한국학교수학회논문집 제 20 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 20, Number 2, 119-139, June 2017

<Euclid 원론>에서 작도의 의미에 대한 고찰

김창수[1] · 강정기[2]

고대 그리스 시대 작도는 현 교육에서의 작도 이상의 의미를 지닌 것이었다. 본 연구는 이러한 사실에 입각하여 현 교과서의 작도 의미를 살펴보고, 이와 대비되는 <Euclid 원론>에서의 작도 의미를 추출해 보았다. 더불어 <Euclid 원론>에서의 작도 의미를 현 교육에 반영하였을 때 나타나는 이점을 숙고해 보고, 그 이점을 활용하는 방안을 제안하였다. 그 결과 현 교과서의 작도는 삼각형의 합동 조건 도입과 이해를 위한 수단임을 확인할 수 있었다. 반면, <Euclid 원론>에서 작도는 4가지 의미를 지니고 있었다. 공준으로 타당성을 확보한 추상적 활동, 도형의 존재성 입증 및 논증에서 보조선 도입의 타당성 확보 수단, 보조선 도입 이외의 논증 개입 자제, 수와 대수를 다루는 수단이 곧 작도였다. 이로부터 논증에 보조선 도입의 타당성 확보 수단으로서의 작도 활용의 이점을 논의하였다. 아울러 Euclid 도구로 작도 불가능한 보조선에 대하여 가상적 도구의 개입에 의한 작도 관점을 제시하였다.

주요용어 : <Euclid 원론>, 작도, 작도의 의미

Ⅰ. 서론

작도는 고대에서부터 현재에 이르기까지 수학에서 중요 주제였다. 가장 지속적이고 광범위하게 적용된 수학 저작물로 꼽히는 <Euclid 원론>도 많은 작도 문제를 포함하고 있다(Fitzpatrick, 2007). 주어진 정육면체의 2배 부피를 갖는 정육면체의 한 변 작도하기, 주어진 임의의 각 3등분하기, 주어진 원의 넓이와 같은 넓이를 갖는 정사각형 작도하기에 대해 Cajory(1991)는 '이들 만큼 오랫동안 끈기 있게 연구된 것은 없다'고 하였다. Gauss는 정17각형의 작도 문제를 해결하면서 수학자로의 진로를 결정하였다고 한다(한인기·이정순, 2009). 작도가 기하 역사에서 차지하는 비중이 적지 않은 만큼 학교 수학에서의 역할도 부각시키는 것이 바람직하다.

수학교육자들은 주로 작도와 관련한 여러 가지 연구를 수행해 왔다. 연구 동향은 크게 두 가지로 구분할 수 있는데, 하나는 작도가 갖는 특성에 대한 연구이며 다른 하나는 작도의 효율적인 교수법에 대한 연구이다.

작도가 갖는 특성에 대한 연구로 장혜원(1997a)과 한인기(1997) 등의 연구가 있다. 장혜원

---

* MSC2010분류 : 97-03
1) 남해여자중학교 (cupncap@gmail.com)
2) 진영중학교 (jeonggikang@gmail.com), 교신저자

(1997a)은 수학 교육과정 상의 작도의 역할과 작도 도구 제약에 대한 정당화 유형을 제시하였다. 그녀는 작도의 역할을 세 가지 측면에서 제안하였다. 첫째, 도형의 여러 성질을 재인식하거나 학습할 기회를 제공하며, 둘째, 기하의 새로운 개념이나 정리를 유도하며, 셋째, 활동주의 이론을 실천하는 수단이 된다는 것이다. 더불어 장혜원(1997a)은 Albrecht(1952)의 연구 결과를 바탕으로 작도 도구 제약의 정당성에 대한 유형을 유클리드 공준에 의해 요구되는 것, 관습이나 역사적 사용에 기초한 것, 이론적 정확성에 기초한 것, 게임 규칙, 작도 절차의 단순성과 편의성 등으로 구분하였다.

한인기(1997)는 작도 문제가 갖는 특성을 분석하고, 작도 문제의 해결 단계를 제시하였다. 그는 작도 문제에서 '주어진 조건들'은 개괄적으로 주어지기 때문에, 해를 가지지 않는 경우가 있음을 주지해야 한다고 말하였다. 또한 작도 문제에는 간혹, 작도에 사용되는 도구를 제한하는 경우가 있으며, 작도 문제 해결 과정에는 반드시 '얻어진 작도가 과연 문제에서 주어진 조건을 만족하는가?'를 확인하는 증명의 단계가 필요함을 지적하였다. 이러한 특성을 바탕으로 그는 작도 문제의 해결 과정을 분석-작도-증명-탐구의 단계로 구체화하였다.

작도에 대한 효율적인 교수법에 대한 연구로 조완영·정보나(2002)와 박명희·신경희(2006)의 연구가 있다. 조완영·정보나(2002)는 7차 수학과 교육과정 작도 영역의 교과서와 수업 사례를 분석하였다. 그 결과, 교과서 뿐 만 아니라 수업 사례에서 작도 순서에 초점을 맞추어 학생들은 작도를 해결해야 할 문제로 보기보다 순서를 암기해야 할 대상으로 보는 경향을 보일 수 있다고 지적하였다. 그들은 작도를 하나의 문제로 보고 이를 해결하는 전반적 과정이 강조되어야 한다고 주장하였다. 이를 통해 작도는 증명방법을 발견하는 중요한 사고수단인 분석을 활성화시키고 증명에 필요한 도형의 성질을 재인식시키는 역할을 해야 한다고 말하였다.

박명희·신경희(2006)는 Clairaut의 <기하학 원론>에 근거하여 작도 단원의 새로운 지도법을 개발하여 적용하였다. 특히 그들은 개념이 요구되는 상황을 설정하여 그 필요성을 역설함으로써 자연스러운 발생을 골자로 작도 단원 내용을 재구성하였다. 중학교 1학년 학생 6명을 대상으로 이를 적용한 수업을 실시한 결과, 학생들은 작도 방법을 재발명하고 작도 활동을 반성적으로 사고하여 도형의 성질을 발견하기도 하였다고 보고하였다.

기존 연구는 주로 기하 추론과 관련한 작도의 이점에 주목한 것이 대부분이다. 대표적으로 조완영·정보나(2002)가 지적한 '작도는 증명방법을 발견하는 사고수단인 분석을 활성화시키고 증명에 필요한 도형의 성질을 재인식시키는 역할을 해야 한다'는 작도의 이점을 기하 학습에 십분 활용하자는 취지를 지닌다. 장혜원(1997a)이 언급한 도형 성질 재인식, 새로운 개념이나 정리 유도, 활동주의 이론 실천 수단으로 대표되는 작도의 세 가지 역할 역시 기하 추론과 관련된 작도의 이점에 해당한다.

여기서 주목할 부분은 작도가 기하 추론을 학습하기 위한 도구 영역으로 간주된다는 점이다. 작도를 하다보면 자연스럽게 도형의 성질을 이용해야 한다거나 작도를 함으로써 기하의 새로운 개념이나 정리를 유도할 수 있다는 주장에서 작도는 본질이라기보다 기하 학습을 돕는 도구 영역으로 취급된다. 심지어 조영미·정연준(2013)의 연구에서 작도는 기하학적 문양에 대한 심미적 체험을 활성화하는 도구로 제안되었다.

하지만 작도와 관련한 여러 법칙이 포함된 <Euclid 원론>을 살펴볼 때, 고대 그리스 시대의 작도는 그 이상의 의미를 지닌 것으로 해석된다. 다시 말해, 보다 본질적인 측면에서 작도를 다루고 활용했던 것으로 생각된다. 따라서 옛 시절의 작도의 의미를 되짚어 보고, 그 의미를 현대 교육의 시각에서 활용하는 방안을 모색해 보는 것도 의미 있는 일일 것이다.

본 연구에서는 현 교과서에서의 작도의 의미를 살펴보고, 이와 대비되는 <Euclid 원론>의 작도 의미를 추출해 볼 것이다. 다음 <Euclid 원론>의 작도 의미를 현 교육에 반영하였을 때 나타나는 이점을 숙고해 보고, 이를 극대화하는 방안을 제안하고자 한다.

Ⅱ. 교과서의 작도 의미

교과서의 작도 의미를 살펴보기 위해 황선욱 외(2013a, 2013b, 2013c)를 활용하였다. 작도는 중학교 1학년 교과서 'Ⅴ. 기본 도형' 단원 '3. 작도와 합동'에 처음으로 등장한다.

작도를 합동과 같이 다루고 있다는 점에 주목할 필요가 있다. 이는 기하 영역에서 작도 도입이 합동과 관련된다는 것을 의미한다. 작도와 관련한 단원의 지도 목표와 지도상의 유의점을 보면 이는 명백하다.

<표 Ⅱ-1> 작도 관련 단원의 지도 목표와 지도상의 유의점

지도 목표	**3. 작도와 합동** ● 작도의 뜻을 이해하고, 삼각형을 작도하는 데 필요한 기본 도형을 작도할 수 있게 한다. ● 여러 가지 조건에 따라 삼각형을 작도할 수 있게 한다. ● 삼각형의 합동 조건을 이해하고, 이를 이용하여 두 삼각형이 합동인지 판별할 수 있게 한다.
지도상의 유의점	**3. 작도와 합동** ● 작도에서 자는 두 점을 지나는 직선을 그리는 도구로 사용되며, 컴퍼스는 원을 그리거나 길이가 같은 선분을 옮기는 도구로 사용됨을 알게 한다. ● 주어진 삼각형과 합동인 삼각형을 작도할 수 있게 한다. ● 작도를 이용하여 삼각형의 합동 조건을 이해하게 한다.

작도는 삼각형의 합동 조건 도입 수단으로 활용되고 있다. 지도상의 유의점에서 언급한 '작도를 이용하여 삼각형의 합동 조건을 이해하게 한다'는 교과서에서 작도가 갖는 의미를 명백히 보여준다. 교과서에 등장하는 작도 내용은 다음과 같이 삼각형의 합동 조건과 관련된 것에 그친다.

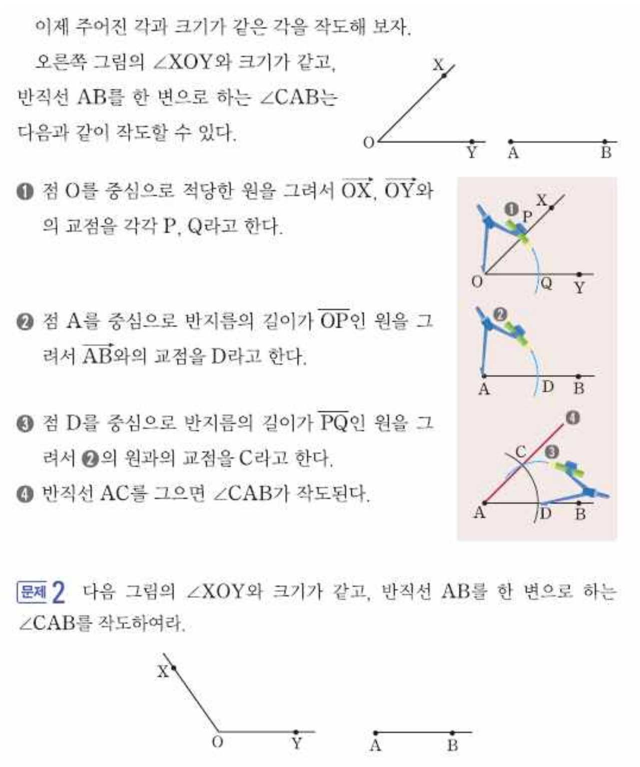
- 작도의 뜻
- 주어진 선분과 길이가 같은 선분의 작도
- 주어진 선분의 길이의 2배가 되는 선분의 작도
- 주어진 각과 크기가 같은 각의 작도
- 세 변이 주어진 삼각형의 작도
- 두 변과 그 끼인 각이 주어진 삼각형의 작도
- 한 변과 그 양 끝 각이 주어진 삼각형의 작도

위의 내용 중 삼각형의 작도와 관련된 내용에서 교사용지도서는 한결같이 '작도되는 삼각형은 하나로 정해짐을 이해하게 한다'고 명시함으로서 작도가 의도하는 바가 곧 삼각형의 합동조건임을 알게 한다. 다시 말해, 삼각형의 합동조건의 타당성을 직관적인 측면에서 확인

하는 수단으로 작도를 활용하고 있다.

작도가 삼각형의 합동조건에만 국한된 것은 교육과정 개발 방향인 내용 축소와 관련된다. 내용 축소는 단위 학교 단위 수업에서의 자율성 증대로 이어져, 확보된 시간에 다양한 교수·학습 활동을 계획하고 실천하게 되어 학습자에게 필요한 역량을 함양할 수 있는 기회를 제공하게 된다는 측면에서 국가 교육과정 개정의 한 방향으로 거론되고 있다(한국교육과정평가원, 2014). 7차 교육과정까지 등장하던 수직이등분선의 작도 및 각의 이등분선 작도는 2009개정 교육과정 이후 삭제되었는데, 이는 수학과 교육과정 개정 방향인 내용 축소로 해석된다.

한 가지 주목할 부분은 작도가 발견이나 탐구와는 무관하다는 점이다. 생각 열기를 제외한 작도는 방법이 제시된 이후 관련 유제를 해결하는 식의 전개가 이루어진다.

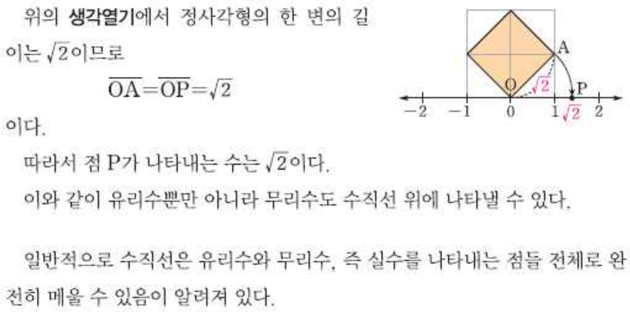


[그림 Ⅱ-1] 교과서의 작도 내용 전개

이는 조완영·정보나(2002)가 주장한 것과 같이 작도 순서에 초점을 맞춘 것으로, 학생들은 작도를 해결해야 할 문제로 보지 못하고 순서를 암기해야 할 대상으로 볼 우려를 낳는다. 작도가 곧 증명방법을 발견하는 사고수단인 분석을 활성화시키고 증명에 필요한 도형의 성질을 재인식시키는 역할을 해야 한다고 주장한 여러 연구의 주장과 배치되는 내용 전개 방식이다.

중학교 1학년에 등장하는 작도는 삼각형의 합동조건 도입을 위한 보조도구인 만큼, 이후 작도는 거의 나타나지 않는다. 간혹 생각 열기나 참고 자료에 간간히 나타날 뿐이다. 그 내

용이 분명 작도임에도 '작도'라는 용어를 언급하지 않는 경우도 있다. 대표적으로 $\sqrt{2}$의 수직선 작도를 들 수 있다. $\sqrt{2}$를 수직선 위에 나타내는 방법은 작도라는 언급 없이 등장함으로써 작도임을 인식하기 어렵게 한다. 작도는 기하 영역의 여러 단원과 밀접하게 관련되지 못하고, 합동 조건을 도입하기 위한 수단에 그치고 있다.


위의 **생각열기**에서 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$이므로

$$\overline{OA}=\overline{OP}=\sqrt{2}$$

이다.

따라서 점 P가 나타내는 수는 $\sqrt{2}$이다.

이와 같이 유리수뿐만 아니라 무리수도 수직선 위에 나타낼 수 있다.

일반적으로 수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수를 나타내는 점들 전체로 완전히 메울 수 있음이 알려져 있다.

[그림 Ⅱ-2] $\sqrt{2}$의 수직선 작도

교과서의 작도는 교육과정 개정방향에 맞추어 내용 감축이 이루어졌으며, 삼각형의 합동 조건을 도입하기 위한 취지로만 사용되므로 다른 부분에서 전혀 연계성을 드러내지 못한 한계를 지닌다. 이는 교과서의 작도는 삼각형의 합동 조건 도입과 이해를 위한 수단으로 고립되었음을 보여준다. 따라서 보다 포괄적 의미에서 사용되었던 <Euclid 원론>에서의 작도 의미를 살펴봄으로써 기하 단원에서 작도의 본질적 의미를 부각시키고 내용 간 연계성을 높일 필요가 있다.

Ⅲ. <Euclid 원론>에서의 작도 의미

1. 공준으로 타당성을 확보한 추상적 활동

작도는 Euclid 도구로 불리는 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로 평면도형을 그리는 활동으로 몇 가지 가정이 필요하다. 먼저, 자는 직선을 긋고 컴퍼스는 원을 그리는 데에만 사용한다. 자에는 눈금이 없기 때문에 자를 사용하여 선분의 길이를 알아내거나, 두 선분이 합동임을 알아내는 것이 불가능하다.

<Euclid 원론>에서는 작도 도구의 역할을 어떻게 제안하고 있을까? <Euclid 원론>에는 공준 1, 공준 2, 공준 3을 통해 작도 도구의 역할을 명시하고 있다.

『<Euclid 원론>의 공준』

1. 임의의 점과 다른 한 점을 연결하는 직선은 오직 하나 뿐이다.
2. 임의의 선분을 양끝으로 얼마든지 연장할 수 있다.
3. 임의의 점을 중심으로 하고 임의의 길이를 반지름으로 하는 원을 그릴 수 있다.

4. 직각은 모두 서로 같다.
5. 두 직선이 한 직선과 만날 때, 같은 쪽에 있는 내각의 합이 2직각(180°)보다 작으면 이 두 직선을 연장할 때 2직각보다 작은 내각을 이루는 쪽에서 반드시 만난다.

작도는 <Euclid 원론>의 공준 1, 공준 2, 공준 3에 의해 타당성이 확보될 수 있다. 먼저, 공준 1과 공준 2는 직선의 작도와 관련된다. 공준 1은 두 점을 지나는 직선을 눈금 없는 자로 언제든지 그을 수 있음을 보장한다. 공준 2는 실제로는 유한의 범위 내에서 표현할 수밖에 없는 직선을 눈금 없는 자로 얼마든지 연장하여 유한의 범위를 확장하는 것이 가능함을 보장한다. 공준 3은 원의 작도와 관련된다. 공준 3은 중심과 반지름이 주어진 원을 컴퍼스로 그릴 수 있음을 보장한다. 주어진 원의 반지름이 상상하기 어려울 만큼 크든 작든 원을 그릴 수 있다는 것이다.

Euclid의 공준은 작도를 직접 수행하도록 요구하지는 않으므로 공준 자체가 내재적으로 어떤 특정 도구의 사용을 강요하지 않는다. 그렇지만 공준에 따른 작도는 단지 직선과 원만을 포함하며, 이는 결과적으로 눈금 없는 자와 컴퍼스 작도를 의미한다고 볼 수 있다. 예컨대, 공준 3은 선분의 길이를 옮기기 위해 자가 아닌 컴퍼스 사용을 암시한다(장혜원, 1997a).

도대체 이와 같은 공준이 왜 필요한 것일까? 그것은 당시 기하학 탐구의 근간이 된 작도의 타당성을 확보하기 위함이었다. 다시 말해, 두 점을 지나는 직선을 긋는 작도와 그것을 연장하는 작도, 그리고 중심과 반지름이 주어진 원을 그리는 작도가 가능하다는 사실을 보장하기 위한 것이다.

공준 도입은 작도가 경험적 차원에 머문 활동이 아닌 '추상 속의 작도'이기 때문에 필요한 조치이다. 경험적 차원에서 작도는 여러 가지 제약이 있을 수 있다. 예컨대, 선분의 연장선을 긋는 과정에서 조금이라도 오차가 난다면 그것은 더 이상 직선이 될 수 없다. 주어진 반지름의 길이가 상상하기 어려울 만큼 크다면 그 길이를 옮길 수 있는 컴퍼스를 제작하기는 어려울 것이다. 종이 위에 점을 찍으면 그것은 필연적으로 넓이를 갖는 원의 모습으로 나타나기 때문에 현실 속에 두 점을 지나는 직선은 여러 가지로 나타날 수 있다.

[그림 Ⅲ-1] 경험적 차원에서 작도가 갖는 제약의 한 예

경험적 차원에서 작도가 갖는 제약을 극복하기 위해서는 작도를 '추상 속의 작도'로서 승격시키는 노력이 요구된다. 현실 속에서 아무리 엄밀히 작도한다고 하더라도 원하는 선이나 원을 그리는 것은 사실상 불가능하다. 따라서 공준을 통해 작도의 타당성 확보는 물론이고, 작도를 가상의 컴퍼스와 자로 그리는 추상적 활동으로 변모시킨 것이다. 예컨대, 공준 1은 [그림 Ⅲ-1]과 같은 경험적 차원에서 작도가 갖는 제약을 원천적으로 차단한다. 공준에 의해 작도는 경험적 활동이 아닌 추상적인 활동으로 승격되며, 추상적인 수학적 개념과 동등하게 취급될 수 있게 된다.

수학적 대상이 종이 위에 그려질지라도 우리는 그것을 관념적 성격으로 인식할 수 있어야 한다(노은환·강정기, 2015). 따라서 시각적 표현을 통해 흔히 접하게 되는 작도된 도형은 종

이 위에 그려진 단순한 이미지가 아니라 정의에 의해 통제된 개념으로 이해되어야 하며(장혜원, 1997b), 그것을 가능하게 하는 것은 수학적 정의와 공준이다. 때문에 작도에서 연필로 그린 선의 굵기나 작도의 부정확성은 무시될 수 있다.

2. 도형의 존재성 입증 및 논증에서 보조선 도입의 타당성 확보 수단

<Euclid 원론> 제 I 권에 등장하는 48개의 명제는 직선, 각, 삼각형에 관한 것으로 향후 명제를 증명하는 기본 바탕이 되며, 작도와 직접적으로 관련된 것들은 다음과 같다(이무현 옮김, 1997).

법칙 1. 유한한 길이의 직선을 주었을 때, 그것을 써서 정삼각형을 만들 수 있다.
법칙 2. 유한한 길이의 직선과 어떤 점을 주었을 때, 그 점을 끝점으로 하여 주어진 직선과 길이가 같은 직선을 그을 수 있다.
법칙 3. 길이가 다른 두 직선을 주었을 때, 긴 직선에서 짧은 직선의 길이만큼 잘라낼 수 있다.
범칙 9. 어떤 각을 주었을 때, 그것을 이등분할 수 있다.
법칙 10. 유한한 길이의 직선을 주었을 때, 그것을 이등분할 수 있다.
법칙 11. 어떤 직선이 있고, 그 직선에서 한 점을 잡았을 때, 그 점을 지나고 주어진 직선과 수직이 되는 직선을 그을 수 있다.
법칙 12. 한없이 긴 직선이 있고, 그 직선에 있지 않는 어떤 점을 잡았을 때, 그 점에서 직선으로 수직선을 그을 수 있다.
법칙 22. 세 개의 직선을 주었을 때, 변들의 길이가 이들과 같은 삼각형을 만들 수 있다. 이 경우 두 직선의 길이를 더하면 나머지 한 직선보다 더 길다는 것을 가정해야 한다.
법칙 23. 어떤 각을 주었다고 하자. 직선에서 한 점을 잡았을 때, 주어진 각과 크기가 같은 크기의 각을 그 점에서 만들 수 있다.
법칙 31. 한 점과 직선을 주었을 때, 그 점을 지나고 주어진 직선과 평행한 직선을 그을 수 있다.
법칙 42. 어떤 각과 삼각형을 주었을 때, 넓이가 그 삼각형의 넓이와 같고 주어진 각을 가지는 평행사변형을 만들 수 있다.
법칙 44. 어떤 직선, 어떤 각, 어떤 삼각형을 주었을 때, 주어진 직선과 각을 가지는 평행사변형을 만들되, 그 넓이가 주어진 삼각형의 넓이와 같도록 만들 수 있다.
법칙 45. 어떤 다각형과 어떤 각을 주었을 때, 그 다각형과 같은 넓이를 가지고 주어진 각을 가지는 평행사변형을 만들 수 있다.
법칙 46. 어떤 직선을 주었을 때, 그것을 한 변으로 가지는 정사각형을 만들 수 있다.

Proclus에 따르면 <Euclid 원론>의 명제는 '정리(theorem)'와 '문제(problem)'로 나뉜다. '문제'는 도형의 작도, 분할, 자르기와 붙이기에 대한 것, 나아가 이러한 절차로 인해 나타나는 결과를 포함하는 명제를 의미한다(Morrow, 1970). 소위 위에 제시된 법칙들이 곧 '문제'이며, 나머지 법칙은 '정리'이다.

이는 Proclus의 관점에 의한 구분이지, Euclid는 구분하여 기술하지 않았다. <Euclid 원론>은 작도에 관한 명제를 다른 명제들과 대등한 위치에서 연역적으로 기술하고 배열하였다. 현재 수학 교과서의 작도는 삼각형의 합동 조건 유도에 국한된 내용으로 소개되지만, <Euclid 원론>에서는 기하 명제의 일부를 이루고 있었다. 이에 대해 Albrecht(1952)는 Euclid는 원론을 집대성하면서 그가 다룬 기하의 모든 정리에 대해 작도를 수행할 수 있음을 보이고 나서 다음 단계의 이론을 전개시켜 나갔다고 지적하였다.

작도와 관련한 공준과 명제는 도대체 왜 필요했던 것일까? 도형의 작도 문제를 증명된 명제의 반열에 배치한 것은, 도형의 성질에 대한 논의에 앞서 그 도형이 공준으로부터 생성됨을 입증하고자 하는 엄밀성의 정신에 기인한다. <Euclid 원론>의 제 Ⅰ권의 명제 1은 정삼각형을 작도하는 것이며, 이후에도 다루는 모든 도형은 작도 후에 그에 대한 명제를 증명한다(권석일, 2006). 작도는 도형의 존재성[3]을 입증하는 수단으로 활용되었다.

Euclid가 작도를 통해 도형의 존재성을 입증하고자 하는 정신은 diorism에서도 엿볼 수 있다. diorism은 고대 그리스에서 어떤 대상이 존재할 조건이나 한계를 명확히 하는 것을 표현한 용어이다. <Euclid 원론> Ⅰ권 법칙 22에서 삼각형의 존재성을 보여줄 때에도 삼각형이 존재하기 위한 길이 조건인 diorism을 제시한 후 diorism을 만족하는 삼각형이 존재함을 작도함으로서 증명한다(유미영·최영기, 2015). Euclid는 법칙에서 diorism을 사용할 만큼 도형의 존재성 확보를 위해 노력했으며, 그 주요 수단은 작도였다.

엄밀성의 정신은 비단 도형의 존재성 입증에 그치지 않고, 논증에서 각종 보조선 도입에도 발휘되었다. <Euclid 원론>의 증명에는 연장선, 각의 이등분선, 변의 이등분선, 변의 수선 등의 보조선이 사용된다. 보조선을 도입하자면 '이것이 실제로 그을 수 있는 선인가?'에 대한 의구심이 제기되는데, 이를 해소하기 위한 목적으로 작도와 관련한 공준과 법칙을 도입한 것이다. 공준 2는 연장선, 법칙 9는 각의 이등분선, 법칙 10은 변의 이등분선, 법칙 11은 변의 수선에 대한 작도 가능성을 제시함으로써 의구심을 해소할 수 있었다. 다시 말해, 논증에 사용되는 보조선의 타당성 확보 수단으로 작도와 관련한 공준과 명제를 도입한 것이다. 만약 논증에 사용되는 보조선의 타당성이 작도를 통해 확보되지 않는다면 보조선을 그을 수 있음을 먼저 보여야만 한다.

<Euclid 원론> 제 Ⅰ권 법칙 16의 증명에 등장하는 다음 내용은 여러 가지 보조선의 타당성에 의해 지지되는 논증 방식을 택하고 있다.

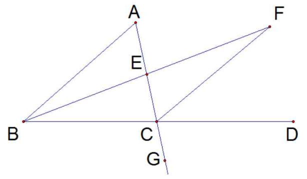
3) '존재한다'는 것에는 우리의 인식 밖의 이상적인 이데아로서 존재하는 것과 우리의 인식 영역 안에 들어옴으로써 인간의 마음 속에 존재하는 것의 두 가지 다른 의미가 있다(Knorr, 1983). 이상적인 대상을 정의하는 것으로 그치지 않고 항상 그 존재성을 공준이나 정리로 보장하는 <Euclid 원론>에서의 존재성은 후자에 해당한다(유미영·최영기, 2015).

<표 Ⅲ-1> <Euclid 원론> 제 Ⅰ권 법칙 16의 증명

법칙 16. 삼각형의 한 변을 길게 늘였을 때 생기는 바깥각은 삼각형의 다른 두 안각보다 더 크다.

(보임) 삼각형을 ABC로 나타내자. ①한 변 BC를 길게 늘여서 CD를 그어라(공준 2). 그러면 바깥각 ACD는 다른 두 안각 CBA, BAC보다 더 큼을 보이겠다.

②변 AC를 이등분하는 점을 E로 나타내자(제 Ⅰ권 법칙 10). ③EF의 길이가 BE의 길이와 같도록 F를 잡아라(제 Ⅰ권 법칙 3). ④직선 FC를 긋고(공준 1). ⑤직선 AC를 길게 늘여서 CG를 그어라(공준 2).

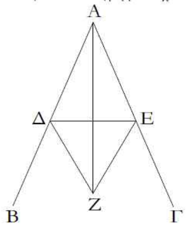
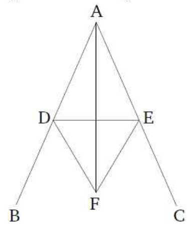
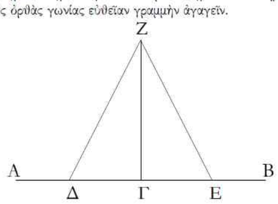
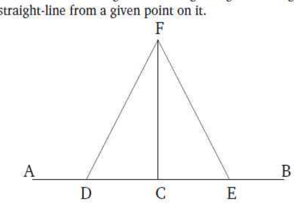


(중략)

법칙 16의 논증에서 무려 5차례의 보조선 도입이 필요하며, 보조선은 작도와 관련한 공준과 법칙들에 의해 타당성이 확보된다. <Euclid 원론>은 작도와 관련한 공준과 법칙을 수립하여 각종 보조선의 작도 가능성을 보여줌으로써, 보조선 도입에 대한 의구심으로부터 자유로울 수 있었다.

고대 그리스에서는 존재성이 아니라 작도가능성이 증명에 보조선 도입의 타당성을 확보하는 주요 수단이었다. 따라서 그들은 보조선 도입에 앞서 작도가능성을 제시하였다. 작도가능성을 언급한 명제는 '존재하는 것(to exist)'이 아니라, '자르는 것(to cut)' 또는 '그리는 것(to draw)'으로 기술되었는데(Fitzpatrick, 2007), 이는 작도가능성이 보조선 도입의 타당성을 확보하는 수단이었음을 보여준다.

<표 Ⅲ-2> <Euclid 원론> 제 Ⅰ권 법칙 9와 법칙 11의 기술

θʹ. Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν. 	Proposition 9 To cut a given rectilinear angle in half. 
ιαʹ. Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 	Proposition 11 To draw a straight-line at right-angles to a given straight-line from a given point on it. 

고대 그리스 시대의 수학자들은 존재성을 작도가능성과 동일시 한 것으로 생각된다. 그들은 난제로 분류된 3대 작도 불능 문제를 해결하기 위해 매우 열심히 노력했다(야노 켄타로, 1997). 이는 작도가 불가능할 것이라는 생각을 하지 못했기에 빚어진 현상으로, 그들이 작도가능성과 존재성을 동일시했다는 것을 암시한다.

하지만 작도가능성은 존재성에 포괄되기 때문에 존재성에 비해 축소된 개념이다. 다시 말해, 작도 가능하면 존재하지만 존재한다고 해서 반드시 작도 가능한 것은 아니다. 현재에는 작도 가능성보다 존재성에 입각하여 논증에 보조선 도입의 타당성을 확보한다는 점(권석일, 2006; 장혜원, 1997a)에서 그리스 시대의 입장과 차이가 난다.

3. 보조선 도입 이외의 논증 개입 자제

<Euclid 원론>에 삼각형의 합동 조건과 직접적으로 관련된 명제는 다음과 같다.

법칙 4. 두 삼각형이 있는데, 두 변이 각각 길이가 같고, 그 두 변이 만드는 각이 크기가 같다고 하자. 그러면 나머지 한 변도 길이가 서로 같으며, 두 삼각형은 서로 같다. 따라서 나머지 두 각도 각각 크기가 같다. 바꿔 말하면, 같은 길이인 변과 마주 보는 각은 서로 크기가 같다.

법칙 7. 어떤 직선을 주었을 때, 그 양 끝점에서 두 직선을 그어 그들이 한 점에서 만나도록 해 삼각형을 만들어라. 직선의 양 끝에서 방금 그은 것과 같은 방향으로, 방금 그은 두 직선들과 길이가 각각 같도록 두 직선을 그어서, 이들이 다른 어떤 점에서 만나 삼각형을 만들도록 할 수 없다.

법칙 8. 두 삼각형이 있는데, 두 변의 길이가 두 변의 길이와 각각 같고, 밑변의 길이도 밑변의 길이와 같다고 하자. 그러면 같은 변들 사이에 놓이는 각들은 서로 크기가 같다.

법칙 26. 두 삼각형이 있는데, 두 각의 크기가 두 각의 크기와 각각 같고, 한 변의 길이가 한 변의 길이와 같다고 하자. 즉, 크기가 서로 같은 각 사이에 놓이는 변이든, 또는 같은 크기의 각과 마주 보는 변이든, 변의 길이가 같다고 하자. 그러면 나머지 변들도 나머지 변들과 길이가 각각 같고, 나머지 각도 나머지 각과 크기가 같다.

법칙 4는 SAS 합동 조건, 법칙 8은 SSS 합동 조건, 법칙 26은 ASA 합동 조건, 법칙 7은 ASA와 SSS의 결정 조건과 관련된다.[4] 여기서 주목할 부분은 법칙 4의 증명인데, 법칙 8과 법칙 26의 증명과는 다르게 작도와 밀접한 관련성을 갖는다.

4) '직선의 양끝에서 방금 그은 것과 같은 방향으로'는 ASA, '방금 그은 두 직선들과 길이가 각각 같도록 두 직선을 그어서'는 SSS 결정조건과 관련된다.

<표 Ⅲ-3> 중첩의 원리에 기반한 SAS 합동 증명

법칙 4의 증명) 삼각형을 ABC와 DEF로 나타내자. 두 변 AB, AC가 두 변 DE, DF와 각각 길이가 같다고 하자. 그리고 각 BAC와 각 EDF는 크기가 같다고 하자. (중략) 삼각형 ABC를 옮겨서 삼각형 DEF에다 포개 놓아라. 점 A를 점 D에다 포개 놓고, 변 AB를 변 DE에다 포개 놓아라. 그러면 점 B와 점 E는 일치하게 된다. 왜냐하면 AB와 DE는 길이가 같기 때문이다. AB는 DE와 포개져 있고, 각 BAC와 각 EDF는 크기가 같으니, 직선 AC와 직선 DF는 포개진다. 그러므로 점 C와 점 F는 일치하게 된다. 왜냐하면 AC와 DF는 길이가 같기 때문이다. (후략)

옮겨서 포개 놓는 '중첩의 원리'에 기반한 법칙 4의 증명은 작도와 크게 다르지 않다. 종이나 땅위에 그려진 도형을 옮겨 포갠다는 것은 거의 불가능한 일이다. 따라서 옮겨 포갠다는 의미는 삼각형의 6요소 중 몇 개를 선택하여 하나씩 비교하는 행위로 판단하여야 하며, 이는 한 삼각형의 6요소 중 하나를 다른 삼각형의 대응 요소로 옮겨 작도하는 것을 의미한다.

법칙 4의 증명에 '중첩의 원리'를 사용했다는 점은 오랜 기간 논란이 되었다(Shibli, 1932). 대표적으로 Smith(1923)는 도형의 중첩이 논증의 방법으로 자유롭게 사용될 수 있는 기하는 이러한 증명으로 가득 차게 될 것이라고 비판하였다. 또한 Klein(1939) 역시 중첩의 원리에 의한 증명에는 암묵적 운동 개념이 포함되었다고 비판하였다. Greenberg(1997)에 의하면, 비록 이것이 기하학을 배우는 초보자들로 하여금 SAS 합동을 쉽게 받아들이도록 하는 좋은 방법이긴 하지만 그것은 증명이 아니다. 왜냐하면 Euclid가 어떤 그림을 그들의 모양과 크기를 바꾸지 않고 그대로 옮겨놓을 수 있다는 공리를 결코 서술한 적이 없으므로 그것은 증명이 될 수 없다. 결국 Hilbert는 SAS 합동을 공준화함으로써 중첩의 논란을 피하고자 하였다.

Euclid 역시 작도에 기반한 증명을 가급적 피하려고 했던 것으로 생각된다. 왜냐하면 SAS 합동 증명 외에도 ASA 합동 역시 <표 Ⅲ-4>와 같이 작도에 기반하여 증명할 수 있기 때문이다.

<표 Ⅲ-4> 중첩의 원리에 기반한 ASA 합동 증명

ASA 합동의 증명) 삼각형을 ABC와 DEF로 나타내자. 한 변 AB가 한 변 DE와 각각 길이가 같다고 하자. 그리고 두 각 BAC, ABC와 각 EDF, DEF는 크기가 같다고 하자. (중략) 삼각형 ABC를 옮겨서 삼각형 DEF에다 포개 놓아라. 점 A를 점 D에다 포개 놓고, 변 AB를 변 DE에다 포개 놓아라. 그러면 점 B와 점 E는 일치하게 된다. 왜냐하면 AB와 DE는 길이가 같기 때문이다. AB는 DE와 포개져 있고, 각 BAC와 각 EDF는 크기가 같으니, 직선 AC와 직선 DF는 포개진다. 또 각 ABC와 각 DEF는 크기가 같으니, 직선 BC와 직선 EF는 포개진다. 그런데 점 C는 직선 AC와 직선 BC의 교점이고, 점 F는 직선 DF와 직선 EF의 교점이다. 직선 AC와 직선 DF, 직선 BC와 직선 EF는 각각 포개진다고 했으므로 점 C와 점 F는 일치하게 된다. 따라서 삼각형 ABC와 삼각형 DEF는 합동이다.

ASA 합동 역시 중첩의 원리에 의한 증명이 가능함에도, Euclid는 이러한 증명 방법을 선택하지 않았다. 이는 Euclid 역시 중첩의 원리에 의한 증명을 가급적 자제하려 했음을 보여준다. 따라서 그는 SAS 합동 증명에만 피치 못하게 중첩의 원리를 이용한 것이다.

<Euclid 원론>의 ASA 합동은 중첩의 원리를 피한 증명을 선택했기 때문에, 법칙 26은 양 끝 각이 아닌 두 각으로 기술된 것으로 생각된다. 만약 Euclid가 작도에 기반한 증명 곧 중첩의 원리에 기반한 증명을 선택하였다면, 현 교과서에서 채택하고 있는 ASA 합동 조건처럼 양 끝 각으로 기술되었을 가능성이 클 것이다[5].

현재의 우리 교과서는 작도에 기반하여 합동을 이끄는 방식이기에 ASA 합동은 양 끝 각으로 표현되어 있다. 삼각형 ABC, DEF에서 $\overline{BC}=\overline{EF}$, $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$이어도 합동이다. 교과서에서 이와 같은 합동 조건이 나오지 않는 것은 바로 작도 관점에서의 정당화를 채택하기 때문이다. 물론 작도가 불가능한 것은 아니며, $\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)$라는 관점에서 작도는 가능하다. 단지 거쳐야 할 중간 단계 없이 직접적인 작도가 어렵다는 점에 주목한 것이다. 3~5차례 정도이면 가능한 작도가 몇 차례의 시행이 추가되면서 복잡해지게 된다. 복잡성을 이유로 Euclid 기하에 기반을 둔 현 교과서는 단순 작도가 불가능한 조건은 합동 조건으로 채택하지 않은 것으로 생각된다.

이상에서 <Euclid 원론>에서는 가급적 작도에 기반한 증명 방식은 피하려고 했음을 알 수 있다. SAS 합동과 같이 다른 증명 방법을 생각하기 어려운 경우를 제외한 여러 법칙들은 작도에 기반한 증명이 가능함에도 다른 방법으로 논증이 이루어졌다. 이는 작도가 논증에까지 깊숙이 관여되어서는 안 된다는 인식을 보여준다.

4. 수와 대수를 다루는 수단

<Euclid 원론>에 낱낱의 수는 모두 선분으로 나타내어진다. 예컨대, 수를 AB라고 부르고 있다. 두 정수의 비, 즉 유리수로 나타낼 수 없는 양이 발견됨으로써 모든 선분이 반드시 정수 내지 정수의 비와 대응하지는 않는다는 것이 밝혀져 있었다. 때문에 Euclid는 『~은 ~의 배수(약수)이다』라는 표현 대신에 『~은 ~에 의해서 잴 수 있다』, 『~은 ~을 잰다』는 말을 쓰고 있다. 즉, 수 n과 또 다른 수 m 사이의 관계를 $n=km$과 같이 나타낼 수 있는 수 k가 존재할 때, n은 m에 의하여 잴 수 있다(measurable)는 것이다(김용운·김용국, 1986).

잰다는 것은 곧 작도를 의미한다고 볼 수 있다. Euclid가 '잴 수 있다'는 것을 정의하지는 않았지만, 관련 정의의 맥락에서 볼 때 눈금에 의한 측정이 아닌 작도임을 짐작할 수 있다. <Euclid 원론> 제 7권 정의 5에서 배수의 정의는 다음과 같다.

ε΄. Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

The greater (number is) a multiple of the lesser when it is measured by the lesser

[그림 Ⅲ-2] <Euclid 원론> 제 7권 정의 5 '배수의 정의'

5) 이 부분은 주장을 뒷받침할 근거를 찾기 어려우므로 본 연구의 자의적 해석 가능성이 있음.

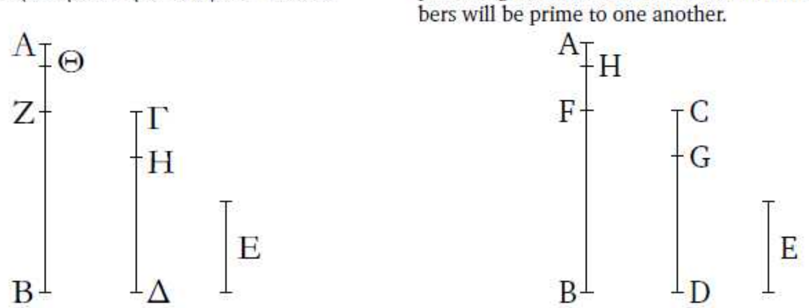
[그림 Ⅲ-2]의 정의에서 잰다는 의미는 작은 수로 큰 수의 작도가 가능하다는 것이다. 이는 서로소와 관련된 <Euclid 원론> 제 7권 법칙 1을 보면 더욱 명확하다.

α′.

Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δὲ ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Proposition 1

Two unequal numbers (being) laid down, and the lesser being continually subtracted, in turn, from the greater, if the remainder never measures the (number) preceding it, until a unit remains, then the original numbers will be prime to one another.



[그림 Ⅲ-3] <Euclid 원론> 제 7권 법칙 1

이 법칙에서 작은 수를 연속적으로 빼나가는 것은 곧 작도를 의미한다. <Euclid 원론>에서는 수를 선분으로 다루고, 이 수에 관한 조작 및 절차는 작도로 행해졌다. 따라서 두 수의 서로소는 (큰 수)와 (작은 수)를 빼나가는 작도가 단위가 남을 때까지 끝나지 않는 경우로 표현된 것이다.

작도는 비단 수를 다루는데 그치지 않고, 대수를 다루는 데에도 이용되었다. <Euclid 원론> 제 10권은 근대수학 출현 이전에는 최대의 칭찬과 두려움의 대상이기도 하였는데, 그 내용을 현대식으로 한 마디로 요약한다면,

$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{a-b})} + \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{a-b})}$$

와 같이 무리량 사이의 관계를 기하학적으로 자세히 다룬 것이다. 물론 그리스 수학에는 근호도 없었으며, 무리량을 다루는 대수방정식도 존재하지 않았다. 보조수단이 없음에도 충분히 치밀한 이론 전개가 가능했던 '무기호(無記號) 대수'는 주목할 만하다. 그들은 이들을 기하학적으로 다루고 있다. 실제, 제곱근이라든지 제곱근의 합의 제곱근을 나타내는 선분은 유리수[6]와 마찬가지로 쉽게 자와 컴퍼스만으로 작도 가능하다(김용운·김용국, 1986). 그리스 시대에는 수 뿐 만 아니라 대수까지 작도를 통해 조작함으로써, 근호나 대수방정식 없이 훌륭한 결과를 얻을 수 있었던 것이다.

Ⅲ장의 내용을 간략히 요약하면 <Euclid 원론>에서 작도와 관련된 내용은 명제와 구분없이 사용되었으며, 도형의 존재성 및 논증에서 보조선 도입에 활용될 만큼 논증 기하에 녹

6) 평행선 작도는 모든 유리수의 작도가 가능함을 의미한다.

아 있던 개념이었다. 하지만 작도가 보조선 도입 이상으로 논증에 개입하는 것은 가급적 자제하고 있었다. 또한 작도는 수와 대수를 다루는 수단이었다. 고대 그리스 시대의 작도는 현 교육에서 삼각형의 합동조건 도입을 위한 의도로만 활용되는 작도의 의미와 현격한 차이가 난다.

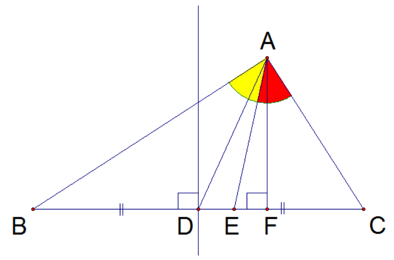
Ⅳ. 작도의 교육적 활용

1. 논증에 보조선 도입의 타당성 확보 수단으로서의 작도 활용의 이점

<Euclid 원론>의 작도는 기하학의 여러 부분에 개입되어 있는 반면, 오늘날 작도는 기하 단원과 밀접한 연계성을 갖지 못하는 한계를 지닌다. 본 연구에서는 작도와 기하 단원의 관련성을 높이는 한 방법으로 논증에 보조선 도입의 타당성 확보 수단으로서의 작도의 활용을 제안한다. 이 용도로 작도를 활용할 때 나타날 수 있는 교육적 이점은 다음과 같다.

첫째, 논증에 등장하는 보조선의 타당성 확보가 가능하다. 다시 말해, '그와 같은 보조선을 왜 그을 수 있는가?'에 대한 타당성 문제를 극복하는 것이 가능하다. 만약 직관적으로 딱 보면 그을 수 있는 것 아니냐고 반문하는 것은 마치 학생들이 증명 문제에서 '딱 보면 90°잖아요'라고 하는 논리와 다를 바 없다. 논증에 보조선 도입의 타당성을 작도로부터 확보하게 되면 직관으로부터 벗어나 보조선 사용이 가능하게 된다.

둘째, 보조선이 갖는 배경을 자연스럽게 이해할 수 있다. 먼저, 논증에서 보조선을 긋는 행위가 자연스러울 수 있다. 왜냐하면 이것을 긋는 작도 방법을 논증을 위해 탐구해보았기 때문이다. 더불어 논증에서 보조선을 복합적으로 사용하는 오류에서 자연스럽게 벗어나는 것이 가능할 수 있다. 각각의 보조선들은 작도의 입장에서 보면 명백히 달라진다. 왜냐하면 작도하는 방법 자체가 제각각 다르기 때문이다.



[그림 Ⅳ-1] 각종 보조선

[그림 Ⅳ-1]에서 변 BC의 중점 D를 통과하면서 변 BC와 수직인 직선은 '변 BC의 수직이등분선', 변 AD는 '중선', 변 AF는 '점 A에서 변 BC에 내린 수선', '반직선 AE는 '각 A의 이등분선'으로 명확한 구분이 가능해 진다.

여러 보조선이 일치하는 경우를 흔히 접할 수 있는데, 대표적인 도형이 이등변삼각형이다. 이등변삼각형에서는 꼭지각의 이등분선은 곧 밑변의 수직이등분선과 일치하게 된다. 논증 시 학생들이 흔히 범하게 되는 오류로 '각의 이등분선이며 밑변의 수직이등분선을 긋자'와

같은 복합 오류를 생각할 수 있다. 황재우·부덕훈(2015)은 기하 증명 기술에 나타나는 오류 중 하나로 근거 없는 진술을 들었는데, '원의 중심에서 한 원에 내린 수선은 그 현을 이등분한다'라는 명제 증명에서 원의 중심에서 현에 내린 수선이 그저 '수선'이라고 가정했음에도 이를 '수직이등분선'이라고 언급하고 이를 이용하여 증명을 해 나가는 경우를 예시하였다. 이것은 보조선의 정체성을 일치 여부를 통해 판단한 오류이다.

작도는 과정적 측면에서 보조선 정체성을 파악하게 하므로 일치 여부를 판단 기준으로 하는 오류를 극복하는 방안이 될 수 있을 것으로 생각된다. 구체적으로 [그림 Ⅳ-1]과 같은 삼각형에서의 작도가 오류 극복의 한 방법이 될 수 있다. [그림 Ⅳ-1]의 작도에 따르면, 각의 이등분선과 밑변의 수직이등분선은 명백히 다른 선임을 알 수 있다. 따라서 이등변삼각형에서 복합적 보조선을 긋기 위해서는 이들이 일치한다는 증명이 필요하다. 논증에 사용되는 보조선을 작도의 견지에서 생각하면 이 같은 인식이 자연스러워지며, 보조선의 복합적 사용이 갖는 문제점 인식이 보다 용이해질 수 있을 것으로 생각된다.

작도의 관점은 보조선이 어떠한 상황 하에서 그을 수 있는 선인지를 이해하는 데에 일조할 것으로 생각된다. 수선은 직선과 그 직선 위의 점, 혹은 직선 위에 있지 않는 한 점이 제공된 상황에서 그을 수 있는 직선이다. 수직이등분선은 선분이 제공된 상황에서, 각의 이등분선은 각이 제공된 상황에서 그을 수 있는 직선이다. 반직선이나 직선이 제공된 상황에서 수직이등분선은 생각할 수 없다. Mumma(2010)에 따르면, 점 A와 변 BC가 주어졌을 때 점 A에서 변 BC와 길이가 같은 선분 작도와 관련한 <Euclid 원론> 제 1권 명제 2는 이 작도가 주어진 선분과 점의 영향을 받는다는 점을 함의한다. 이처럼 작도는 논증의 기본이 되는 보조선이 어떠한 상황 하에서 그을 수 있는 선인지를 이해하는데 도움이 될 수 있다.

셋째, 유클리드 기하학이 체계적인 구도로 정의와 법칙들이 쌓여 이루어진 것임과 기초적인 것과 복잡한 성질 사이의 연계성을 깨닫게 할 수 있다. 학생들은 주어진 하나의 성질이 기초적인 정의나 공준에서 출발한 것임은 인식하지 못한 채 갑자기 나타난 결과로 받아들여 문제풀이에 초점을 맞추어 결과만을 알려는 경향이 있다. 그러나 논증 기하의 정당성을 작도로부터 확보할 수 있다면 유클리드 기하학의 많은 성질들은 작도라는 매개를 통해 연계성을 갖고 발전된 것임을 알게 될 가능성을 지닌다. 작도가 곧 합동 조건과의 연결에 그치지 않고 기하 논증 전반을 위한 기초 활동으로서 자리 매김하게 될 여지가 있다.

넷째, 작도의 본질적 의미를 부각시킬 수 있다. 유미영·최영기(2015)에 따르면, 학교수학에서 작도는 그 이면에 공리를 포함하여 수학적 대상의 존재성을 드러내는 도구 역할을 하는 것임에도 불구하고 이와 같은 본질적인 의미를 찾기 어렵다. 단지 자와 컴퍼스만을 이용하여 주어진 도형을 그려내는 기술적인 의미, 혹은 도구를 최소화한 흥미 있는 퀴즈 정도로 여겨지기도 한다. 작도를 그 행동만으로 보지 않고 그 이면에 있는 의미를 본다면 수학적 대상의 존재성을 나타내는 결정적인 단계로서 수학에서 핵심적인 역할을 하는 것으로 보는 것이 필요하다. 유미영·최영기(2015)의 주장에 비추어 볼 때, 논증에 보조선 도입의 타당성 확보 수단으로 작도를 활용하는 것은 작도의 본질적 의미를 이끌어내는데 일조할 것으로 본다.

다섯째, 작도에 기반한 합동조건 유도 과정과 논리적 일관성 유지가 가능하다. 작도에 기반하여 논증에서 보조선 도입의 타당성을 확보하는 행위는 현 교과서에서 논증의 기초가 되는 삼각형의 합동조건 도입을 위해 작도를 활용하는 것과 '작도에 의한 논증의 보완'이라는 측면에서 동질한 행위로 볼 수 있다. 사실 엄격한 논증의 관점에서 작도로부터 삼각형의 합동조건을 도입하는 것은 바람직하지 못하다. 전술하였듯 작도와 관련한 여러 법칙은 암묵적인 운동의 법칙이 내재되어 있다. 그럼에도 운동의 법칙이 포함된 작도는 교육적인 측면에서 직관과 엄밀성 사이의 가교 역할을 수행할 수 있다는 것이 본 연구의 입장이며, 이러한

측면에서 작도 활동이 갖는 엄밀성의 한계보다 장점에 주목하고자 한다. 엄밀한 증명에서 다소 양보를 요구하는 편이 합리적이라는 견해이다. 이 입장은 논증에서 보조선을 넘어선 작도의 개입을 원치 않은 <Euclid 원론>의 입장과 상반되지만, 교육적인 측면에서 논리적 일관성을 확보할 수 있는 방안이 될 수 있다. 따라서 본 연구에서 제안한 방법은 현행 지도 방식을 지지하는 한 방편이 될 수 있는 것으로 본다.

2. Euclid 도구로 작도 불가능한 보조선에 대한 관점 논의

작도가 논증에 영향을 미친다는 점을 고려할 때, 논증에서 작도의 허용 범위를 명확히 할 필요가 있다. 예컨대, Euclid 도구로 작도 불가능한 것은 증명에 사용될 수 없는 것인가에 대한 논의이다. 본 절에서는 이것에 대한 논의를 시도해 보고자 한다.

<Euclid 원론>의 작도에 기반한 증명 원칙은 Legendre에 의해 깨지게 된다. Legendre는 '각은 이등분될 수 있다', '주어진 직선에 대하여, 그 직선 위의 점에서나 그 직선 밖의 점에서 수선을 그을 수 있다', '주어진 직선에 대하여, 주어진 각과 일치하는 각을 만드는 직선을 그을 수 있다', '주어진 직선과 평행하면서 주어진 점을 지나는 직선을 그을 수 있다'는 것을 공준에 포함시킴으로써 '가설적 작도'를 허용한다(권석일, 2006). 다시 말해, 직접 작도를 하는 활동이 대상화되어 공준에 포함됨으로써, 작도 활동이 곧 공준의 위치로 승격되었다.

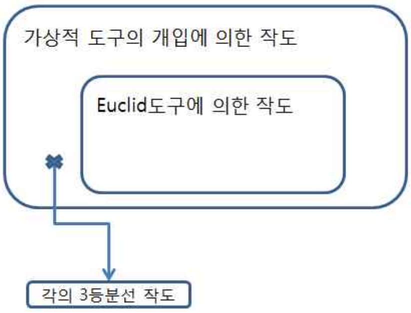
그럼에도 여전히 문제는 남아 있다. 그리스 시대의 수학자들은 Euclid 도구로 모든 것이 작도 가능할 것이라는 믿음을 지니고 있었던 것으로 생각된다. 하지만 3대 작도 불능 문제에서 보듯, 유클리드 도구로 작도할 수 없는 많은 것들이 존재한다. 그렇다면 다음 문제가 대두되는데, 논증에서 작도가 불가능한 선을 긋는 행위의 타당성은 어떻게 확보될 수 있느냐는 것이다.

앞서 언급한 바와 같이 Euclid는 작도를 통해 논증에서 여러 보조선 존재의 타당성을 확보하였다. Euclid가 각의 삼등분선을 포함하는 정리를 증명하지 않은 것은 존재성을 수립할 수 없었기 때문이다(Klein, 1972). 다시 말해, Euclid는 작도할 수 있다는 증명이 실제로 되어 있지 않으면 결코 직선이나 다른 도형을 논증에 사용하지 않았다.

근세의 책에서는 이 작도가 가능한 것으로 가정하고, 이 문제를 다른 모든 작도문제와 같이 장(章)의 끝에 몰아붙였다. 한 예로 각은 2등분되는 것으로 처음부터 상상하고 있고, 그 가능성과 작도법은 제시하지 않는다(Cajori, 1928). 이른바 가설적 작도를 행한 것이다.

그렇다면 고대에서 근세로 가는 과정에서 작도는 어떻게 발전해 왔는가? 작도 불가능한 문제와 관련하여 다양한 시도가 있었다. 예컨대, 레오나르도 다빈치는 원에 내접하는 정7각형의 근사적 작도를 제안하였다. 정7각형 작도는 독일의 위대한 화가 알프레드히트 뭘러에 의해서도 제시되었다. 어떤 경우에는 컴퍼스를 단 한 번만 벌려서 하는 작도를 수행하기도 했다. 자, 컴퍼스 또는 다른 부가 기구에 의해서 하는 작도가 때때로 제기되었다. 하지만 부가 기구가 도입된 작도는 기계적이어서 기학학적 방법은 아니라고 간주되었다(Cajori, 1928).

작도의 역사적 발전 과정을 고려할 때, 본 연구에서는 다음의 입장을 제안한다. 가상적 도구가 개입되어 작도될 수 있는 것이라면 작도 가능하다는 입장이다. 가상적 도구로는 각의 크기가 기록된 각도기나 길이를 잴 수 있는 자와 같은 도구가 될 수 있다. 가상적 도구는 상황별로 다르게 변화할 수 있으며, Euclid 도구에 제한된 작도 가능 범위를 확장하고자 하는 의도를 지닌다. 이 관점에 의해 논증에서 각의 3등분선을 긋는 작도 역시 타당성이 확보될 수 있으며, 논증에서 보조선을 긋는 행위가 더욱 자유스러워질 수 있게 된다.

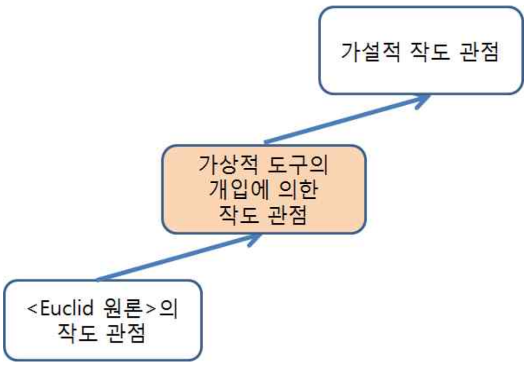


[그림 Ⅳ-2] 가상적 도구의 개입에 의한 작도의 적용 범위

이는 ‘가설적 작도’의 개념과 유사하다. 가설적 작도란 대상이 되는 점이나 선의 존재 및 작도가능성을 보여주지 않고 단지 가정하는 것이다. 증명 과정의 타당성은 그림의 정확도에 달려있는 것이 아니며, 증명의 본질은 그 존재성이나 작도 가능성보다 추론 과정에서의 논리적 타당성에 초점이 있기 때문이다. 다시 말해, 이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같음을 증명할 때, 보조선으로 도입하는 꼭지각의 이등분선은 직접적인 작도를 보여주지 않고 가설적 작도에 기초하여 증명이 이루어지는 것이다(장혜원, 1997a).

본 연구에서 제안한 ‘가상적 도구의 개입에 의한 작도’는 ‘가설적 작도’와 결과적인 측면에서는 유사하지만, 과정적인 측면에서 차이가 있다. 전자는 <Euclid 원론>의 입장과 유사하게 작도의 실질적 조작 그 자체를 여전히 중시하고 이 활동이 증명에 깊이 관여한다는 입장이며, 후자는 작도 조작 자체에 비해 추론에서의 논리적 타당성에 초점을 둔 가설적인 입장인 차이가 있다. ‘가상적 도구의 개입에 의한 작도’는 논증에 보조선 도입의 타당성을 확보하기 위한 근거로 작도 가능성을 든다는 점에서 존재성을 근거로 삼는 ‘가설적 작도’의 입장과 구별되며, 작도 가능성을 근거로 한 <Euclid 원론>의 입장과 닿아있다.

본 연구에서 제안한 ‘가상적 도구의 개입에 의한 작도’는 작도 불가능한 보조선을 허용하지 않는 ‘<Euclid 원론>의 작도 관점’에서 ‘가설적 작도’로 나아가는 매개 단계로 볼 수 있다. 다시 말해, 본 연구에서 제안한 작도 관점은 가설적 작도에 비해 실질적 활동에 근접하므로 <Euclid 원론>의 작도의 관점과 보다 적은 괴리를 갖는다.



[그림 Ⅳ-3] 논증에서 작도의 세 관점과 수준

Euclid는 작도가능성과 존재성을 동일한 개념으로 보고 있었던 것으로 생각된다. 하지만 작도가능성은 존재성에 포함된 개념이다. 작도 가능성이 존재성과 일치하지 않는 것은 작도 도구의 제한 때문이다. 가상적 도구가 개입되면 작도가능성의 범위는 보다 확장될 수 있으며, 존재성과 동일한 개념으로 승화 가능하다. 가상적 도구가 개입된 작도를 논증에 도입해도 하등의 문제가 없다. 왜냐하면 논증은 눈금 없는 자와 컴퍼스에 의한 작도 가능성보다 논리적 타당성에 초점이 있기 때문이다. 이런 측면에서 '가상적 도구의 개입에 의한 작도 관점'은 <Euclid 원론>의 작도 관점의 정신을 계승하면서 현대의 가상적 작도로 이행하는 징검다리가 될 수 있을 것으로 본다.

'가상적 도구의 개입에 의한 작도 관점'이 학생들에게 교육적 부담이 되지 않기 위해서는 작도가 수월해야 할 것이다. 학생들에게 익숙한 도구 사용이 작도를 수월하게 한다는 입장하에 본 연구는 눈금 있는 자와 눈금 있는 각도기를 가상적 도구로 사용할 것을 제안한다.

V. 맺는 글

본 연구에서 제안한 논증 매개 수단으로 작도를 활용하자는 주장이 곧 작도의 내용을 늘리자는 취지는 아니다. 단지 작도의 역할을 삼각형의 합동조건 유도에 국한시켜서는 안 된다는 것이다. 이를 위해 작도와 관련한 수학과 교육과정 구성을 위한 몇 가지 제언을 덧붙인다.

논증의 매개 수단이 되기 위해서는 논증에 사용되는 기본적인 작도는 반드시 추가될 필요가 있다. 대표적으로 각의 이등분선 작도, 수직이등분선 작도, 수선 작도, 평행선 작도 등을 생각할 수 있다. 현 교과서에는 학습 경감 차원에서 많은 부분들이 삭제되어 있다. 특히 증명에 주로 활용되는 보조선인 각의 이등분선 작도, 수직이등분선 작도, 수선 작도, 평행선 작도 내용이 삭제되어 있다(황선욱 외, 2013).

본 연구는 논증에서 보조선 사용의 타당성을 확보하고 기하 단원과 작도의 연계성 강화를 위해 논증 매개 수단으로 작도의 활용을 제안하는바, 기본적인 작도 내용의 추가를 제안한다.

작도와 논증 사이의 연계성 강화를 위해 논증에 사용되는 보조선이 등장할 때, 교과서 여백에 작도의 의미를 부각시키는 주석을 첨가할 것을 제안한다. 주석에 '~는 1학년에 학습한 작도로부터 그것을 그을 수 있는 타당성이 확보될 수 있다. 즉, 작도에 의해 ~을 긋는 것이 가능하다'라는 문구를 삽입하여 작도의 의미를 논증과 결부시키고 보조선을 긋는 활동에 대한 이해를 높일 필요가 있다.

마지막으로 작도 불가능한 보조선과 관련한 관점을 읽을거리와 같은 곳에 삽입할 것을 제안한다. 예컨대, 읽을거리에 다음 내용을 제시할 수 있다. '임의각의 3등분은 작도 불가능하지만 눈금이 있는 각도기가 제공된다면 작도 가능하다. 비록 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 활용한 기하학적 작도는 아니지만, 임의각의 3등분선을 그을 수 있는 타당성은 확보된다.' 이 내용으로 가상적 도구의 개입을 통해 논증에 기하학적 작도가 불가능한 보조선 도입의 타당성이 확보할 수 있음을 주지시킬 필요가 있으며, 이는 향후 가설적 작도로 나아가기 위한 발판이 될 것이다.

참고 문헌

강미광 (2010). 유클리드 기하학에서 삼각형의 합동조건의 도입 비교. **수학교육, 49**(1), 53-65.

권석일 (2006). **중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰**. 서울대학교 박사학위논문.

김용운·김용국 (1986). **수학사대전**. 서울: 우성문화사.

노은환·강정기 (2015). 증명에서 경험적 관점의 한계에 대한 중학교 3학년 학생들의 이해 연구. **수학교육, 54**(1), 13-30.

박명희·신경희 (2006). Clairaut의 <기하학 원론>에 근거한 7-나 단계 작도단원의 자료 개발과 적용에 관한 연구. **한국수학사학회지, 19**(4), 117-132.

야노 켄타로 (1997). **위대한 수학자들** (손영수 역). 서울: 전파과학사

유미영·최영기 (2015). 『유클리드 원론』 I 권 정리 22의 Diorism을 통해서 본 존재성. **수학교육학연구, 25**(3), 367-379.

유클리드 씀, 이무현 옮김 (1997) 기하학 원론 가-제 1, 2, 3, 4권: 평면기하. 서울: 교우사.

장혜원 (1997a). 중학교 기하 영역 중 작도 단원에 관한 고찰. **대한수학교육학회 논문집, 7**(2), 327-336.

장혜원 (1997b). **수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구: 표상 모델 개발을 중심으로**. 서울대학교 박사학위논문.

조영미·정연준(2013). 미적 체험을 강조한 수학 영재교육 프로그램 개발 연구: 발도로프교육의 작도교육의 활용. **한국학교수학회논문집, 16**(3), 621-636.

조완영·정보나 (2002). 7차 수학과 교육과정 작도 영역의 교과서와 수업사례 분석. **학교수학, 4**(4), 601-615.

한국교육과정평가원 (2014). **교과 교육과정 개선 방향 탐색 - 국어, 수학, 영어, 사회, 과학 교과를 중심으로**. 연구보고 RRC 2014-6.

한인기 (1999). 작도 문제의 해결 방법. **수학교육논문집, 9**, 153-164.

한인기·이정순(2009). 한 변의 중점과 다른 두 점이 주어진 삼각형 작도문제의 해결에 대한 연구. **한국학교수학회논문집, 12**(4), 365-388.

황선욱·강병개·한길준·한철형·권혁천·김의석·유기종·정종식·김민정(2013a). **중학교 수학 1 교사용지도서**. 서울: 좋은책 신사고.

황선욱·강병개·한길준·한철형·권혁천·김의석·유기종·정종식·김민정(2013b). **중학교 수학 2 교사용지도서**. 서울: 좋은책 신사고.

황선욱·강병개·한길준·한철형·권혁천·김의석·유기종·정종식·김민정(2013c). **중학교 수학 3 교사용지도서**. 서울: 좋은책 신사고.

황재우·부덕훈(2015). 중학교 기하 증명의 서술에서 나타나는 오류의 유형 분석. **수학교육, 54**(1), 83-98.

Albrecht, W. A. (1952). *A critical and historical study of the role of the ruler and compass constructions in the teaching of high school geometry in the united states*, Doctorial Dissertation, the Ohio State University, UMI Dissertation Services.

Cajory, F.(1928). *A history of mathematical notations (Volume 1 & 2)*. La salle, IL: The Open Court.

Cajory, F.(1991). *A history of mathematics fifth edition*. AMS Chelsea Publishing.

Fitzpatrick, R. (2007). *Euclid's elements of geometry. The Greek text of J. L. Heiberg(1883-1885) from Euclids Elementa, edidit et Latine interpretatus est I. L. Heiberg, in aedibus. B. G. Teubneri, 1883-1885.* (R. Fitzpatrick, Ed., & R. Fitzpatrick, Trans.) Richard Fitzpatrick, 2007.

Greenberg, M. J. (1997). **Euclid 기하학과 비Euclid 기하학**. (이우영 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1974년 출판)

Klein, F. (1939). *Elementary mathematics form an advanced standpoint*. Dover Publications.

Klein, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.

Knorr, W. R. (1986). *The ancient tradition of geometric problems*. Birkhäuser Boston.

Morrow, G. R. (1970. *Proclus*: A commentary on the first book of Euclid's Elements. Princeton University Press.

Mumma, J.(2000). Proofs, pictures, and Euclid. *Synthese 175*, 255-287.

Shibli, J. (1932). *Recent development in the teaching of geometry*. The Maple Press.

Smith, D. E. (1923). *Essentials of plane geometry*. Ginn and Company.

A Study on the Meaning of Construction in Euclid Elements[7)]

Kim, Chang Su[8)] · Kang, Jeong Gi[9)]

Abstract

The construction in the ancient Greek era had more meanings than a construction in the present education. Based on this fact, this study examines the meaning of the current textbook. In contrast, we have extracted the meaning of the constructions in Euclid Elements. In addition, we have been thinking about what benefits can come up if the meaning of the construction in Euclid Elements was reflected in current education, and suggested a way to exploit that advantage. As results, it was confirmed that the construction in the current textbook was merely a means for introducing and understanding the congruent conditions of the triangle. On the other hand, the construction had four meanings in Euclid Elements; Abstract activities that have been validated by the postulates, a mean of demonstrating the existence of figures and obtaining validity for the introduction of auxiliary lines, refraining from intervening in the argument except for the introduction of auxiliary lines, a mean of dealing with numbers and algebra. Finally we discussed the advantages of using the constructions as a means of ensuring the validity of the introduction of the auxiliary line to the argument. And we proposed a viewpoint of construction by intervention of virtual tools for auxiliary lines which can not be constructed with Euclid tool.

Key Words : Euclid Elements, Construction, The meanings of construction

Received June 8, 2017
Revised April 18, 2017
Accepted April 22, 2017

---

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97-03

8) Namhae Woman Middle School (cupncap@gmail.com)
9) Jinyeong Middle School (jeonggikang@gmail.com), Corresponding Author