8889	0.8202	0.9777	0.9959
							0	1	0	1	0	1	0.9697	0.9878	0.9699	0.9992	0.9733
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.9928	0.9968	0.9929	0.9996	0.9857
							1	0	0	0	0	1	0.9589	0.9843	0.9586	0.9985	0.9932
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.9985	0.9996	0.9985	1.0000	0.9999
							2	2	1	1	0.5	0	0.9997	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000
							0	0	1	2	1	0	0.9999	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000
Cauchy	7	7	7	7	7	7	0	0	0	0	0	0	0.0171	0.0488	0.0170	0.0394	0.0461
							0	0	0	0	0	1	0.0243	0.1002	0.0248	0.0775	0.0805
							0	1	0	1	0	1	0.0292	0.1459	0.0296	0.1144	0.1397
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.0364	0.1877	0.0360	0.1435	0.1649
							1	0	0	0	0	1	0.0298	0.1388	0.0315	0.1091	0.1206
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.0467	0.2400	0.0458	0.1871	0.2020
							2	2	1	1	0.5	0	0.0524	0.2780	0.0533	0.2126	0.2304
							0	0	1	2	1	0	0.0545	0.2890	0.0542	0.2127	0.2323
	17	17	17	17	17	17	0	0	0	0	0	0	0.0163	0.0497	0.0161	0.0454	0.0468
							0	0	0	0	0	1	0.0240	0.2000	0.0235	0.1628	0.1700
							0	1	0	1	0	1	0.0355	0.3680	0.0351	0.2994	0.3484
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.0423	0.4669	0.0424	0.3773	0.4200
							1	0	0	0	0	1	0.0301	0.3185	0.0299	0.2651	0.3050
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.0513	0.5848	0.0514	0.4718	0.5013
							2	2	1	1	0.5	0	0.0548	0.6655	0.0559	0.5292	0.5649
							0	0	1	2	1	0	0.0625	0.6768	0.0628	0.5423	0.5667
Double Expoenetial	7	7	7	7	7	7	0	0	0	0	0	0	0.0455	0.0520	0.0463	0.0415	0.0445
							0	0	0	0	0	1	0.1965	0.2128	0.1991	0.2036	0.1628
							0	1	0	1	0	1	0.3437	0.3697	0.3454	0.3951	0.4098
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.4486	0.4860	0.4477	0.5055	0.4716
							1	0	0	0	0	1	0.3043	0.3281	0.3030	0.3422	0.3421
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.5865	0.6115	0.5861	0.6307	0.5701
							2	2	1	1	0.5	0	0.6611	0.6916	0.6611	0.7120	0.6423
							0	0	1	2	1	0	0.6777	0.7036	0.6772	0.7190	0.6382
	17	17	17	17	17	17	0	0	0	0	0	0	0.0508	0.0527	0.0506	0.0464	0.0495
							0	0	0	0	0	1	0.4803	0.5289	0.4809	0.5896	0.4810
							0	1	0	1	0	1	0.7725	0.8280	0.7723	0.8848	0.8895
							0.5	1.5	1.5	1.5	0.8	0	0.8958	0.9260	0.8957	0.9576	0.9398
							1	0	0	0	0	1	0.7142	0.7655	0.7153	0.8291	0.8125
							2	1.5	1	0	0.5	1.5	0.9633	0.9790	0.9639	0.9893	0.9762
							2	2	1	1	0.5	0	0.9824	0.9931	0.9821	0.9969	0.9895
							0	0	1	2	1	0	0.9828	0.9915	0.9827	0.9973	0.9892

ANC = ANCOVA, RANC = RANK ANCOVA, rANO = 잔차를 이용한 ANOVA,
rKW = 잔차를 이용한 K-W검정법, P = 제안방법.

처리 별 표본크기가 모두 다른 경우는 Table 5.3, 처리 별 크기가 모두 같은 경우는 Table 5.4이다.

검정법들이 제 1종 오류를 잘 제어할 수 있는가를 확인해보면 공분산분석법은 Cauchy분포에서 전체적으로 0.0351 이하의 값을 가지지만 이를 제외한 나머지 분포에서는 처리 수와 처리 별 표본 크기에 관계없이 0.05 근처의 값을 얻어 제 1종 오류를 잘 제어하였다. RANK ANCOVA검정법은 처리가 3개이고 처리 별 표본크기가 같으면서 소표본일 때 정규분포에서 0.0542의 값을 가졌지만 나머지 경우에서는 0.05 근처의 값을 가졌다. R_ANOVA검정법은 같은 모수적 방법인 공분산분석법과 비슷한 맥락으로 Cauchy분포에서 제 1종 오류를 잘 제어하지 못하였다. 또한 처리가 3개이면서 소표본이고 지수분포일 때, 그리고 처리가 6개이면서 처리 별 표본크기가 다르고 대표본인 경우 이중지수분포일 때 0.042에 가까운 값을 가졌고 나머지 경우에서는 대체적으로 0.05에 가까운 값을 가지는 것을 볼 수 있다. R_KW검정법은 처리가 3개이고 처리 별 표본크기가 다르면서 지수분포에서 소표본인 경우와 이중지수분포에서 대표본인 경우, 그리고 처리가 6개이고 처리 별 표본크기가 다를 때 정규분포를 제외한 나머지 분포인 경우, 처리 별 표본크기가 같고 지수분포에서 대표본인 경우, Cauchy분포와 이중지수분포에서 소표본인 경우 0.04에 가까운 값을 가져 제 1종 오류 제어에 어려움이 있다. R_JP검정법은 처리가 3개이면서 처리 별 표본크기가 다르고 Cauchy분포와 이중지수분포에서 대표본인 경우, 그리고 처리가 6개이면서 처리 별 표본크기가 같고 지수분포에서는 대표본, Cauchy분포와 이중지수분포에서는 소표본인 경우에 0.042에 가까운 값을 갖지만 그 외 나머지 경우에서는 0.05에 가까운 값을 가졌다. 마지막으로 본 논문의 제안방법을 살펴보면 처리가 3개이고 처리 별 표본수가 다를 때 지수분포에서 대표본인 경우 0.0543의 값을 가졌지만 이를 제외한 나머지 경우에선 0.05 근처의 값을 가졌다. 전체적으로 모수적 방법들은 대체로 Cauchy분포에서 제 1종 오류를 잘 제어하지 못하고 그 경향이 비슷하며 비모수적 방법 중에서는 RANK ANCOVA와 제안방법이 제 1종 오류를 잘 제어하였다.

이제 검정력을 살펴보면 전체적으로 분포, 처리 수, 검정법, 대립가설 형태가 동일할 때 대표본인 경우가 소표본인 경우보다 검정력이 더 증가하는 경향이 있었다. 정규분포에서는 모수적 방법들인 ANCOVA검정법과 R_ANOVA검정법의 검정력이 가장 높았으며, 특히 ANOCVA검정법이 R_ANOVA검정법과 비슷하거나 더 높았다. 하지만 처리 수에 관계없이, 처리 별 표본크기가 다르고 소표본일 때, 대립가설의 형태에 따라 R_JP검정법이 다른 모수적 검정법들의 검정력보다 더 높았다. 지수분포에서는 처리 별 표본크기가 다른 경우에는 대부분 R_JP검정법, 처리 별 표본크기가 같은 경우에는 R_KW검정법이 가장 높은 검정력을 보였다. 하지만 처리가 3개이고 대립가설의 형태가 완만한 형태를 보이다 마지막 처리에서 증가하는 패턴($\tau_1 = 0, \tau_2 = 0, \tau_3 = 1$), 점점 증가하는 패턴($\tau_1 = 0, \tau_2 = 0.5, \tau_3 = 1.5$), 그리고 가파른 우산형 패턴($\tau_1 = 0, \tau_2 = 1, \tau_3 = 0$)인 경우에는 제안방법의 검정력이 R_JP검정법 또는 R_KW검정법과 비슷하거나 더 높았다. 처리가 6개인 경우에도 처리가 3개인 경우와 비슷하게 대립가설의 형태가 완만하다 마지막 처리에서 증가하는 패턴, 감소하는 계단형 패턴($\tau_1 = 2, \tau_2 = 2, \tau_3 = 1, \tau_4 = 1, \tau_5 = 0.5, \tau_6 = 0$), 그리고 우산형 패턴($\tau_1 = 0, \tau_2 = 0, \tau_3 = 1, \tau_4 = 2, \tau_5 = 1, \tau_6 = 0$)일 때 처리 별 표본 크기가 같고 소표본인 경우를 제외하면 본 논문의 제안방법의 검정력이 R_JP검정법 또는 R_KW검정법과 비슷하거나 더 높았다. Cauchy분포에서는 처리 별 표본크기가 다른 경우, 특히 처리가 3개일 때 제안방법의 검정력이 가장 높았다. 하지만 처리가 6개일 때 대립가설 형태가 아래로 우산형인 패턴($\tau_1 = 2, \tau_2 = 1.5, \tau_3 = 1, \tau_4 = 0, \tau_5 = 0.5, \tau_6 = 1.5$), 감소하는 계단형 패턴에서는 RANK ANCOVA의 검정력이 더 높았다. 처리 별 표본크기가 같은 경우에는 처리 수에 관계없이 RANK ANCOVA의 검정력이 가장 높았고 그 다음으로 제안방법의 검정력이 높았다. 마지막으로 이중지수분포에서 처리 별 표본크기가 다르고 처리가 3개인 경우에는 소표본이고 대립가설 형태가 완만하다 마지막 처리에서 증가하는 패턴에서 R_JP검정법의 검정력이 가장 높았지만 나머지 경우는 제안방법의 검정력이 R_JP검정법과 비슷하거나 더 높았다. 처리가 6개인 경우에는 대립가설 형태가 완만하다 마지막 처리에

서 증가하는 패턴에서 제안방법의 검정력이 가장 높았고 나머지 대립가설의 형태에서는 R_JP검정법의 검정력이 가장 높았다. 처리 별 표본크기가 같은 경우엔 대부분 R_KW검정법의 검정력이 가장 높았다.

6. 결론 및 고찰

본 논문에서는 공분산분석에서 선형위치통계량을 이용한 새로운 비모수적 검정법을 제안하였다. 잔차를 이용한 결합위치검정법이 처리 별 표본크기가 같을 때 잔차를 이용한 K-W검정법과 동일하며 기각역이 제한적이라는 한계점을 보완하기 위함이며, 검정통계량은 반응변수에 미치는 공변량효과를 제어하기 위해 처리에 관계없이 반응변수에 독립변수로 회귀분석을 시행하여 얻은 잔차(covariate adjusted-residual)에 Jeon과 Kim (2016)이 제안한 점수함수를 이용한 선형위치통계량을 적용하여 만들었다. 제안방법과 기존 방법들의 제 1종 오류 정도와 검정력을 비교하기 위해 Monte-Carlo simulation을 시행하였으며 정규분포, 지수분포, Cauchy분포, 이중지수 분포에서 각 검정법을 비교하였다.

모의실험 결과에 따라 본 논문의 제안방법은 대체적으로 처리가 3개일 때 처리 별 표본크기가 다르고 표준정규분포에 비하여 꼬리가 두터운 Cauchy분포와 이중지수분포에서 검정력이 높은 경향을 보였다. 특히 Cauchy분포에서 처리가 3개일 때, 대립가설 형태에 관계없이 기존 검정법들의 검정력보다 높아 유용하다. 또한 Cauchy분포에서 처리 수에 관계없이 처리 별 표본크기가 같은 경우, RANK ANCOVA검정법 다음으로 높은 검정력을 가졌다. 정규분포일 때 제안방법이 가장 낮은 검정력을 보이지만 일반적으로 정규분포를 따르는 자료에는 모수적 방법을 사용하므로 큰 문제가 되지 않는다고 볼 수 있다.

본 논문의 제안방법은 처리 별 표본크기가 같을 때 잔차를 이용한 결합위치검정법이 잔차를 이용한 Kruskal-Wallis 검정법과 동일하다는 한계점 보완과 함께 Cauchy분포에 대해 두 검정법보다 높은 검정력을 보여 그 유용성도 입증하였다고 볼 수 있다. 또한 처리 별 표본크기가 클 때, 검정통계량이 표준정규분포로 수렴하여 기존 결합위치검정법의 기각역이 제한적이라는 한계점을 보완하였다는 점에서 유용한 비모수 검정법이 될 것으로 기대된다. 추후에 결합위치검정법에 대한 연구가 진행된다면 본 논문에서 이용한 점수함수 이외에 처리 별 표본크기가 같은 경우에서도 기존 방법들 중 가장 높은 검정력을 도출할 수 있는 새로운 점수함수를 이용한 선형위치통계량에 대한 연구가 필요할 것으로 생각된다. 또한 이차 함수 형태를 띄는 점수함수를 적용할 수 있을 것으로 보인다.

References

Ceyhan, E. and Goad, C. L. (2009). A comparison of analysis of covariate-adjusted Residuals and analysis of covariance, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **38**, 2019–2038.

Chung, T. and Kim, D. (2007). Nonparametric method using placement in one-way layout, *The Korean Communications in Statistics*, **3**, 552–560.

Hwang, D. and Kim, d. (2012). Nonparametric Method Using Placement in Analysis of Covariance Model *Communacations for Statistical Applications and Methods***19**, 721-729

Hong, I. and Lee, S. (2014). Kruskal-Wallis one-way analysis of variance based on linear placements, *Korean Mathematical Society*, **51**, 701–716.

Jeon, K. and Kim, D. (2016). Nonparametric method in one-way layout based on joint placement, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **29**, 729–739

Kruskal, W. H. and Wallis, W. A. (1952). Use of ranks in one-criterion variance analysis, *Journal of the American Statistical Association*, **47**, 583–621.

Lee, J. (2005). *Statistical Method for Biotechnology Research*, Freeacademy, Seoul.

Quade, D. (1967). Rank analysis of covariance, *Journal of the American Statistical Association*, **62**, 1187–1220.

공분산분석에서 선형위치통계량을 이용한 비모수 검정법

최윤정[a] · 김동재[a,1]

[a]가톨릭대학교 의생명 · 건강과학과

(2017년 3월 8일 접수, 2017년 4월 26일 수정, 2017년 4월 26일 채택)

요 약

공변량(covariate)이 존재하는 경우, 각 처리군 간 효과의 차이를 검정하기 위한 대표적인 비모수적 방법에는 Quade (1967)가 제안한 검정법이 있다. 또한 반응변수에 대해 공변량으로 단순선형회귀분석을 실시하여 얻은 잔차에 대해 일원배치분산분석과 Kruskal Wallis가 제안한 방법을 적용하는 방법, 그리고 Hwang과 Kim (2012)이 제안한 비모수적 도구인 위치(placement)를 이용한 방법이 있다. 본 논문에서는 공분산분석 모형에서 Hwang과 Kim (2012)이 제안한 방법을 확장하여 공분산분석에서의 새로운 방법을 제안하였다. 또한 모의실험(Monte Carlo simulation study)을 통하여 기존의 검정법들과 제안한 방법의 검정력을 비교하였다.

주요용어: 공분산분석, 잔차, 비모수 방법, 선형위치통계량, 일반대립가설

[1]교신저자: (06591) 서울 서초구 반포대로 222, 가톨릭대학교 의생명 · 건강과학과.
E-mail: djkim@catholic.ac.kr