대한수학교육학회지 <학교수학> 제 19 권 제 2 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 19, No. 2, 345 ~ 367. Jun 2017

그래프 표현과 해석에서 드러나는 두 중학생의 비례 추론 능력에 대한 사례 연구[1)]

마 민 영[*] · 신 재 홍[**]

본 연구의 목적은 함수적 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 중학생의 비례 추론 능력과 그에 따른 그래프에 대한 이해를 탐색하는 것이다. 중학교 1학년 4명의 학생을 대상으로 약 3개월간(2016.5.~2016.7.)에 걸쳐 일차함수에 대한 수업을 실시하였고, 수집된 자료를 분석하는 과정에서 학생 B의 경우 나머지 학생들과 달리 그래프에 대한 이해의 변화가 없다는 점이 드러났다. 이에 본 연구는 학생 B와 (1차시부터 8차시까지 학생 B와 함께 수업에 참여한) 학생 A가 주어진 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 그래프에 대한 이해의 차이와 그 원인을 비교, 분석하였다. 그 결과, 상황을 그래프로 나타내고 해석하기 위해 상황에 제시된 두 변량의 값들을 조정하여 또 다른 값들을 찾는 과정에서 학생 A와 학생 B가 사용하는 비례 해결 전략이 서로 달랐으며, 학생 B는 그의 제한된 비례 지식으로 인해 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 데 어려움을 겪었다.

I. 서 론

함수의 그래프는 함수를 시각적으로 표현하는 도구로서(교육부, 2015), 학교 수학에서 중요하게 다루어지고 있다. 그럼에도 불구하고 학생들은 함수를 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 많은 어려움을 겪고 있으며(마민영 · 신재홍, 2016; 박선화 · 변희현 · 주미경, 2011; 이종희 · 김부미, 2003; 이화영 · 류현아 · 장경윤, 2009; Monk, 1992), 양들 사이의 관계를 표현하고 해석하는 데 필요한 기초 지식이 다소 부족한 상태로 함수의 그래프에 대한 지식을 학습하고 있다 (Lobato & Siebert, 2002; Moore & Thompson, 2015; Oehrtman, Carlson & Thompson, 2008). 이에 대해 이종희와 김부미(2003)는 그래프의 교수 · 학습에서 내용적인 측면에 대한 이해보다 그래프를 그리는 기술적인 측면이 중시되기 때문이며, 이러한 이유로 교사와 학생 모두 그래프의 역할과 필요성을 잘 알지 못한다는 점을 지적하였다.

이를 보완할 수 있는 방안으로 2015 개정에 따른 수학과 교육과정에서는 상황에 제시된 두 양 사이의 관계를 그래프로 표현하고 해석하는 과정을 거친 후, 함수의 개념을 도입하도록 제안하고 있다(교육부, 2015). 이는 함수의 그래프의 도입에서 (2009 개정에 따른 수학과 교육과정이 반영된 교과서에서 그래프를 도입하는 방식인) 함수식이 먼저 제시되고 이를 그래프로 변환하는 활동보다 상황에서 변화하는 양과 그들 사이의 불변인 관계를 그래프로 표현하고 해석하는 활동이 더 중요하게 다루어져야 한다는 것을 의

* 인동중학교, mmy8724@naver.com (제1 저자)
** 한국교원대학교, jhshin@knue.ac.kr (교신저자)
1) 본 연구는 제1 저자의 박사학위 논문의 일부 내용을 포함하고 있음.

미한다.

우리나라 중학생들은 함수를 학습하기 이전에 초등학교에서 두 양 사이의 관계를 비로 표현하고 해석하는 활동을 경험하고 있다. 권오남, 박정숙, 박지현(2007)은 초등학교에서 형성된 비례 지식이 함수 학습과 밀접하게 관련되어 있음을 지적하며, 초등학교와 중학교 과정에서 다루어지는 비례 지식의 연결성을 고려한 교수·학습 자료 개발의 필요성을 제안한 바 있다.

그러나 대부분의 비례 추론에 대한 연구들(고은성 · 이경화, 2007; 권미숙 · 김남균, 2009; 김정원 · 방정숙, 2013; 박정숙, 2008; 안숙현 · 방정숙, 2008)은 초등학교에서 다루어지는 비례 문제의 해결에서 문제 해결 전략과 비례 추론의 수준에 주목할 뿐, 학생들의 비례 지식이 비 개념을 포함하는 더 상위개념으로 어떻게 확장되어 적용되고 있는지를 밝힌 것으로 보기는 어렵다. 또한 함수 그래프의 교수·학습에 대한 여러 연구들에서는 학생들이 주어진 식을 그래프로 변환하는 행위로부터 드러나는 오류와 그 변화에 주목하고 있다(손홍찬 · 류희찬2005; 안가영 · 권오남, 2002; 이광상 · 조민식 · 류희찬, 2006; 이종희 · 김부미, 2003). 마민영, 신재홍, 이수진, 박종희(2016)는 함수의 그래프에 대한 중학생들의 초기 이해와 그 변화를 탐색하였지만, 일정한 변화율을 포함하는 상황에 대한 그래프 표현과 해석에서 발현되는 이전 지식과 경험에 주목한 것은 아니다. 이에 본 연구는 학생들이 주어진 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 차이점을 선행 연구를 통해 함수 학습의 기저가 되는 지식 요소로 제시되어 왔던 비례 추론의 관점에서 분석하고 그에 따른 그래프에 대한 이해의 차이를 상세히 보고하고자 한다.

이를 위해 본 연구를 위한 연구 문제는 다음과 같이 설정하였다.

- 연구 문제 1: 그래프에 대한 학생들의 초기 이해와 그 변화는 어떠한가?
- 연구 문제 2: 주어진 상황을 그래프로 표현하는 과정에서 드러나는 비례 추론은 어떠하며, 학생간의 차이점은 무엇인가?
- 연구 문제 3: 직선 모양의 그래프를 해석하는 과정에서 드러나는 비례 추론은 어떠하며, 상황을 그래프로 표현하는 과정에서의 비례 추론과 어떻게 연결되는가?

II. 선행 연구

1. 함수의 그래프와 이전 지식과의 연결성

우리나라 교육과정에서 함수의 그래프는 중학교에서 처음으로 도입되고 있지만, 초등학교에서는 연속적인 변량에 대한 자료를 수집하여 그래프로 나타내기와 같은 함수 개념의 기초가 되는 활동을 포함하고 있다(이화영 외, 2009).

이화영 등(2009)은 초등학교 과정에서 형성된 그래프 지식과 중학교에서 학습하는 함수 지식 사이의 연결성을 살펴보기 위해 초등학생을 대상으로 함수의 그래프에 대한 수업을 실시하였다. 그들은 두 변량인 시간과 거리 사이의 비가 일정한 상황을 원점부터 시작하지 않는 직선 모양의 그래프로 표현하는 학생에 주목하였고, 그 이유에 대해 점의 자취가 모여 직선이 되는 경험과 0시간일 때 좌표를 표현하는 경험이 부족하기 때문이라고 설명하였다. 이에 대해 마민영 등(2016)은 그래프 표현에서 학생들이 겪는 어려움에 대한 원인을 경험의 부족함으로 설명하기보다, 주어진 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 행위로부터 추론되는 양들의 변화와 연속성에 대한 인식에 주안점을 두고 그 원인을 진단할 것을 제안하였다. 그러나 그들은 두 변량의 값을 찾고 이를 그래프로 표현하고 해석하는 행

위에서 드러나는 학생들의 이전 지식과 경험에 주목한 것은 아니다. 이에 본 연구는 교육과정에서 함수의 도입 방식의 변화에 맞춰, 즉 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 활동을 거친 후 함수 개념을 도입하는 맥락에서 학생들이 일정한 변화율을 포함하는 상황을 그래프로 표현하는 과정, 특히 한 변량의 임의의 값에 대응하는 또 다른 변량의 값을 찾거나 임의의 변화량에 대응하는 또 다른 변화량을 구하는 과정에서 드러나는 학생들의 이전 지식과 경험이 어떠한지, 그에 따른 그래프에 대한 이해와 그 변화를 분석 및 제시하고자 한다. 이를 위해 다음절에서는 두 이산량 사이의 일정한 비례 관계를 찾고, 표현하고, 해석하는 활동에서 학생들의 추론에 주목한 연구 결과들을 살펴본다.

2. 비례 추론

가. 비례 추론의 의미와 중요성

비례 추론(proportional reasoning)은 다양한 정보를 저장하고 처리하는 인지 능력으로 공변(co-variation)과 다중 비교를 포함하는 수학적 추론의 한 형태로 볼 수 있다(Lesh, Post & Behr, 1988). Vergnaud(1988)는 간단하거나 복잡한 비례 문제로 분석되어질 수 있는 모든 상황을 곱셈 개념 체계(multiplicative conceptual field)라고 불렀고, 이와 관련된 수학 개념으로 나눗셈, 분수, 비, 비례, 선형함수를 제안하였다. 이는 비와 비례 개념이 곱셈 개념 체계에 속한 개념들과의 연결성을 고려해야 하고, 함수 영역을 포함한 수학 학습에서 중요하게 다루어져야 할 필요가 있다는 점을 시사한다.

Lo와 Watanabe(1997)에 따르면, 비례 지식을 사용하여 두 양의 변화와 그들 사이의 불변성(constancy)을 인식하는 능력은 대수, 함수의 학습과도 밀접한 관련을 맺고 있다. 이러한 이유로 학생들의 비례 개념에 대한 관심이 점차 커지고 있지만, 비례 추론에 대한 대부분의 연구들은 비례 과제의 해결에서 드러나는 학생들의 어려움에 주안점을 두고 있는 실정이다. 예컨대, 고은성과 이경화(2007)는 초등학교 6학년 학생을 대상으로 질적 사례연구를 실시하였고, 그 결과 비례 문제의 해결에서 비례식을 사용하더라도 비와 비율의 개념을 비례식과 유의미하게 연결시켜 생각하지 못하는 학생의 사례를 제시하였다. 안숙현과 방정숙(2008)은 5, 6, 7학년 학생들의 비례 추론 능력을 조사 및 분석하였는데, 전체의 33.7%의 학생들이 비례가 아닌 상황에서 비례적 방법을 적용하여 문제를 해결하였다. 박정숙(2008)은 학생들의 비례 문제 해결 전략과 비례 상황인 것과 아닌 것을 구분하는 비례상황의 인지와의 관계를 탐색하였고, 그 결과 학생들이 점차 비례상황을 구분해가는 모습을 보였지만 정비례와 반비례 상황을 구분하는 데 어려움을 겪고 있음을 보고하였다.

본 연구는 학생들의 비례 추론에 대한 기존의 연구들을 토대로 하여 두 변량 사이의 비가 일정한 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 관찰되는 학생들의 일관된 사고 패턴을 분석하고자 한다. 이를 위해 다음에서는 비례 문제의 해결에서 사용하는 비례 문제 해결 전략을 살펴본다.

나. 비례 문제 해결 전략

본 연구에서는 학생들의 비례 추론을 세밀하게 분석하기 위하여 선행연구(Kaput & West, 1994; Lo & Watanabe, 1997; Singh, 2000)에서 소개된 비례 문제 해결 전략을 활용하고자 한다. 비례 문제 해결 전략은 구성(build up) 전략, 생략된 구성(abbreviated build up) 전략 및 스칼라

연산 추론(scalar reasoning), 단위화(unit) 전략, 비 단위 구성(ratio-unit/build up) 전략, 함수적 추론(functional reasoning)과 같이 5가지로 구분할 수 있으며, 각 전략을 사용하는 학생의 특징은 다음과 같다. '철수는 4원으로 사탕 6개를 샀다. 영희가 12원을 가지고 있다면 사탕 몇 개를 살 수 있는가?'라는 문제에서 구성 전략을 사용하는 학생은 합성 단위(composite unit) 4와 6을 함께 조정하여 '4원 사탕 6개', '8원 사탕 12개', '12원 사탕 18개'를 만들고, 12원에 대응하는 사탕 18개를 답으로 택한다. 생략된 구성 전략 및 스칼라 연산 추론으로 접근하는 학생은 반복된 덧셈을 생략하고 4원과 12원 사이의 곱셈 관계, 즉 12원은 4원의 3배임을 찾고, 4원에 대한 사탕의 개수 6에 3을 곱하여 답을 구한다. 단위화 전략을 사용하는 학생은 1원에 대응하는 사탕의 개수 또는 사탕 1개에 대응하는 가격을 찾고, 곱셈 연산을 사용하여 12원에 대응하는 사탕의 개수를 구한다. 비 단위 구성 전략을 사용하는 학생은 '4원 사탕 6개', '8원 사탕 12개'와 같이 합성 단위 4와 6을 조정하여 이를 반복할 수 있고, 4와 6을 더 작은 부분들로 세분하여 '2원 사탕 3개'를 찾을 수 있다. 나아가 '4원 사탕 6개'와 '2원 사탕 3개'로부터 '(4원에 2원을 더한) 6원 (4원에 대한 사탕 6개에 2원에 대한 사탕 3개를 더한) 사탕 9개'를 이끌어낼 수 있다. Lo와 Watanabe(1997)는 이러한 전략이 학생들에게 분수나 소수의 연산을 피할 수 있게 하고 미지값 찾기 문제를 성공적으로 해결하는 데 사용될 수 있지만, 기존의 연구들에서 거의 언급되지 않았음을 지적한 바 있다. 함수적 추론을 사용하는 학생은 돈의 양과 사탕의 개수를 변화시키더라도 그들 사이의 변하지 않는 관계를 찾고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

III. 연구 방법

1. 연구 방법 개관

본 연구의 목적은 함수적 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 중학생간의 비례 추론 능력과 그에 따른 그래프에 대한 이해의 차이를 탐색하는 것이다. 이를 위해 중학교 1학년 학생 4명을 대상으로 실시한 교수실험(Steffe & Thompson, 2000)에서 수집된 자료를 분석하였다. 교수실험법은 교수·학습 상황에서 학생들의 학습 과정과 수학적 사고를 직접 경험하고 연구하기 위한 것으로, 교수실험에서 교사는 학생들의 추론 방식에 대한 가설을 세우고, 이를 수정 및 검증하는 동시에 학생들의 사고 수준에 기초하여 수학적 발달을 이끌 수 있는 과제와 활동을 지속적으로 제시해나갔다(Hackenberg, 2009). 이에 본 연구는 교사 및 연구자가 교수실험을 진행하는 과정에서 학생의 추론에 대해 세운 가설은 무엇인지, 그에 따라 학생들에게 제시한 과제와 과제의 해결에서 보인 학생의 반응을 면밀히 살펴본다.

2. 자료 수집 및 분석 방법

본 연구에서 분석된 수업 자료는 일차함수를 학습한 경험이 없는 중학교 1학년 학생 네 명을 대상으로 약 3개월(2016.5.~2016.7.)동안 실시된 교수실험에서 수집한 것이다. 수업에서는 학생의 모든 행위와 행위로부터 드러나는 사고 과정을 관찰하고 분석하기 위하여, 카메라 3대와 녹음기 1대를 사용하여 참여 학생들의 수학적 활동과 기록물의 생성 과정을 촬영하였다. 카메라는 각 학생들의 기록 행위와 학생의 표정, 행동, 교사와의 상호작용, 학생간의 상호작용 등 수업의 전체 장면을 담기 위해, 녹음기는 학생의 언어적

표현, 교사와 학생의 대화, 학생간의 대화를 녹음하기 위해 사용되었다[2]. 또한 학생들이 수업에서 기록한 활동지, 연구자가 작성한 메모, 다음 차시의 수업 과제를 구성하기 위한 연구자간의 회의 일지도 수집되었다. 본 연구는 수집된 모든 자료를 반복적으로 보면서 학생 행위에 대한 기록을 지속적으로 만들어 나갔고, 학생들의 일관된 사고패턴, 변화, 제한점을 설명할 수 있는 행위의 유사성에 근거하여 학생간의 함수의 그래프 표현과 해석의 차이점과 그 원인을 추론하였다(Hackenberg, 2009).

3. 연구 참여자와 과제 소개

수집된 자료를 분석하는 과정에서 학생 A, (본 연구의 연구대상이 아닌) 학생 C와 학생 D는 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 그래프에 대한 이해의 발달을 보인 반면, 학생 B는 모든 수업에서 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 데 어려움을 겪고 있다는 점이 드러났다. 구체적으로, 학생들은 사전검사에서 두 자동차의 이동 시간과 거리의 값이 주어질 때 시간과 거리 사이의 관계를 그래프로 나타내는 [과제1]을 풀었고, [과제1]에서 네 학생 모두 좌표평면 상에 몇 개의 점을 찍은 후 점들을 선으로 연결하였지만, 점들을 이은 선이 아닌 점들에만 주안점을 둘뿐이었다. 연구자들은 학생들의 그래프에 대한 초기 이해의 변화를 확인하기 위해, 마지막 차시의 수업에서는 [과제1]에서 학생 자신들이 표현한 그래프를 다시 해석하는 [과제6]을 새로운 과제로 제시하였다. [과제6]의 해결과정에서 학생 B와 나머지 학생들의 그래프에 대한 이해의 차이가 분명하게 드러났다. 이에 대한 원인을 분석하기 위해 학생 B가 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 모든 과제의 해결과정에 주목한 결과, [과제2]와 [과제3]에서 두 이산량 또는 연속량들 사이의 관계를 그래프로 표현하기 위해 과제에 제시된 한 변량의 값의 단위를 더 세분하여 그에 대응하는 또 다른 변량의 값을 찾는 과정에서 학생 B와 (학생 B와 함께 수업에 참여한) 학생 A가 사용하는 비례 해결 전략이 서로 달랐다. 이러한 학생간의 차이는 상황에 제시된 연속적으로 변화하는 변량들 사이를 직선 모양인 그래프로 나타낸 후 이를 해석하는 과정([과제4]와 [과제5])에서도 유사하게 나타났다. 네 학생의 문제 해결과정 모두 흥미롭지만, 본 연구는 학생간의 두 변량 사이의 관계에 대한 이해의 차이가 분명하며, 각 학생들의 이해가 일관되게 드러난 학생 A와 학생 B의 그래프 표현과 해석에 주목하고자 한다.

학생 A와 학생 B는 중학교에서 다루어지는 함수의 그래프를 학습한 경험이 없지만, 초등학교에서 두 연속량 사이의 관계를 그래프로 나타내기와 같은 함수 개념의 기초가 되는 활동을 경험한 학생들로, 좌표평면 상의 변량을 읽고 표시할 수 있다. 이에 본 연구는 공변하는 두 양 사이의 비가 일정한 상황을 그래프로 표현하거나 해석할 때, 상황에 제시된 두 변량의 값으로부터 한 변량의 값에 따른 또 다른 변량의 값을 찾거나 두 변화량 사이의 관계를 찾는 행위에 주목하고자 한다(<표 III-1> 참고). 이러한 행위는 초등학교에서 다루어지는 두 이산량 사이의 비례 관계와 한 변량의 값이 주어질 때 또 다른 변량의 값을 찾는 비례 문제의 해결과 관련된다. 따라서 비례 추론의 관점에서 주어진 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 나타나는 학생간의 그래프에 대한 이해의 차이점과 그 원인을 분석 및 제시하고자 한다.

2) 카메라를 통해 오디오 정보가 녹음되긴 하였지만, 분석 과정에서 명확한 오디오 정보를 얻기 위해 별도의 녹음기를 사용하여 수집하였다.

<표 III-1> 분석에 활용된 수업과 과제 분석

수업차시(일자)	과제번호[3]	과제에 제시된 상황
사전검사(2016.5.9.)	7번 [과제1]	시간과 거리 사이의 관계를 (직선 모양의) 그래프로 나타내기
1차시(2016.5.31.)	8번 [과제2]	콘의 중량과 가격 사이의 관계를 (직선 모양의) 그래프로 나타내기
2차시(2016.6.1.)	10번 [과제3]	고기 중량과 가격 사이의 관계를 (몇 개의 점들로 이루어진) 그래프로 나타내기
4차시(2016.6.11.)	12번 [과제4]	시간과 위치 사이의 관계를 나타낸 (직선 모양의) 그래프 해석하기
7차시(2016.6.21.)	14번 [과제5]	언어로 표현된 일정한 변화율을 해석하여 두 변량 사이의 관계를 나타낸 (직선 모양의) 그래프 해석하기
9차시(2016.7.12.) (학생 A만 참여)	20번 [과제6]	주어진 ([과제1]에서 학생 C가 나타낸) 그래프에 적절한 상황 만들기
12차시(2016.7.21.) (학생 B와 학생 D 참여)		주어진 ([과제1]에서 학생 B가 나타낸) 그래프에 적절한 상황 만들기

IV. 연구 결과

본 절에서는 함수적 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 중학생간의 비례 추론 능력과 그래프에 대한 이해의 차이를 살펴본다. 먼저, 학생간의 그래프에 대한 초기 이해와 그 변화의 차이점을 제시한다. 다음으로, 이러한 차이점의 원인 가운데 하나로 두 변량 사이의 비례 관계를 포함하는 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 비례 해결 전략의 차이를 제시한다.

1. 그래프에 대한 초기 이해와 그 변화

아래의 [과제1]은 흰 자동차와 파란 자동차가 각각 '30km에 20분'과 '60km에 30분'을 달릴 때, 시간과 거리 사이의 관계를 그래프로 표현하는 문제이다. 학생 A와 학생 B 모두 [과제1]의 상황에 주어진 시간과 거리의 값을 좌표평면 상의 점으로 나타낸 후, (그 점 또는 원점과 같은) 점들을 직선으로 연결하였다. 교사[4]는 교수실험이 끝날 때쯤 학생들의 그래프에 대한 이해의 변화를 확인하고자 [과제1]에서 자신들이 그렸던 그래프를 해석해 보고 그 그래프에 적절한 상황을 만드는 [과제6]을 제시하였다(<표 IV-1> 참고).

<표 IV-1> 학생들에게 제시된 [과제1]과 [과제6]

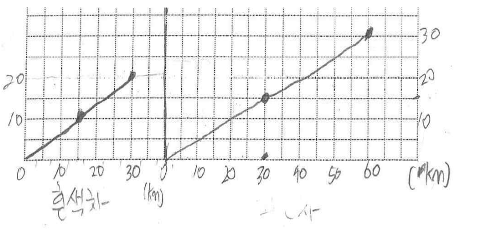
[과제1] 흰색 자동차는 30를 달리는데 20분이 걸렸다. 파란 자동차는 60를 달리는데 30분이 걸렸다. 이 상황을 그래프로 나타내시오.
[과제6] 아래에 제시된 그래프(학생 A에게는 [과제1]에서 학생 C가 나타낸 그래프([그림 IV-2](위) 참고)를 제시, 학생 B에게는 [과제1]에서 학생 B가 나타낸 그래프(([그림 IV-3] 참고)를 제시)에 적절한 상황을 만드시오.

3) 본 연구에서는 과제 번호 7번, 8번, 10번, 12번, 14번, 20번을 각각 [과제1], [과제2], [과제3], [과제4], [과제5], [과제6]으로 기술하겠다.
4) 본 논문의 제1 저자가 교수실험을 진행하고 '교사' 역할을 수행하였다.

아래에서는 교수실험에서 그래프에 대한 이해가 더 정교화된 학생 A와 수업 내내 일관된 추론의 양상을 보인 학생 B로 나누어, 그들의 그래프에 대한 초기 이해와 그 변화를 살펴본다.

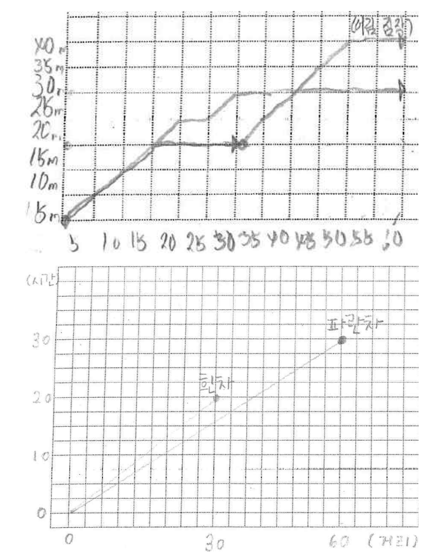
가. 그래프의 이해가 더 정교화된 학생 A

학생 A는 [과제1]에서 시간과 거리 사이의 관계를 아래 [그림 IV-1]과 같이 표현하였다.



[그림 IV-1] [과제1]에서 학생 A가 나타낸 그래프

학생 A는 [그림 IV-1]에서 보이는 바와 같이, 가로축과 세로축에 0부터 시작하여 10씩 더한 숫자를 적고, (0,0)부터 시작하여 오른쪽 위로 향하는 직선을 그리고 직선 위에는 두 개의 점을 찍었다. 가로축 아래에 'km'가 적혀있는 것으로 보아, 가로축에 거리, 세로축에 시간을 나타낸 듯하다. 이후, 자신의 그래프를 꺾은선그래프라고 부르며, 점은 한 지점이고 선은 변화를 나타낸 것이라고 설명하였다. 교사가 학생 A에게 곡선이 아닌 직선 모양의 그래프로 나타낸 이유를 묻자, 학생 A는 "얘는 하나만 설명했는데, 하나만 보고 직선으로 이은 것이지, 속도가 120이 되었다가 10이 되었다가 될 수도 있으니까. 이건 평균속력으로 해서"라고 설명하였다. 이로부터 학생 A는 1) 상황에 제시된 두 변량인 시간과 거리 사이의 일정한 비인 평균속력을 고려하여 그들 사이의 관계를 그래프로 표현한 것이며, 2) 움직이는 동안 순간 속력은 변할지라도 평균 속력을 고려한 그래프는 직선 모양의 그래프로 표현됨을 인지하고 있는 것처럼 보인다. 그러나 교사가 학생 A에게 (본 연구의 연구대상이 아닌) 학생 C와 학생 D가 그린 그래프([그림 IV-2] 참고)의 차이점을 물었을 때, 학생 A는 "결과는 같잖아요"라고 말할 뿐 차이점을 명확하게 설명하지 않았다. 학생 A가 언급한 '결과'는 학생 C와 학생 D의 그래프에서 공통점인 (30,20)과 (60,30)을 의미하는 것으로, 학생 A 역시 좌표평면 상의 점들을 연결한 선보다 두 점인 (30,20)과 (60,30)에 더 주안점을 두었기 때문에 두 그래프의 차이점을 설명할 필요가 없다고 생각한 것이다. 따라서 학생 A는 움직임에서 순간 속력이나 평균 속력을 고려할 수 있지만, 시간과 거리 사이의 관계를 나타낸 그래프에서는 두 점인 (30,20)과 (60,30)에만 주목할 뿐 점들을 연결한 선을 두 양 사이의 관계로 해석할 필요성을 전혀 못 느꼈던 것으로 보인다.

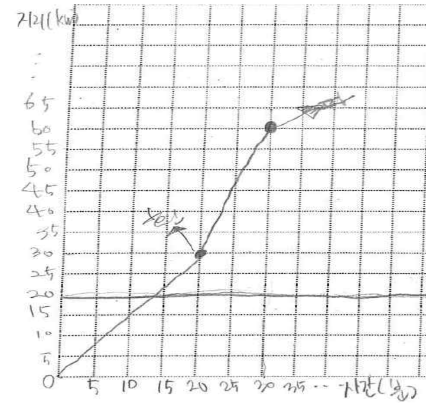


[그림 IV-2] [과제1]에서 (본 연구의 연구대상이 아닌) 학생 C(위)와 학생 D(아래)가 나타낸 그래프

한편, 교사는 교수실험이 끝날 때쯤 학생들의 그래프에 대한 이해의 변화를 확인하고자 [과제1]에서 학생들이 그린 그래프에 적절한 상황을 만드는 [과제6]을 제시하였다. 학생 A는 학생 C가 나타낸 그래프([그림 IV-2](위) 참고)에서 점들 사이를 잇는 선을 두 양 사이의 관계로 해석하였다. 구체적으로, 세로축에 쓴 '$5m$'를 '5(meter)'로 해석하며, 가로축에 평행한 직선에 대해 시간의 변화와 함께 "속도 0으로 정지 비행하였다"라고 설명하였다. 이는 함수의 그래프에 표현된 직선상에 있는 임의의 점을 두 양 사이의 관계로 해석한 것으로, 즉 교수실험이 진행되는 동안 그래프에 대한 이해가 더 정교화된 것으로 보인다.

나. 수업 내내 그래프에 대한 이해가 일관되게 드러난 학생 B

아래 [그림 IV-3]은 [과제1]에서 학생 B가 두 변량인 시간과 거리 사이의 관계를 나타낸 그래프이다.



[그림 IV-3] [과제1]에서 학생 B가 나타낸 그래프

학생 B는 [그림 IV-3]과 같이, 가로축에 '시간(분)', 세로축에 '거리(km)'를 적고, 좌표평면 상에 $(20,30)$과 $(30,60)$ 각각에 큰 점과 점 위에 '흰'과 '파'를 쓴 후, 원점에서부터 시작하여 $(20,30)$까지 직선으로 연결하였고, 두 점 $(20,30)$과 $(30,60)$을 선으로 이었다. 학생 B의 그래프에 대한 설명을 듣지 못하여 그의 생각을 정확히 추론할 수 없지만, 학생 B는 상황에 주어진 '흰색 자동차 $30km$를 달리는데 20분'을 $(20,30)$으로, '파란 자동차 $60km$를 달리는데 30분'을 $(30,60)$으로 나타낸 후 원점과 $(20,30)$을, $(20,30)$과 $(30,60)$을 직선으로 이은 것으로 추정된다.

학생 B는 [과제6]에서, 즉 [과제1]에서 자신이 나타낸 직선 모양의 그래프([그림 IV-3] 참고)에 적절한 상황을 만드는 문제를 풀 때, 그래프 오른쪽에 '흰=$30km$에 20분, $\frac{30}{20}=1.5$'와 '파=$60km$에 30분, $\frac{60}{30}=2$'를 적었다. 학생 B는 [과제1]에서와 같이 좌표평면 상의 점으로 표현된 $(20,30)$과 $(30,60)$에 여전히 주목하고 있으며, x좌표와 y좌표를 각각 두 자동차의 총 이동 시간과 이동 거리로 해석한 것으로 보인다. 또한 학생 B는 [과제6]의 그래프([그림 IV-3] 참고)에 제시된 두 자동차의 시간과 거리 사이의 관계로부터 속력을 구하는 과정에서 (본 연구의 연구 대상이 아닌) 학생 D와 서로 다른 모습을 보였다. 구체적으로, 두 학생이 구한 흰 차의 속력은 '$\frac{3}{2}$'으로 같았지만, 파란 차의 속력은 학생 D의 경우 '3', 학생 B의 경우 '2'로 답하였다[5]. 이후 교사는 학생 D에게 속력의 값이 (학생 B가 구한) '$\frac{60}{30}=2$'일 때, 시간과 거리 사이의 관계를

5) 흰 차의 경우, '20분에 $30km$'이므로 속력의 값이 '$\frac{3}{2}$'이지만, 파란 차의 경우 '20분 $30km$'에서 '30분 $60km$'로 이동하므로, 즉 '10분 동안 $30km$'를 이동하므로 속력의 값이 (학생 D가 구한) '3'이다.

그래프로 그려볼 것을 요구하였다. 학생 D는 잠시 머뭇거리더니 좌표평면 상의 원점과 $(30,60)$을 선으로 이으며, 0분에서 30분까지 이동 거리가 60이므로 속력이 '2'가 될 것이라고 설명하였다. 학생 B는 학생 D의 설명을 이해하지 못하였고, 특히 속력의 값이 '$\frac{60}{30}=2$'인 경우 시간과 거리 사이의 관계를 나타낸 그래프가 상황에 주어진 그래프([그림 IV-3] 참고)가 아닌 학생 D가 그린 직선 모양의 그래프로 그려져야 하는 이유를 모르겠다고 말하였다. 학생 B는 [과제1]에서와 마찬가지로 자신이 나타낸 그래프에서 여전히 특정한 값, 즉 점에만 주목하고 있는 것으로, 함수의 그래프에 대한 이해가 교수실험이 진행되는 동안 전혀 변화되지 않았음을 알 수 있다.

2. 주어진 상황을 그래프로 표현하는 과정에서 드러나는 두 학생간의 비례 추론의 차이

학생 A와 학생 B는 [과제1]에서 상황을 그래프로 나타내기 위해 좌표평면 상의 몇 개의 점을 찍은 후 점들을 선으로 이었지만, 선의 모양은 서로 달랐으며 그들이 표현한 그래프의 차이점을 명확하게 설명한 학생은 없었다. 이에 연구자들은 좌표평면 상의 몇 개의 점으로 표현되는 상황과 직선 모양인 그래프로 그려지는 상황을 모두 포함하는 문제를 1차시 수업의 과제로 제시하기로 의견을 모았다.

아래 <표 IV-2>의 [과제2]에는 콘의 개수, 가격, 중량 사이의 관계를 나타낸 표가 제시되어 있고, 교사는 학생들에게 표의 빈칸을 채운 뒤 상황을 그래프로 나타내도록 하였다. 교사는 학생들이 아이스크림을 한 콘, 두 콘, 세 콘,...으로 살 때 콘의 개수와 가격 사이의 관계를 몇 개의 점들로 이루어진 그래프로, 콘의 중량과 가격 사이의 일정한 비례 관계로 임의의 중량을 살 때 중량과 가격 사이의 관계를 직선 모양의 그래프로 그려주기를 기대하였다. 만약 학생들이 콘의 개수와 가격 사이의 관계에 대한 그래프와 콘의 중량에 따른 가격의 그래프 모두 직선 모양으로 나타낸다면, 두 상황을 비교하는 과제를 새롭게 제시하기로 계획하였다. 학생 B는 [과제1]에서 모든 상황을 직선 모양의 그래프로 표현하였으며, 교사가 (수업 전에 계획한대로) 학생들에게 두 상황을 비교할 것을 요구하였을 때, 학생들은 그래프에 대한 이해의 유의미한 변화[6]를 보였다. 이는 매우 흥미로운 주제이긴 하지만, 본 논문에서는 학생들의 변화보다 중량과 가격이 서로 비례할 때 어떤 중량이라도 살 수 있는 그래프를 그리는 과정에서, 즉 표에 주어진 몇 개의 값으로부터 또 다른 값들을 찾는 방식에서 드러나는 학생들의 비례 추론의 차이에 더 주목하고자 한다. 이러한 학생간의 차이는 [과제3]에서 P마트 고기 $5g$ 단위, Q마트 고기 $1g$ 단위로 판매하고, 고기 $10g$의 가격이 각각 200원과 300원일 때 두 마트의 고기 중량과 가격 사이의 관계를 그래프로 표현하기 위해 고기 $10g$보다 더 작은 중량에 대응하는 가격을 구하는 과정에서도 유사하게 나타났다(<표 IV-2> 참고).

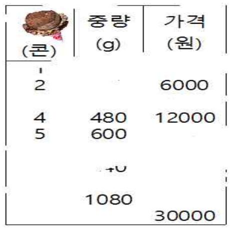
<표 IV-2> 학생들에게 제시된 [과제2]와 [과제3]

[과제2] 송이는 20일 동안 용돈을 모아서, 현재 8,000원을 갖고 있다. 송이는 동생과 함께 학교 근처 아이스크림 가게인 '스노우버드'에 갔다. 아래 표는 '스노우버드'에서 판매하는 아이스크림 가격표인데, 종이가 낡아서 일부가 지워져있다. 송이는 최대한 몇

6) [과제2]에서 학생 A와 학생 B는 서로 다른 상황에 대한 그래프이지만 같은 모양처럼 보이는 두 그래프를 비교한 후, 상황에 제시된 변량들의 변화가 이산적이거나 연속적인 경우를 구분하며 그래프로 표현하기 시작하였다. 특히 콘의 개수와 가격 사이의 관계는 직선 모양의 그래프로 그려질 수 없다고 생각하였다.

개의 콘을 살 수 있는가?

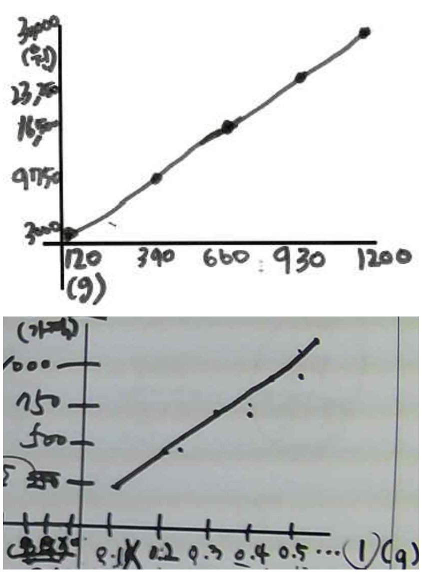
(단, '스노우버드'에서는 아이스크림을 콘으로만 판매하고 있다.)



[과제3] 네오의 집 근처에는 P마트, Q마트가 있다. P마트는 $5g$ 단위, Q마트는 $1g$ 단위로 판매한다. 마트에서 판매하는 돼지고기 $10g$의 가격을 살펴보면, P마트는 200원, Q마트는 300원으로 판매한다. 각 마트별 중량에 따른 가격의 그래프를 그리시오.

가. 학생 A의 비례 해결 전략

[과제2]에 제시된 콘의 중량과 가격 사이의 관계에 대한 학생 A와 학생 B의 그래프는 아래의 [그림 IV-4]와 같다.



[그림 IV-4] [과제2]에서 학생 A(위)와 학생 B(아래)가 나타낸 그래프

[그림 IV-4](위)에서 보이는 바와 같이, 학생 A는 가로축에 중량, 세로축에 가격을 적고, 콘의 중량 $120g$의 가격 3000원과 $1200g$의 가격 30000원을 좌표평면 상의 점으로 나타낸 후 두 점을 잇는 직선을 그렸다. 이후 $340g$, $660g$, $930g$의 가격을 계산하여 $(340,9750)$, $(660,16500)$, $(930,23250)$을 직선 위의 점으로 표현하였다. 학생 A가 각 중량에 따른 가격을 찾는 과정은 모두 동일하였다. 구체적인 예로 $(660,16500)$을 찾는 과정을 살펴보면, 학생 A는 먼저 1200에 120을 더한 값 1320과 30000에 3000을 더한 값 33000을 적었다. 학생 A가 쓴 1320은 중량 $1200g$과 $120g$을 더한 값이고, 33000은 중량 $1200g$의 가격 30000원과 $120g$의 가격 3000원을 더한 값으로 볼 수 있다. 이후 1320과 33000을 각각 2로 나누어 660과 16500을 얻었다. 학생 A는 '중량 $1200g$의 가격 30000원'과 '중량 $120g$의 가격 3000원'을 서로 같은 관계로 인식하였고, 이를 바탕으로 하여 '중량 ($1200g$과 $120g$을 더한) $1320g$의 가격 (30000원과 3000원을 더한) 33000원'을 이끌어낸 것으로 보인다. 이러한 학생 A의 해결은 앞서 살펴보았던 Lo와 Watanabe의 연구(1997)에 제시된 '사탕 6개에 4원'과 '사탕 9개에 6원'이 서로 같은 관계임을 인지할 수 있는 수준으로 볼 수 있다. 따라서 학생 A는 '비 단위 구성' 전략을 사용하여 상황을 그래프로 표현한 것이다.

학생 B가 나타낸 그래프([그림 IV-4](아래) 참고)는 학생 A의 것과 유사해 보이는데, 가로축에 (g), 세로축에 (가격)이 적혀있고, 5개의 점 $(0.1,250)$, $(0.2,500)$, $(0.3,750)$, $(0.4,1000)$, $(0.5,1250)$과 점들이 선으로 연결되어 있다. 또한 학생 B는 그래프 아래쪽에 '$3000 \div 12 = 250$'을 적었는데, 이는 좌표평면에 나타낸 $(0.1,250)$을 찾는 과정으로 보인다. 그러나 학생 B의 풀이에는 0.1을 제외한 0.2, 0.3, 0.4, 0.5를 포함한

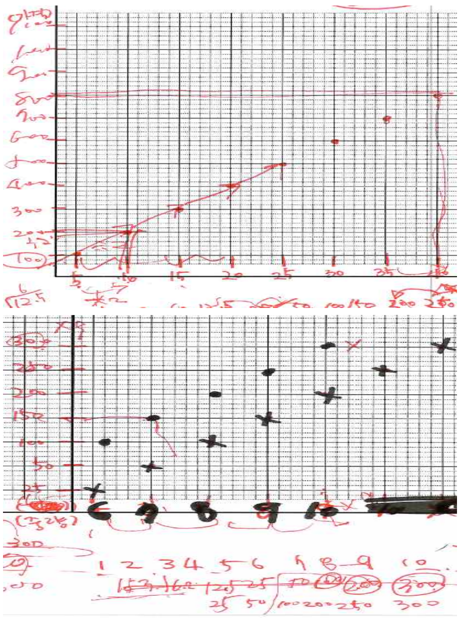
계산의 흔적이 없었다. 이로부터, 학생 B는 0.1g에 대한 가격으로 250원을 찾은 뒤, 이를 누적시켜 0.2g에 대한 가격 500원, 0.3g에 대한 가격 750원, 0.4g에 대한 가격 1000원, 0.5g에 대한 가격 1250원을 구한 것으로 보인다. 실제로 0.1g의 가격은 학생 B가 구한 250원이 아닌 2.5원이지만, 여기서 주목해야 할 점은 학생 B 스스로 중량 120g의 가격 3000원에서 120과 3000을 조정하여 더 작은 단위인 0.1g의 가격을 구하려고 시도하였다는 것이다. 그가 계산 실수를 한 것인지, 아니면 그의 비례 지식이 드러난 것인지는 다음절에서 확인하도록 한다.

학생 A는 두 점을 연결한 선을 그린 후 선 위에 몇 개의 점을 찍었고, 학생 B는 몇 개의 점을 찍은 후 이들을 선으로 이었다. 이에 교사는 학생 A와 학생 B에게 선과 점이 어떤 의미인지 물었다. 학생 A는 점과 선 모두 콘의 중량에 따른 가격이며 중량의 값으로 0.1g과 0.2g과 같이 무수히 많은 수가 될 수 있기 때문에 선으로 이은 것이라고 설명하였고, 학생 B는 아무런 이유 없이 점들을 선으로 이었다고 말하였다. 교사는 학생 B의 대답과 그가 '콘의 중량과 가격 사이의 관계'와 '콘의 개수와 가격 사이의 관계' 모두 직선 모양의 그래프로 나타낸 것에 주목하였고, 수업 전에 미리 계획했던 것과 같이 학생들에게 두 변량 사이의 관계인 '콘의 개수와 가격 사이의 관계'와 '콘의 중량과 가격 사이의 관계'를 비교하도록 요구하였다. 이러한 과정에서 학생들은 그래프를 더 정교하게 이해하기 시작하였다. 구체적으로, 학생 A는 두 점을 연결한 선이 선처럼 보일지라도 모두 다 점으로 이루어져 있기 때문에 학생 B가 그린 콘의 개수와 가격 사이의 관계에 대한 그래프는 상황에 적절하지 않다고 말하였다. 이는 학생 A가 콘의 중량과 가격 사이의 관계를 직선 모양의 그래프로 나타낸 후 직선 위에 점을 찍었던 행위([그림 IV-4] (위) 참고)와 연결돼 보이며, 그는 직선 위에 무수히 많은 점의 존재를 인식하고 있으며 계산을 통해 각 점에 대응하는 값도 찾을 수 있는 것으로 추정된다. 학생 B는 학생 A의 생각에 동의하며 점들 사이를 잇는 선 위에는 0.1, 0.2, 0.3과 같은 많은 값들이 포함되어 있다고 말하였다. 학생들은 [과제1]에서 콘의 개수와 가격, 콘의 중량과 가격 사이의 관계를 그래프로 표현하고 비교하는 활동을 통해, 두 이산량과 두 연속량 사이의 관계가 각각 몇 개의 점들로 이루어진 그래프와 직선 모양의 그래프로 표현됨을 인지하기 시작한 것으로 판단된다.

나. 학생 B의 비례 해결 전략

[과제3]은 P마트 고기 5g 단위, Q마트 고기 1g 단위로 판매하고, 고기 10g의 가격이 각각 200원과 300원일 때 두 마트의 고기 중량과 가격 사이의 관계를 그래프로 표현하는 문제이다. 이는 학생 B가 상황에 제시된 한 변량의 값을 더 세분하여 그 값에 대응하는 또 다른 변량의 값을 찾는 것과 이를 그래프로 나타내는 과정을 확인하기 위함이었다.

학생 B와 그의 짝인 학생 A는 상황을 몇 개의 점들로 표현하였다. 그 이유에 대해 학생 A는 "막대로 하기 귀찮아서"라고, 학생 B는 "5g 단위로 하니까 중간에 안파니까"라고 답하였다. 학생 A와 학생 B의 그래프를 비교해 보면, P마트의 고기 중량과 가격 사이의 관계에 대한 그래프는 같았지만, Q마트의 그래프가 서로 달랐다. 본 절에서는 학생 B가 나타낸 두 마트의 고기 중량과 가격 사이의 관계에 대한 그래프([그림 IV-5] 참고)를 중심으로 그들의 차이점을 살펴본다.



[그림 IV-5] [과제3]에서 학생 B가 나타낸 P마트(위)와 Q마트(아래)의 그래프

[그림 IV-5]에서 보이는 바와 같이, 학생 B는 P마트의 고기 중량에 따른 가격을 그래프로 나타내기 위해 가로축에 (중량), 세로축에 (가격)을 적고, 좌표평면 상의 8개 점 (5,100), (10,200), (15,300),...,(40,800)을 찍었다. 여기서 주목해야 할 점은 P마트 그래프의 가로축에 쓴 ‘$5g$과 $10g$’ 사이와 세로축에 쓴 ‘100원과 200원’ 사이 각각에 ‘$\div 2$’가 적혀있다는 것이다. 학생 B는 $10g$의 가격 200원에서 $5g$의 가격을 구하기 위해 200원을 2로 나눈 것으로 보인다. 즉, 고기 중량 $10g$과 $5g$ 사이가 2배임을 찾은 뒤 이를 $10g$의 가격과 $5g$의 가격 사이의 관계를 찾는데 그대로 사용한 것으로, 한 변량의 값들 사이의 규칙을 찾은 후 이 규칙을 또 다른 변량의 변화 규칙에 적용한 것으로 추정된다. Q마트의 그래프를 살펴보면, 가로축에 중량, 세로축에 가격이 적혀있고, 좌표평면 상의 5개의 점 (6,100), (7,150), (8,200), (9,250), (10,300)이 찍혀있다. 또한 그래프 아래에 꽤 많은 숫자들이 적혀있는데([그림 IV-5](아래) 참고), 이는 그래프에 표시된 점들과 관련돼 보인다. 교사는 학생 B에게 Q마트의 그래프에 대한 설명을 요구하였고, 아래의 <발췌문 1>은 학생 B와 그의 짝인 학생 A가 나눈 대화 내용의 일부이다.

<발췌문 1> : [과제3]의 Q마트 ‘고기 중량’에 따른 ‘가격’에 대한 설명

학생B: 애네 가격 차이가 $1g$당 얼만지 모르잖아요. $1g$당 가격 차이가 얼만지 모르니까 $10g$에 300원이니까 50원씩 작게 해봤는데 (중략) 그냥 이건 제 생각이에요. 처음에는 100원씩 빼봤는데 여기서부터 안되길래 50원씩 빼봤는데([그림 Ⅳ-5]의 Q마트 그래프 아래쪽 참고). 또 [5 아래에 적힌 25를 가리키며]여기서부터 안 되네요.

학생A: 어? 잠만. 계산 잘못한 것 같은데. Q마트에서 $1g$일 때 30원인데, (중략) 저는 여기 문제에서 $10g$의 가격을 살펴보면 Q마트는 300원이잖아요. $10g$에 300원이니까 나누기 10을 하면 $1g$에 30원.

교사: 왜 나누기 10을 하는 거야?

학생B: [놀라며] 아~ 맞네.

학생A: 10배 차이나니까 $1g$이랑 $10g$이 10배 차이나니까 가격도 10배 차이 날 거 아니에요.

교사: 가정이 있나? 학생 B는 뭘 썼어?

학생B: 얘가 $10g$이랑 $1g$이 $10g$에서 나누기 10을 해야 $1g$이 나오는 거잖아요. 그러니까 가격도 300원에서 나누기 10을 해서 비례식처럼 해가지고.

(중략)

교사: $10g$일 때 300원이면 $9g$일 때 250원이면 안되나?

학생A: $10g$일 때 300원인데. 안되지 않나요? $1g$에 30원 차이나니까 300원에서 30원 빼면 270원

(중략)

학생B: 모르겠어요. (중략) 어려워요.

<발췌문 1>에서와 같이, 학생 B는 고기 중량 $10g$의 가격이 300원일 때 $9g$의 가격을 구하기 위해 처음에 300원에서 100원을 뺐고 이후 50원을 뺐다([그림 IV-5](아래) 참고). 학생 B는 고기 $10g$일 때 300원에서 시작하여 $1g$씩 줄어들 때마다 50원씩 빼서 $10g$의 가격 300원, $9g$ 250원,..., $6g$ 100원을 구하고, 이를 좌표평면 상의 점으로 나타낸 것으로 보인다. 이에 대해 학생 A는 $1g$과 $10g$이 10배 차이 나므로 가격도 10배 차이 나서 $1g$의 가격 30원이 될 것이라고 말하였고, 학생 B는 학생 A의 설명을 듣고 놀라며 학생 A와 동일한 방식으로 $1g$의 가격 30원을 구하였다. 그러나 학생 B는 $1g$에 30원 차이가 나므로 $9g$의 가격이 $10g$의 가격 300원에서 30원을 뺀 270원이 될 것이라는 학생 A의 설명에 대해 '$1g$의 가격 30원'을 들었을 때처럼 그의 말을 이해한 듯한 태도를 취하거나 자신의 말로 다시 설명하는 모습을 보이지 않았다.

정리하면, 학생 A와 학생 B가 [과제3]에 제시된 Q마트의 중량과 가격 사이의 관계를 구하는 과정은 그들이 이전 과제의 해결에서 보여준 모습과 유사하다. 학생 A는 콘의 중량과 가격 사이의 관계를 그래프로 표현하는 [과제2]에서 '중량 $1200g$의 가격 30000원'과 '(중량 $1200g$에 $120g$을 더한 값인) $1320g$의 가격 ($1200g$의 가격 30000원과 $120g$의 가격 3000원을 더한 값인) 33000원'이 서로 같은 관계임을 사용하였다([그림 IV-4](위) 참고). 이와 마찬가지로 [과제3]에 제시된 고기 중량 $10g$의 가격 300원에서 10과 300을 조정하여 $1g$의 가격 30원을 찾고, 나아가 '(중량 $10g$에서 $1g$을 뺀) $9g$의 가격 ($10g$의 가격 300원에서 $1g$의 가격 30원을 뺀) 270원'을 이끌어낸 것이다. 반면, 학생 B는 [과제3]에 제시된 고기 $10g$의 가격 300원으로부터 $9g$의 가격을 찾는 과정에서 '비 단위 구성' 전략을 사용할 수 있는 수준이 아닌 것으로 드러났다. 이러한 학생 B의 제한된 비례 지식으로 인해 중량 $10g$의 가격 300원에서 $10g$보다 작은 중량에 대응하는 가격을 구하고 이를 그래프로 표현하는 데 어려움을 겪은 것으로 생각된다.

3. 두 변량 사이의 관계를 직선 모양의 그래프로 표현하였지만, 그래프를 해석하는 과정에서 드러나는 두 학생간의 비례 추론의 차이

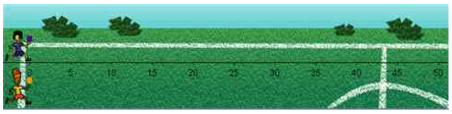
학생 A와 학생 B가 [과제2]와 [과제3]의 상황을 각각 몇 개의 점들로 이루어진 그래프와 직선 모양의 그래프로 그리는 과정에서 서로 다른 비례 지식이 드러났다. 학생 A는 [과제2]에서 콘의 중량에 따른 가격을 그래프로 나타내기 위해 '비 단위 구성' 전략으로 임의의 중량에 대응하는 가격을 찾은 반면, 학생 B는 [과제3]에서 고기 $10g$의 가격 300원으로부터 각각 10으로 나누어 $1g$의 가격 30원을 찾았지만, $10g$에서 $1g$을 뺀 $9g$의 가격을 찾는데 어려움을 겪었다. 이에 교사는 학생들이 문제 상황에 (콘의 중량 $120g$에서 시작하여 $120g$씩 늘어남에 따른 가격 또는 고기 중량 $1g$ 단위로 판매할 때 고기 중량에 따른 가격과 같은) 변량들의 단위가 주어지지 않을 때, 단위를 스스로 구성하는 과정을 확인하기 위해 상황에 주어진 변화하는 양을 찾고 변화의 단위를 스스로 구성해야 하는 과제를 학생들에게 제시하기로 결정하였다.

아래 <표 IV-3>의 [과제4]는 심칼 프로그램[7]을 활용하여 출발하는 위치가 동일하고 시간이 지남에 따라 이동 거리의 변화율이 서로 다른 두 캐릭터[8]를 제시하였고, 학생들은 심칼 프로그램

7) 심칼 프로그램(SimCalc MathWorld)은 시간의 변화에 따른 위치의 변화를 역동적으로 보여주는 수학 교육용 프로그램이다.

을 조작하며 캐릭터들의 움직임을 다양한 방식(표, 그래프, 식 등)으로 표현해야 한다. [과제5]는 두 변량인 시간과 소모된 열량 사이의 일정한 변화율이 '매분 5$kcal$'와 같이 언어로 표현된 경우, 이들 사이의 관계를 다양한 방식으로 나타내야 한다. 교사는 학생들이 시간이 지남에 따른 캐릭터들의 위치 또는 소모된 열량을 다양한 방식으로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 변량들의 변화 관계에 대한 학생들의 이해를 확인할 수 있기를 기대하였다. 두 학생이 과제에서 나타낸 식9)과 그래프([그림 IV-6], [그림 IV-8] 참고)는 서로 유사해 보인다. 아래에서는 학생들이 그린 그래프와 자신의 그래프를 활용하여 교사의 질문에 답하는 과정을 면밀히 살펴본다.

<표 IV-3> 학생들에게 제시된 [과제4]와 [과제5]

[과제4] 다음의 상황을 다양하게 표현하시오. (심칼 프로그램 활용) 
[과제5] 네오는 다가오는 여름을 맞이하여 날씬한 몸을 만들려고 한다. 네오가 '걷기'를 하면 운동 시작 후 매분 5$kcal$가 소모된다. 네오가 '걷기'를 할 때 시간이 지남에 따라 소모되는 열량을 다양한 방식으로 표현하시오.

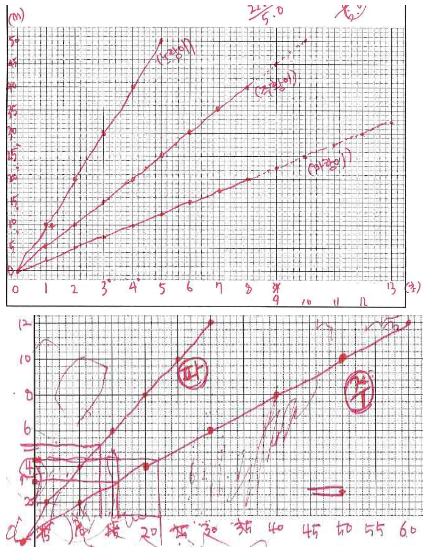
가. 시간과 위치의 변화량 사이의 관계를 서로 다른 방식으로 해석하는 학생 A와 학생 B

[과제4]에 제시된 두 캐릭터인 주황([과제4]에서 아래)과 파랑([과제4]에서 위)은 같은 위치에서 출발하고, 주황은 1초에 5m, 파랑은 1초에 2.5m씩 일정한 빠르기로 움직인다. 학생 A와 학생 B는 심칼 프로그램의 화면에 있는 두 캐릭터의 시간의 값을 변화시키며, 이동 시간과 거리 사이의 관계를 표로 먼저 나타내려고 시도하였다. 학생 A는 표 안에 1초, 2초, 3초,...를 적고, 그에 대응하는 파랑과 주황의 거리를 쓴 후, 표 오른쪽에 '주황이는 파랑이보다 속력이 2배 빠르다. 따라서 주황이는 파랑이가 간 거리의 2배를 동일하게 간다'를 적었다. 학생 A는 속력을 언급하며, 나아가 두 캐릭터의 속력 사이의 관계를 찾았다. 교사가 학생 A에게 부가적인 설명을 요구하자, 학생 A는 파랑과 주황의 움직임에서 "같은 시간에 주황이 움직인 거리가 파랑의 거리보다 2배 더 많기 때문"에 주황의 속력이 파랑의 속력보다 더 빠르다고 설명하였다. 이에 반해 학생 B는 처음에 파랑과 주황의 거리의 값에 주목하였고, 각각 5m, 10m, 15m와 10m, 20m, 30m,...를 나란히 적으며, 거리의 값들 사이, 예를 들면 파랑의 거리 5m와 10m, 주황의 거리 10m와 20m를 각각 화살표로 연결하고 그 옆에 '5'와 '+10'을 적었다. 교사가 학생 B에게 표에 대한 설명을 요구하자, 학생 B는 2초씩 더해질 때마다 파랑은 5m, 주황은 10m 더해진다고 대답하였다. 정리하면, [과제4]에 제시된 상황을 표로 나타내는 과정에서, 학생 A는 두 캐릭터의 속력 사이의 불변인 관계를 찾았고, 학생 B는 시간이 2초부터 2초씩 더해질 때마다 그에 대응하는 위치가 일정하게 증가한다는 것에 주안점을 두었다. 이처럼 학생 A와 학생 B가 주목한 양과 양들 사이의 관계는 서로 다르다. 그러나 교사가 학생들에게 캐릭터의 움직임을 그래프로

8) [과제4]에 주어진 두 캐릭터 가운데 상대적으로 빠르게 달리는 캐릭터를 주황, 주황보다 느린 캐릭터를 파랑이라 부르겠다.

9) 학생들이 [과제4]에서 시간과 위치 사이의 관계를 나타낸 식을 살펴보면, 학생 A는 '2.5(또는 5)×x=간거리'이고, 학생 B는 '5×x=y, 2.5×☆=□'이다. [과제5]에서 시간과 소모된 열량 사이의 관계에 대한 식으로 학생 A는 '칼로리 소모량=(5×분)$kcal$'이고, 학생 B는 '시간×5=$kcal$'이다.

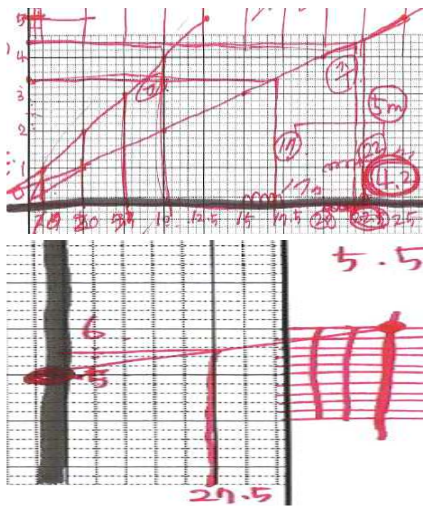
나타낼 것을 요구하였을 때, 그들이 그린 그래프는 아래의 [그림 IV-6]과 같이 유사해 보인다.



[그림 IV-6] [과제4]에서 학생 A(위)와 학생 B(아래)가 나타낸 그래프[10]

[그림 IV-6]에서 보이는 바와 같이, 학생 A는 가로축에 0부터 시작하여 1씩 더한 숫자, 세로축에 0부터 시작하여 5씩 더한 숫자를 적고, (0,0), (1,2.5), (2,5), (3,7.5), (4,10),...과 같은 규칙으로 좌표평면 상의 점을 찍은 후, 점들을 직선으로 연결하였다. 그 아래에 '(파랑이)'를 적은 것으로 보아, 학생 A는 가로축에 시간, 세로축에 위치를 적고, 0초부터 1초씩 더해지는 시간에 대응하는 파랑의 위치를 좌표평면 상의 점으로 나타낸 후 점들을 직선으로 연결한 것이다. 그 직선 바로 위에 있는 또 다른 직선 아래에는 '(주황이)'가 적혀있는데, 파랑과 마찬가지 방식으로 주황의 시간과 위치 사이의 관계를 그래프로 나타낸 듯하다. 학생 B가 그린 그래프에는 가로축에 5부터 시작해서 5씩 더한 숫자, 세로축에 2부터 2씩 더한 숫자가 써져 있다. 학생 B는 주황의 시간과 이동 거리를 각각 세로축과 가로축에 적고, 좌표평면 상의 몇 개의 점을 찍은 후 점들을 선으로 연결한 것으로 보인다.

교사는 학생 A와 학생 B 모두 두 변량 사이의 관계를 직선 모양의 그래프로 나타내었지만, 그들이 구성하고 있는 변량의 변화를 확인해야할 필요가 있다고 판단하였다. 이에 교사는 학생들에게 [질문①] 주황이 3.2초와 4.2초 사이에 움직인 거리와 [질문②] 주황과 파랑의 $22.5m$에서 $27.5m$ 움직일 때 이동 시간을 구할 것을 요구하였다. 아래의 <발췌문 2>는 교사와 학생들이 나눈 대화 내용의 일부이고, [그림 IV-7]은 교사의 질문에 답하는 과정에서 학생 B가 그린 그래프이다.



[그림 IV-7] [과제4]에서 교사의 [질문①](위)과 [질문②](아래)에 답하기 위해 학생 B가 나타낸 그래프

10) 학생 B가 처음에 그린 그래프는 파랑 (5,2), 주황 (10,2)부터 시작하여 오른쪽 위로 향하는 직선 모양이었고, 이와 관련하여 그의 짝인 학생 A와 대화를 나눈 후 (0,0)과 (5,2), (0,0)과 (10,2)를 각각 직선으로 연결하였다. 그 과정은 본 연구에서 자세히 다루지 않겠다. 왜냐하면 학생 B가 처음에 (0,0)과 (5,2), (0,0)과 (10,2)를 각각 직선으로 연결하지 않은 이유를 교사가 학생들에게 제시한 [질문①]과 [질문②]에 대한 학생 B의 반응으로부터 추정할 수 있기 때문이다.

<발췌문 2> : [과제4]에 제시된 두 캐릭터의 움직임에 대한 설명

교사: 주황의 경우, 3.2초와 4.2초 사이에 움직인 거리?
학생A: $5m$.
교사: 학생 B 구했나?
학생B: 음... 아니요. 일단 안 정확해요. 약 $6m$.
교사: 정확한 값이야?
학생A: 정확한 값.
학생B: 1초 단위로 안하니까 이게 안돼요.
[학생 B, 가로축에 시간, 세로축에 거리를 적고 그래프를 다시 그림]
교사: 22.5m부터 27.5m움직였어. 그동안에 흘러간 시간은 몇 초일까?
학생B: 음~
교사: 학생 B 구했어?
학생B: 5m였어요. 1초 단위로 다시 그려서 3.2초랑 17m이고 4.2초하면 22m에요 여기 20이랑 22.5 이렇게 되잖아요. [20과 22.5 사이를 5등분한 부분을 가리키며] 여기 사이의 칸은 5개에요. 20.5, 21, 21.5, 22하면 이렇게 돼요. 0.5씩 이렇게 돼서 22에요.
(중략)
학생A: 다 구했는데요, 주황이는 1초 걸렸고 파랑이는 2초 걸렸어요. (중략) 파랑이는 근데 정확히 모르겠어가지고 그러니까 여기서 이렇게 하면 값이 어디 있는지 제대로 모르겠어서 왜 2초라고 했냐면 속도가 2배 차이나니까. 걸린 시간은 얘(주황)가 더 빠르잖아요. 얘(주황)가 1초였으면 얘(파랑)는 2초가 되는 거예요. (중략) 속도가 더 빠르니까 같은 거리에 속도가 더 빠르면은 걸린 시간이 더 짧게 나오잖아요. 곱하기 2하면.
(중략)
교사: 학생 B는?
학생B: 안 정확해요. 27.5와 22.5 사이잖아요. 27.5일 때 27.5m일 때 초가 좀 이상하게 돼요. (중략) 선에 안 나오고 중간에. 음... (중략) 걔(27.5m일 때 시간)가 (5초와 6초) 사이에 나오니까 5.5(초)로 대략으로 잡았었단 말이에요. 이렇게 또 나오니까 정확하지가 않은데. 그래서 못 구해요. (중략) 정확하게 나올 수가 없어요.

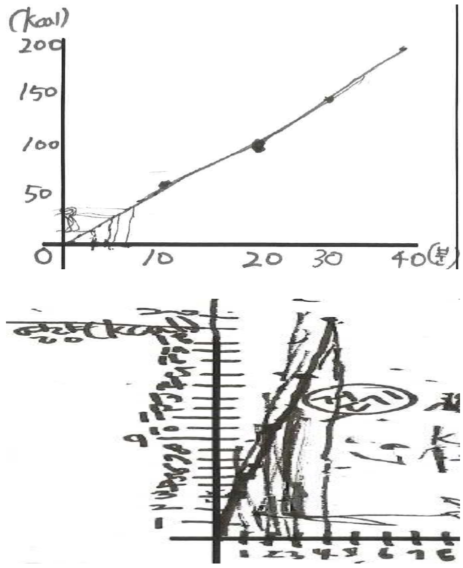
<발췌문 2>와 같이, 주황이 3.2초와 4.2초 사이에 움직인 거리에 대해 학생 A는 한 치의 망설임도 없이 5m라고 말하며 5m가 정확한 값이라고 강하게 주장하였고, 학생 B는 3.2초와 4.2초의 경우 1초 단위가 아니기 때문에 그 사이에 이동 거리를 확실하게 알 수 없다고 답하였다. 학생 B가 언급한 1초 단위는 1초부터 1초씩 늘어나는 시간을 의미하는 것으로, 3.2초와 4.2초와 같은 시간에 대응하는 위치의 값은 정확하게 구할 수 없다고 생각한 것으로 보인다. 이후, 학생 B는 그래프를 다시 그리기 시작하였다. 학생 B가 표현한 그래프([그림 IV-7](위) 참고)를 살펴보면, 가로축에 2.5부터 시작하여 2.5씩 더한 숫자, 세로축에 0부터 1씩 더한 숫자가 적혀있다. 그는 가로축에 위치, 세로축에 시간을 적은 듯하다. 학생 B는 주황과 파랑의 0초부터 1초씩 더해지는 시간에 대응하는 위치를 좌표평면 상의 점으로 찍고, 점들을 직선으로 이었다. 또한 좌표평면 상에 x좌표 17.5에 대응하는 y좌표로 3과 4 사이의 값, x좌표 22.5에 대응하는 y좌표로 4와 5 사이의 값을 표시하였고, x좌표 15와 17.5 사이, 20과 22.5 사이 각각을 5등분하여 3.2초일 때의 위치로 17m, 4.2초일 때의 위치로 22m를 구한 뒤, 3.2초와 4.2초 사이에 움직인 거리가 5m가 된다고 답하였다. 학생 B가 x축에 나타낸 15, 17.5, 20, 22.5는 거리의 값이며, 학생 B는 3.2초가 3초와 4초 사이를 '5'등분하여 나올 수 있는 값이라는 사실에 근거하여 (3초의 위치인) 15m와 (3.5초의 위치인) 17.5m를 '5'등분하여 (3.4초의 위치인) 17m를 구한 것으로 보인다[11]. 이와 같은 방식으로 4.2초일 때의 위치로 22m를 구한 듯하다. 교사가 학생들에게 22.5m에서 27.5m를 움직일 때 소요된 시간을 구할 것을 요구하였을 때도 학생 B는 자신이 나타낸 그래프에서 27.5m일 때의 시간은 5초와 6초 사이일 것이라고 말하며, 5초와 6초 사이를 10등분하였고 눈금을 정

확히 읽으려고 시도하였다([그림 IV-7](아래) 참고). 학생 B는 일정한 속력을 포함하는 상황에서 한 변량에 대응하는 또 다른 변량의 값을 구하기 위하여 이전 과제([과제3] 참고)에서와 같이 한 변량의 값들 사이의 규칙을 찾은 후 이 규칙을 또 다른 변량의 변화에 적용한 것으로, 즉 ‘스칼라 연산 추론’을 사용할 수 있는 수준인 것으로 추정된다.

반면, 학생 A는 <발췌문 2>와 같이 주황이 3.2초와 4.2초 사이에 움직인 거리가 5m가 될 것이라고 확신하였고, 22.5m부터 27.5m 움직일 때 1초가 소요된다고 말하며, 주황의 시간뿐 아니라 파랑의 시간도 쉽게 답하는 모습을 보였다. 그는 학생 B와 유사하게 심칼 프로그램 또는 그래프에서 파랑의 위치를 정확하게 읽을 수 없다고 말하였지만, 주황과 파랑의 속력 사이의 관계로부터 같은 거리를 움직일 때 소요된 시간 사이의 관계를 찾았고, 이를 활용하여 주황이 1초가 소요된다면 파랑은 주황의 시간에 2를 곱한 값인 2초가 소요될 것이라고 하였다. 이로부터 학생 A는 그의 그래프([그림 IV-6](위) 참고)에 표현된 ‘0초부터 1초 더해질 때마다 주황의 위치가 5m씩 더해진다’는 것과 ‘주황이 3.2초에서 4.2초 사이를 움직인 거리 5m’, ‘주황이 22.5m에서 27.5m를 이동할 때 소요된 시간 1초’라는 것을 서로 같은 관계로 인식한 것으로 보인다.

나. 시간과 소모된 열량의 변화량 사이의 관계를 서로 다른 방식으로 해석하는 학생 A와 학생 B

[과제5]는 네오가 걷기를 하는 경우 시간이 지남에 따라 소모된 열량의 변화율이 ‘매분 5$kcal$’와 같이 언어로 표현된 문제이다. 학생들이 시간과 소모된 열량 사이의 관계를 나타낸 그래프는 아래의 [그림 IV-8]과 같다.



[그림 IV-8] [과제5]에서 학생 A(위)와 학생 B(아래)가 나타낸 그래프

[그림 IV-8]에서 보이는 바와 같이, [과제5]의 상황에서 학생들이 나타낸 그래프는 유사해 보인다. 먼저, 학생 A는 [그림 IV-8](위)과 같이 가로축에 (분), 세로축에 ($kcal$)를 적고, 좌표평면 상의 5개의 점 $(0{,}0)$, $(10{,}50)$, $(20{,}100)$, $(30{,}150)$, $(40{,}200)$을 찍은 후 점들을 연결하여 원점에서 시작하여 오른쪽 위로 향하는 직선 모양의 그래프로 나타내었다. 학생 A는 시간이 0분부터 시작하여 10분씩 더해질 때마다 소모된 열량을 구하고, 이를 좌표평면 상의 점으로 나타낸 듯하다. 학생 B 역시 상황을 직선 모양의 그래프([그림 IV-8](아래) 참고)로 표현하였다. 구체적으로, 학생 B는 가로축에 1부터 시작하여 1씩 더한 시간, 세로축에 1부터 1씩 더한 열량을 적고, 좌표평면 상의 $(1{,}5)$, $(2{,}10)$, $(3{,}15)$,

11) 주황의 3.2초의 위치는 16m이다.

$(4{,}20)$을 점으로 나타낸 후 $(1{,}5)$와 $(4{,}20)$을 선으로 이었다. 교사가 학생 B에게 30초일 때 소모된 열량을 묻자, 학생 B는 원점과 $(1{,}5)$를 선으로 연결하였다. 학생 A와 학생 B의 그래프를 비교하면, 좌표평면 상에 몇 개의 점을 찍은 후 점들을 선으로 연결하였지만, x축에 적은 시간의 단위가 서로 다르다. A는 0분부터 10분씩 더하고, B는 1분부터 1분씩 더할 때마다 그에 대응하는 소모된 열량을 구하고 이를 좌표평면 상의 점으로 나타내었다. 교사는 그들이 구성한 시간의 변화를 확인하기 위하여, 그래프가 직선 모양인 이유를 물었다. 학생 A와 학생 B의 반응은 아래의 <발췌문 3>과 같다.

<u><발췌문 3> : [과제5]에서 '시간'과 '소모된 열량' 사이의 관계에 대한 해석</u>

교사: 선으로 잇는 이유는?

학생B: 얘가 <u>1분에 5$kcal$로 일정해서</u>.

(중략)

교사: 1분과 1분 47초 사이에는 몇 $kcal$가 소모될까?

(중략)

학생B: <u>모르겠어요. 47초 동안</u>.

교사: 그러면 2분과 5분 사이는 어때? 열량이 소모되나?

학생B: 15$kcal$. (중략) 음... <u>5분은 25$kcal$잖아요. 이거는 15$kcal$. 빼요</u>.

교사: 학생 A는 왜 선으로 이었지?

학생A: <u>칼로리가 분마다 계속 변화되고 있으니까</u>.

교사: 분마다는 여기인데 왜 선으로 이었지?

학생A: 이건 <u>10분 단위라서 1분도 있고 0.1분도 있고 해서</u>. (중략) 그니까 매분이 1분이 아니고 10분일 수도 있고 이거 1분 같은데요. 1분 아니면 기준이... 매분이 5$kcal$라는 거지. <u>기준이 1분이지 딴 것도 구할 수 있어서</u>. (중략) 1초가 <u>1분에 5$kcal$니까 1초를 구하려면 나누기 60을 구하면</u> 5 나누기 60하면 60분의 5가 되는데 약분하면 $\frac{1}{12}$이잖아요. 그게 1초에 소모되는 칼로리인데 여기서 <u>47초라고 했으니까 곱하기 47을 하면 돼요.</u>

<발췌문 3>에서와 같이, 좌표평면 상의 점들을 선으로 연결한 이유에 대해 학생 A는 시간이 지남에 따라 소모된 열량이 계속 변하기 때문이며, 학생 B는 1분에 5$kcal$로 일정하게 소모되기 때문이라고 답하였다. 교사는 학생 B가 먼저 언급한 '일정함'의 의미를 확인하고자 그에게 1분과 1분 47초 사이에 소모된 열량을 물었고, 그는 수업이 끝날 때까지 답을 구하지 못하였다. 이에 반해 2분과 5분 사이에 소모된 열량은 쉽게 구하였다. 학생 B는 2분과 5분 사이에 소모된 열량을 구하기 위해 2분과 5분에 소모된 열량으로 각각 10$kcal$와 25$kcal$를 구한 후, 이들의 차인 15$kcal$가 답이 될 것이라고 말하였다. 즉, 학생 B는 2분과 5분 각각에 소모되는 열량을 찾아서 그들의 차를 구한 것으로, '1분에 소모되는 열량 5$kcal$'로부터 '3분에 소모되는 열량 15$kcal$'를 찾을 수 있지만 '2분과 (2분에서 3분을 더한) 5분 사이에 소모된 열량 15$kcal$'를 찾을 수 있는 수준은 아닌 것으로 판단된다.

한편, 학생 A는 1분과 1분 47초 사이에 소모된 열량은 47초 동안 소모된 열량과 같고, 47초 동안에 소모된 열량을 구하려면 1초에 소모된 열량을 구한 뒤 47을 곱하면 된다고 답하였다. 구체적으로, '1분에 소모된 열량 5$kcal$'에서 시간과 소모된 열량의 값을 각각 60으로 나누어 '1초에 소모된 열량 $\frac{1}{12}kcal$'를 구한 후, 각각에 47을 곱하였다. 이는 학생 A가 '매분 5$kcal$'에 대해 설명한 내용, 즉 1분뿐 아니라 (그래프에 나타낸) 10분, 0.1분에도 소모되는 열량이 있으며 그 기준이 '1분에 5$kcal$'가 된다고 해석한 것을 '1분과 1분 47초 사이에 소모된 열량'을 구하는데 적용한 것으로 보인다.

정리하면, 학생 A는 상황에 주어진 '매분 5 $kcal$'로부터 임의의 시간 변화량에 대응하는 소모된 열량의 변화량을 충분히 구할 수 있고, 학

생 B는 '1분에 소모된 열량 $5kcal$'에서 1분, 2분, 5분에 소모된 열량에 대해 쉽게 답할 수 있으나 시간의 단위를 더 세분하여 그에 대응하는 소모된 열량을 찾거나 임의의 시간 변화량에 대응하는 소모된 열량을 구하는 데 어려움을 겪었다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 중학생들이 두 변량 사이의 비례 관계를 포함하는 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 비례 추론 능력과 그에 따른 그래프에 대한 이해의 변화를 살펴보았다. 본 연구에서 얻게 된 결과는 다음과 같다.

첫째, 본 연구는 그래프에 대한 초기 이해와 그 변화에서 나타나는 두 학생간의 차이점과 그 원인을 제시하였다. 두 학생 모두 상황에 주어진 몇 개의 값들을 좌표평면 상의 점으로 나타낸 후, 점들을 선으로 연결하였으며, 선보다 점들에 더 주안점을 두는 모습을 보였다. 학생간의 그래프에 대한 초기 이해는 유사해 보이지만, 마지막 차시의 수업에서 학생간의 그래프에 대한 이해의 차이점이 드러났다. 학생 A는 좌표평면 상에 그린 선을 두 양 사이의 관계를 나타내는 무수히 많은 점들의 집합으로 해석하였고, 학생 B는 직선 모양의 그래프에서 선이 아닌 점에만 주목하였다. 이러한 학생간의 그래프에 대한 이해의 차이가 나타난 원인을 분석하는 과정에서, 두 변량 사이의 비례 관계를 포함하는 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 행위로부터 서로 다른 비례 추론 능력과 그에 따른 그래프에 대한 이해의 차이를 확인하였다.

둘째, 본 연구는 상황에 대한 그래프 표현에서 드러나는 학생들의 비례 해결 전략을 제시하였다. 학생들은 콘의 중량과 가격 사이의 관계를 그래프로 표현하는 [과제2]와 두 마트의 고기 중량과 가격 사이의 관계를 그래프로 나타내는 [과제3]에서 과제에 제시된 두 변량의 값으로부터 한 변량의 값의 단위를 더 세분하여 그에 대응하는 또 다른 변량의 값을 찾으려고 시도하였고, 이 과정에서 학생간의 차이가 드러났다. 구체적으로, 학생 A는 '비 단위 구성' 전략을 사용할 수 있는 수준이었지만, 학생 B는 '비 단위 구성' 전략을 사용할 수 있는 수준이 아니었으며 대부분 '스칼라 연산 추론'을 사용하였다. 이러한 학생 B의 제한된 비례 지식으로 인해 [과제3]에 제시된 $10g$의 가격 300원으로부터 $9g$의 가격을 구하고, 이를 그래프로 나타내는 데 어려움을 겪었다. 이는 실제 학생들의 해결과정에 근거하여, 학생들의 비례 개념과 관련된 이전 지식과 경험이 이를 포함하는 더 상위 개념으로 어떻게 확장되어 적용되는지를 밝힌 것으로 볼 수 있으며, 특히 Lo와 Watanabe(1997)가 제안한 분수나 소수의 연산을 피할 수 있게 하며 미지값 찾기 문제를 성공적으로 해결하는 데 유용한 비 단위 구성 전략이 그래프 문제를 성공적으로 해결하는 데 주요한 역할을 했던 것으로 판단된다.

셋째, 학생들이 일정한 변화율을 포함하는 상황에서 두 변량 사이의 관계를 동일한 직선 모양의 그래프로 표현하더라도, 그래프에 그린 직선의 의미는 서로 다를 수 있다. 이동 시간과 위치 사이의 비가 일정한 상황을 다양한 방식으로 표현하는 [과제4]와 시간과 소모된 열량 사이의 일정한 변화율이 언어로 표현된 [과제5]에서 두 학생 모두 상황에 주어진 두 변량 사이의 관계를 그래프로 나타내기 위해 좌표평면 상의 몇 개의 점을 찍은 후 점들을 선으로 연결하였다. [과제5]에서 교사가 학생들에게 점들을 선으로 이은 이유를 물었을 때, 학생 A는 상황에 제시된 '매분 $5kcal$'로부터 1분, 10분, 1초에 대응하는 소모된 열량도 알 수 있다고 말하였고, 학생 B는 2분이나 5분의 열량은 쉽게 찾을 수 있었으

나 47초와 같은 시간에 대응하는 열량을 구하는데 어려움을 겪었다. 또한 [과제4]에서도 학생 A는 두 변량인 시간과 위치 사이의 불변하는 관계를 찾은 후 이로부터 두 변화량 사이의 관계를 해석하였고, 학생 B는 한 변량의 값에 대응하는 또 다른 변량의 값을 찾기 위해 그래프에 그린 선을 등분하여 그래프의 눈금을 정확히 읽으려고 시도하였다.

넷째, 본 연구의 분석에 사용된 과제들은 서로 다른 움직임을 나타내고 있다는 점, 상황을 그래프로 표현하거나 반대로 그래프를 상황에 적절하게 해석한다는 점에서 다양한 문제 상황을 포함하는 것으로 볼 수 있음에도 불구하고, 학생 A와 학생 B는 각각 자신만의 비례 추론의 방식을 수업 내내 일관성 있게 보여주었다. 구체적으로, [과제2]와 [과제3]은 각각 공변하는 연속량들과 이산량들 사이의 관계가 포함된 상황을 그래프로 표현하고, [과제4]와 [과제5]는 시간이 지남에 따른 위치와 시간과 소모된 열량 사이의 관계를 직선 모양의 그래프로 나타낸 후 이를 적절하게 해석해야 한다. 이처럼 상황에 포함된 양들 사이의 관계는 콘의 중량과 가격, 고기 중량과 가격, 시간과 위치, 시간과 소모된 열량과 같이 서로 다른 비례 관계를 포함하고 있다. 그러나 모든 과제에서 학생 A는 '비 단위 구성' 전략을 사용하였고, 학생 B는 '스칼라 연산 추론'을 사용하여 문제를 해결하였다.

이와 같이 본 연구는 중학생들의 상황에 대한 그래프 표현과 해석에서 드러나는 그래프에 대한 이해의 차이점을 비례 추론의 관점에서 분석하였고, 그래프를 표현하고 해석하는 과정에서 겪는 어려움과 그 원인도 함께 살펴보았다. 이를 바탕으로 본 연구는 함수의 그래프에 대한 교수・학습과 연구에 다음과 같은 시사점을 줄 수 있다.

첫째, 본 연구는 학생들이 주어진 상황을 그래프로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 비례 추론 능력과 그에 따른 그래프에 대한 이해의 차이를 살펴보았다. 또한 본 연구에서는 상황에 제시된 두 변량 사이의 관계로부터 한 변량의 단위를 세분하여 그에 대응하는 또 다른 변량을 구하는 과정에서 두 학생의 비례 해결 전략의 차이와 (학생 자신들이 표현한) 직선 모양의 그래프에 대한 해석의 차이를 제시하였다. 이는 실제 학생들과의 수업에서 초등학교에서 형성된 비례 지식과 함수 학습이 밀접하게 관련돼 있음(권오남 외, 2007)을 확인한 것으로, 비례 지식과의 연결성을 고려하여 함수 개념을 지도하기 위한 교육과정 및 교과서의 구성에 도움을 줄 것으로 기대한다.

둘째, 본 연구는 함수의 그래프를 지도하는 교사에게 학생의 수준을 진단하고 그 능력을 향상시킬 수 있는 과제를 준비하는 데 긍정적인 도움을 줄 것으로 기대한다. 본 연구 결과, 상황에서 변화하는 양과 그들 사이의 비례 관계를 추론하는 능력은 그래프 표현과 해석에서도 중요한 역할을 한다는 것을 확인하였다. 따라서 이러한 결과는 그래프의 표현과 해석에서 어려움을 겪는 학생이 있다면 그 원인을 진단하는데 하나의 참고 자료가 될 것이며, 학생이 상황에 적절하게 그래프를 나타내더라도 그 상태에서 수학적으로 더 발전할 수 있도록 하려면 어떤 과제를 제시하고 이끌어 나가야 하는지에 대한 하나의 방향을 제시한 것으로 볼 수 있다.

셋째, 본 연구는 중학생들이 그래프를 표현하고 해석하는 과정을 세세하게 관찰하고 분석한 것으로, 그래프를 표현하고 해석하는 능력과 그 발달에 대한 후속 연구에 기초가 될 것이다. 그러나 본 연구는 두 변량과 그들 사이의 일정한 비가 음수가 되는 경우를 다루지 못했다는 제한점을 갖는다. 이에 본 연구의 결과를 토대로 하여 다양한 상황에서 학생들의 그래프에 대한 이해를 탐색하는 추가 연구도 이루어지기를 기대한다.

참고문헌

고은성 · 이경화(2007). 초등학교 6학년 학생의 비례 추론 능력 분석. **수학교육학연구, 17**(4), 359-380.

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제2015-74호[별책 8].

권미숙 · 김남균(2009). 초등학교 6학년 학생들의 교과서 비례 문제 해결과 비례 추론에 관한 연구. **한국초등수학교육학회지, 13**(2), 211-229.

권오남 · 박정숙 · 박지현(2007). 중학교 교육과정에서 비례적 사고가 필요한 수학 개념 분석. **수학교육, 46**(3), 315-319.

김정원 · 방정숙(2013). 초등학교 3학년 학생들의 곱셈적 사고에 따른 비례 추론 능력 분석. **수학교육학연구, 23**(1), 1-16.

마민영 · 신재홍(2016). 대수 문장제의 해결에서 드러나는 중등 영재 학생간의 공변추론 수준 비교 및 분석. **학교수학, 18**(1), 43-59.

마민영 · 신재홍 · 이수진 · 박종희(2016). 중학생들의 함수의 그래프에 대한 이해와 발달. **학교수학, 18**(3), 457-478.

박선화 · 변희현 · 주미경(2011). **중학교 학생의 수학과 학습 특성 연구**. 한국교육과정평가원 연구보고 RRI 2011-5.

박정숙(2008). 학생들의 문제해결전략 유형과 비례상황 인지와의 관계. **한국학교수학회논문집, 11**(4), 609-627.

손홍찬 · 류희찬(2005). 함수 지도와 수학적 모델링 활동에서 스프레드시트의 활용. **수학교육학연구, 15**(4), 505-522.

안가영 · 권오남(2002). 함수 그래프 과제에서의 오류분석 및 처치. **수학교육논문집, 13**(1), 337-360.

안숙현 · 방정숙(2008). 5, 6, 7학년 학생들의 비례 추론 능력 실태 조사. **수학교육학연구, 18**(1), 103-121.

이광상 · 조민식 · 류희찬(2006). 엑셀의 활용이 일차함수 문제해결에 미치는 효과. **학교수학, 8**(3), 265-290.

이종희 · 김부미(2003). 교수학적 처방에 따른 중학생들의 일차함수 오개념의 변화와 그 효과 분석. **학교수학, 5**(1), 115-133.

이화영 · 류현아 · 장경윤(2009). 함수의 그래프 표현 및 그래프 해석 지도 가능성 탐색. **학교수학, 11**(1), 131-145.

Hackenberg, A. J. (2009). *Relationships between students' fraction knowledge and equation solving*. Paper presentation at the Research Pre-session of the annual conference of the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C.

Kaput, J., & West, M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems : Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp.235-287). Albany, NY: SUNY Press.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr& J. Hiebert (Eds.), *Number concepts & operations for middle graders* (pp. 93-118). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lo, J-J., & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 216-236.

Lobato, J., & Siebert, D. (2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(1), 87-116.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 175-193). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Moore, K. C., & Thompson, P. W. (2015). Shape thinking and students' graphing activity. In T. Fukawa-Connelly, N. E. Infante, K. Keene & M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 782-789. Pittsburgh, PA: RUME.

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In M. P. Carlson & C. Rasmussem (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 27-42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics, 43*(3), 271-292.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of mathematics.

Two Middle School Students' Proportional Reasoning Emerging through the Process of Expressing and Interpreting the Function Graphs

Ma, Minyoung (Indong Middle School)
Shin, Jaehong (Korea National University of Education)

The purpose of this study is to investigate the proportional reasoning of middle school students during the process of expressing and interpreting the graphs. We collected data from a teaching experiment with four 7th grade students who participated in 23 teaching episodes. For this study, the differences between student A and student B—who joined theteaching experiment from the 1st teaching episode through the 8th —in understanding graphs are compared and the reason for their differences are discussed. The results showed different proportional solving strategies between the two students, which revealed in the course of adjusting values of two given variables to seek new values; student B, due to a limited ability for proportional reasoning, had difficulty in constructing graphs for given situations and interpreting given graphs.

* Key Words : functions(함수), graphs(그래프), proportional reasoning(비례 추론), constant rate of change(일정한 변화율)

논문접수 : 2017. 5. 10
논문수정 : 2017. 6. 15
심사완료 : 2017. 6. 21