대한수학교육학회지 <학교수학> 제 19 권 제 2 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 19, No. 2, 289 ~ 317. Jun 2017

중학교 수학교과서가 학생에게 제공하는 함수 학습기회 탐색

김 구 연* · 전 미 현**

이 연구에서는 우리나라 중학교 수학 교과서의 함수 단원에서 학생에게 어떠한 학습기회를 제공하는지를 탐색한다. 구체적으로, 교과서가 제시하는 수학 내용과 실행, 수학과제의 인지적 노력수준, 학생 응답의 유형, 문제 상황의 형태 및 특징 등의 측면을 탐구하여서 교과서가 학생들에게 어떠한 학습기회를 제안하며 구조화하는가를 살펴본다. 이를 위해서 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 수학교과서 3종을 분석하였다. 그 결과로 교과서가 학생에게 제공하는 함수에 대한 학습기회는 다음과 같이 요약된다. 첫째, 절차적 지식과 개념 간의 연결성이 매우 약하며 함수의 내용 간의 의미를 연결하는 기회가 매우 제한되어 있다. 둘째, 학생들은 함수를 정의, 규칙, 법칙만으로 학습하게 되며 예제와 수학과제를 통해서 계산의 절차 수행을 반복적으로 경험하게 될 가능성이 크다. 셋째, 학생들은 문제를 해결하는 과정에 대해서 수학적으로 설명하거나 추론하는 과정을 경험할 가능성이 매우 적다. 넷째, 수학과제와 상황과제를 통해 학생의 인지적 사고 과정이 확장되거나 심화되기 보다는 분절적이고 파편화된 지식으로 받아들일 수 있는 여지가 많다.

Ⅰ. 서 론

수학 교과서는 수학과 교육과정을 구체화한 텍스트로 무엇을 어떻게 할 것인가에 관한 방향을 제시한다. 다시 말해서, 수학 교과서를 통해서 학생은 수학 과목에 대한 관념과 인식을 형성하게 되는데 수학 과목에서 지향하는 내용과 그 내용을 학습하는 과정 및 방법을 인식하게 된다(NCTM, 2000). 마찬가지로 교사도 교과서가 제안하는 수학 내용과 그 내용을 어떻게 가르칠 것인가에 대하여 직접적으로 영향을 받는다 (Freeman & Porter, 1989; Lloyd, 1999; NCTM, 2000; Reys, Reys, & Chavez, 2004). 학교수학에서 교과서의 역할은 막중한데 교과서의 내용과 형식이 학생과 교사 모두에게 지대한 영향을 주기 때문이다. 특히 교과서의 내용과 형식은 학생과 교사가 수학 내용과 서로 어떻게 상호작용할 것인지를 내포한다(Reys, Reys, & Chavez, 2004).

교사가 교육과정 도서로 지칭되는 교과서와 교사용 지도서 등을 어떻게 활용하는지에 대한 막대한 관심이 촉발되고 이에 따른 연구 수행이 활발하게 이루어지고 있다(Lloyd, Remillard, & Herbel-Eisenmann, 2009). 이러한 연구에서는 교사의 특성, 교과서가 주는 영향, 교과서로부터 취사선택하는 의사결정의 과정 등을 탐색하고 있다(김구연, 2011a, 2011b; 김민혁, 2013; Collopy, 2003; Remillard, 2005; Sherin & Drake, 2009). 또한 교사지식의 수준에 따라서 개혁지향 교과서 활용과 수업에서의 실행이 어떻게 다른지를 분

* 서강대학교, gokim@sogang.ac.kr (제1 저자, 교신저자)
** 서강대학교 대학원 졸업, junmi7638@naver.com

석한다(Hill & Charalambous, 2012). 나아가 교과서 및 교사용 지도서 등을 통해서 교사가 학습할 수 있는 경험과 기회를 제공하는 측면을 강화하며 이를 위한 교육과정 도서 개발의 중요성을 주장한다(Ball & Cohen, 1996; Davis & Krajcik, 2005; Stein & Kim, 2009).

이러한 상황에서 우리나라 교과서는 과연 교사와 학생에게 어떠한 학습 기회를 제공하는가에 대한 진지한 의문이 발생한다. 즉, 수학 교과서가 형성하는 수학 내용과 과정의 구조와 특성이 무엇이며 그 구조와 특성이 학생에게 유발하고자 하는 경험은 어떠한지를 살펴보는 것이 필요하다. 그 일환으로 중등 교과서에 포함된 수학 과제를 인지적 노력수준(cognitive demand, Stein & Smith, 1998)으로 분석한 연구들이 수행되었으며 그 결과로 우리나라 중등 수학교과서의 과제 중 상당수가 개념적 이해보다는 절차적 지식의 활용 및 능숙함을 강조하는 것으로 드러났다(권지현 · 김구연, 2013; 김미희 · 김구연, 2013; 홍창준 · 김구연, 2012). 이러한 선행연구를 확장하는 의미에서 이 연구에서는 우리나라 수학 교과서가 학생에게 제공하는 학습기회(opportunity-to-learn, learning opportunities)는 어떠한지를 탐색하기 위해서 보다 종합적이고 총체적으로 교과서를 분석하고자 한다. 여기에서 학생의 학습기회라 함은 학생들이 경험하고 익히도록 교과서가 제안하는 수학 내용과 그 내용을 어떻게 학생들이 의미 있게 이해하며 수학적으로 사고하도록 유도하는지를 포함하는 개념이다(Liu, 2009; Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman, 2015).

물론 한 수업에서 같은 교과서를 사용하더라도 학생의 학습 경험 혹은 성취도가 똑같을 것이라고 보장할 수는 없으며(Kilpatrick, 2003; Stein, Remillard, & Smith, 2007) 이는 실행 단계에 대한 관찰과 접근으로 규명할 수 있을 것이다. 이 연구에서는 교과서 혹은 의도된 교육과정(intended curriculum)의 수준으로 제한하여서 살펴보는데 특히, 수학교과서가 무엇을 어떻게 강조하는지 우선시 하는 내용과 실행이 강조하는 '무엇'과 '어떻게'를 체계적으로 분석하고자 한다. 현재 2015 개정 교육과정이 공표된 이 시점까지 교육과정이 대략 10차례 정도 개정되어왔으며 이에 따른 교과서 개발이 수반되어 왔다. 그러나 교과서를 통해서 학생이 경험하여 이해하는 수학내용과 그 과정 또는 형식, 그리고 학생의 인지적 발달을 촉진하는 수준이 어떠한지 등에 주목하는 논의와 연구 수행은 지극히 미미하다. 따라서 이 연구에서는 우리나라 중학교 수학교과서가 학생에게 제공하는 학습기회를 보다 다층적으로 살펴보고 이를 바탕으로 하여 학술적인 논의를 시작할 수 있는 토대를 마련하고자 한다.

이러한 필요성과 목적에 따라서 연구문제를 다음과 같이 설정하였다. 우리나라 중학교 수학 교과서, 특히 함수 영역에서 학생에게 제시하는 학습 내용과 실행(practice)을 통해서 어떠한 학습 기회를 제공하는가? 구체적으로, 교과서가 제시하는 수학 내용과 실행, 과제의 인지적 노력수준(cognitive demand), 학생 응답의 유형, 문제 상황(context)의 형태 및 특징의 측면을 탐구하여서 결국 교과서가 학생들에게 어떠한 학습기회를 제안하는지를 살펴보고자 한다. 2015 교육과정이 공표되었지만 이에 따른 교과서는 아직 출판되지 않았기 때문에 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 수학교과서 3종을 살펴본다.

II. 이론적 배경

수학교육을 구현하는 핵심적인 매개체는 교과서 및 교사용 지도서 등과 같은 교육과정 도서라 할 수 있다. 교과서와 교사용 지도서 등이 교

사나 수업에 미치는 영향, 상호작용, 그 관계 등을 밝히는 노력이 시도되어 왔다. 교육과정은 학교 시스템 안에서 수학 수업에서 다루어야 할 내용의 순서와 형식을 제안하며 이는 교과서로 구체화 된다. 따라서 교육과정 보다는 교과서가 교사나 학생 그리고 수업에까지 미치는 영향력이 더 강력하다고 할 수 있다. 교사는 교과서를 기본으로 하여 수업을 계획하여 실행하는데 이 과정에서 교사는 교과서에서 제시하는 내용 혹은 과제 중에서 선택하며 이 선택의 의사결정은 교사의 성향, 경험, 지식 등에 의하여 이루어지며 이는 수업 실행에도 영향을 준다(김구연, 2011a, 2011b; 김민혁, 2013; Collopy, 2003; Hill & Charalambous, 2012; Remillard & Bryans, 2004; Stein, Remillard, & Smith, 2007). 이는 역설적으로 교과서의 중요성을 설명하는 중요한 근거이며 교과서가 제시하는 내용, 형식, 방법의 중요성을 강조하는 기저이다. 교과서가 제시하는 수학 개념과 아이디어와 실행 혹은 연습이 강조하는 것이 개념에 근거한 것인지 또는 절차적 지식의 습득을 강조하는 것인지는 교사뿐만 아니라 학생에게도 미치는 영향력이 매우 크다 하겠다. 이는 결국 수학 과목 자체에 대한 인식 및 수학 학습에 대한 관념 형성에 크게 기여한다(NCTM, 2000).

학생이 경험하는 방식과 내용 즉 학습기회는 교과서의 내용과 형식에 크게 좌우된다(Tornroos, 2005). 다시 말해서, 특정 교과서가 수학적 사고 과정을 강조할 경우 이러한 교과서를 사용하는 학생의 학습기회와 절차적 지식의 습득과 숙달을 강조하는 교과서를 사용하는 학생의 학습기회는 완전히 다를 것이며 이는 학생의 학업성취도에도 영향을 미친다(Haggarty & Pepin, 2002; Reys, Reys, Lapn, Holliday, & Wasman, 2003; Tornroos, 2005; Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman, 2015). 인도네시아 중학교 교과서 3종을 분석한 연구 결과는 이러한 주장을 뒷받침한다.

Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman (2015)은 인도네시아 중학교 수학 교과서에 포함된 상황에 기반을 둔 과제(context-based tasks, 이하에서 상황과제로 축약함)의 비중이 얼마나 되는지, 그 과제의 인지적 노력수준은 어떠하며, 상황과제의 형태는 어떠한지, 그리고 이러한 상황과제를 해결하는 데에 있어서 학생이 겪는 어려움과는 어떠한 관계가 있는지를 조사하였다. 이 연구 결과, 인도네시아 중학교 교과서 3종에서 상황과제의 비중은 10%정도이며 그 중의 절반 정도는 절차적인 기능의 수행을 반복하는 것을 밝혀내었다. 나머지 과제는 수학 내용이나 영역 간의 연결성에 기반을 둔 전형적이지 않은(non-routine) 문제 해결 과제인 것으로 드러났다. 이러한 유형의 과제는 인지적 노력수준(cognitive demand, Smith & Stein, 1998)에서 Procedures with Connections 과제로 볼 수 있는 과제이다. 특히, 상황과제의 형태를 맥락이 없이(no context) 수학적 대상, 기호 또는 구조만으로 설명하는 과제, 문장제 형태로 제시되지만 그 상황을 이해하는 것이 핵심적이지 않은 위장(camouflage) 과제, 그리고 맥락을 이해할 때만이 문제해결이 가능한 상황(relevant and essential context) 과제로 분석하였다. 그 결과로 맥락이 없는 과제가 약 87%, 위장 과제가 10% 그리고 의미 있게 상황을 제공하는 과제가 3%인 것을 밝혀냈다. 무엇보다도 인도네시아 학생들이 국제성취도평가에서 유독 상황과제 해결에 어려움을 겪으며 성취도 수준이 매우 낮게 나타나는 현상을 교과서의 상황과제 부족에 기인함을 주장한다. 인도네시아 교과서는 유의미한 상황 과제를 거의 제공하지 않는데 이는 학생들이 수학화(mathematization)의 경험이나 모델링 활동을 경험할 수 있는 기회가 매우 부족함을 의미하며 결과적으로 PISA 등과

같은 국제학업성취도 평가에서 학생들이 상황과제를 해결에 어려움을 겪을 수밖에 없다는 것이다.

비슷한 맥락에서, NCTM(2000)이 제안한 학교수학의 규준 즉, 수학 내용과 가르치는 원리에 부합하는 방식을 따르는 소위 규준지향(Standards-based) 교과서를 2년 동안 사용한 미국의 8학년 학생들의 통계와 대수 영역에서의 학업성취도가 전통적인 교과서를 사용한 학생들의 학업성취도보다 통계적으로 유의미하게 높은 것으로 나타났다(Reys, Reys, Lapan, Holliday & Wasman, 2003). 규준지향 교과서는 학교수학 프로그램의 질을 개선함으로써 학생들의 성공적인 학습결과로 유도하는 것을 목적으로 개발되었다. 즉, 문제해결, 추론 및 증명, 의사소통, 연결성, 표상 등의 수학적 과정(process)을 경험하는 것을 강조하며 인지적으로 도전할 수 있는 경험을 제공함으로써 단순 계산 및 숙달을 넘어서서 학생들의 사고과정 계발을 중시한다(Senk & Thompson, 2003). 특히, 이러한 규준지향 교과서에 포함된 수학과제의 상당 비율이 high-level의 과제에 해당한다(Stein & Kim, 2009).

Charalambous, Delaney, Hsu, & Mesa(2010)는 사이프러스, 아일랜드, 대만 등 3개국의 초등교과서에서 분수의 덧셈과 뺄셈을 다루는 방식이 나라 별로 어떠한지 그리고 학생들에게 기대하는 성취 수준은 어떠한지를 조사하였다. 이를 위하여 분석틀을 개발하였는데 구체적으로 수학 내용과 실행(practice), 학생에게 기대하는 인지적 노력수준(cognitive demand)과 응답 유형(type of response), 연결성 등이다. 이러한 구체적 요소의 측면에서 분수의 덧셈과 뺄셈을 어떻게 구조화하는지를 살펴보았다. 세 나라 교과서는 공통으로 분수의 덧셈과 뺄셈 연산을 부분-전체(part-whole)에 초점을 두어 구조화하는데 이러한 부분-전체로 분수를 개념화하는 것은 가분수에 대한 이해와 가분수의 연산에는 방해가 될 수 있다. 타이완의 교과서가 제시하는 수학과제의 인지적 노력수준은 사이프러스와 아일랜드 교과서의 과제보다 높은 수준을 기대하는 것으로 나타났다. 사이프러스와 아일랜드와 교과서는 단순히 답만을 요구하는 것과는 대조적으로 타이완의 교과서에서만 학생들이 자신의 풀이를 설명하거나 수학적 문장으로 기술하도록 하는 과제를 제공하는 것을 밝혀내었다.

미국의 초등수준의 교과서로 규준기반(*Standards-based*) 또는 개혁지향(reform- oriented) 교과서로 간주되는 *Everyday Mathematics*를 교사들이 어떻게 활용하는지를 탐색한 연구를 통해서 미국 초등교사는 대체로 교과서에서 제시하는 수학과제를 수업에서 실행할 때 의도된 과제의 인지적 노력수준을 유지하지 못하였다(김구연, 2011b; Stein, Kim, & Seely, 2006). *Everyday Mathematics*에 포함된 대부분의 수학과제는 high-level의 인지적 노력수준을 요하는 과제이다(Stein & Kim, 2009). 그러나 실행 단계에서의 과제의 인지적 노력수준은 low-level로 변화하는 경향을 드러내며 이는 학생이 경험하는 수학 학습기회에 영향을 주는 것으로 나타났다. 수학과제의 인지적 노력수준의 변화 또는 조정으로 인해서 학생들은 수학의 내용을 개념적으로 이해하기 보다는 절차적으로 계산하기나 암기를 통해 답을 찾기에 집중하는 경험을 강화하는 것으로 드러났다(김구연, 2011b).

함수 영역은 학교수학에서 다루는 핵심적인 내용으로 성인으로서 다양한 직업군에서 필요로 하는 기능과 추상적 사고의 바탕이 된다. 특히, 함수를 이해한다는 것은 수학적 관계와 변화를 분석하는 능력을 기르는 기초이며 패턴으로부터 시작해서 관계, 함수의 개념으로 확장된다(NCTM, 2000). 초등에서부터 중등 수준에 이르는 동안 학생들이 다양한 함수의 유형을 배우고 이해하도록 교육과정이 설계되어야 하며 특히,

중학교 수준에서는 선형 관계(linear relationship)와 공변(covariation)의 개념을 이해하는 것이 매우 중요하다(Lloyd, Herbel-Eisenmann, & Star, 2011; NCTM, 2000). 이러한 과정을 통해서 학생들은 변화율로써 함수의 개념을 이해하며 적절한 표기법으로 함수로 나타내고 표나 그래프 등 다양한 표상의 방식으로 두 변량 사이의 관계를 설명할 수 있게 된다(Cooney, Beckmann, & Lloyd, 2010; Lloyd, Herbel-Eisenmann, & Star, 2011).

우리나라 중학생들은 함수의 그래프를 표현하고 해석하는 데 있어서 어려움을 겪는데 이는 함수를 학습하는데 있어서 그 표상의 다양성을 탐구할 수 있는 학습기회가 충분하지 못하기 때문으로 볼 수 있다(마민영 · 신재홍 · 이수진 · 박종희, 2016; 이광상 · 조민식 · 류희찬, 2006). 또한 함수를 보다 개념적으로 이해하는 것이 중요한데 개념적 이해를 위해서는 학생들이 두 변수의 변화관계를 파악할 수 있도록 질적 그래프를 구성하는 경험이 필요하며 이는 공변적 사고를 경험하는 기회로 연결된다(박종희 · 신재홍 · 이수진 · 마민영, 2017).

우리나라 2009 개정 교육과정의 중학교 1-3학년 군에서 함수와 그래프, 일차함수와 그래프, 일차함수와 일차방정식의 관계, 이차함수와 그래프 등을 주제로 다룬다. 특히, “다양한 상황을 표와 식으로 나타내고 함수의 개념을 이해하며 순서쌍과 좌표를 이해하고 함수를 그래프로 나타낼 수 있으며 함수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있는”(교육과학기술부, 2009) 능력을 기르는 것을 강조한다. 이를 바탕으로 하여서 교과서가 조직되어 있으며 위에서 열거한 각 주제는 중학교 1-3학년의 대단원 혹은 중단원의 제목으로 제시된다.

중학교 교과서의 함수 단원은 학생들에게 어떠한 학습 경험을 할 수 있도록 그 기회를 제공하는지를 살펴보기 위해서 Charalambous 외 (2010)의 연구에서 개발한 분석틀과 Wijaya 외 (2015)의 상황과제 분석틀을 수정하고 병합하였다. 구체적으로, 수학 내용(content)과 worked example로 보는 실행(practice)은 어떠한지, 수학과제의 인지적 노력수준은 어떠한지, 학생에게 기대하는 응답 유형은 어떠한지를 살펴보았다. 먼저, 수학 내용의 측면에서 수학 내용의 무엇을 다루는지 그리고 학생의 개념 이해를 돕기 위해서 무엇을 강조하는지를 알아보고자 하였다. 수학 실행의 측면에 있어서는 교과서에 포함된 ‘예제’를 통해서 실행 측면에서 예제에 제시된 풀이가 풀이 자체를 강조하는지 혹은 추론의 과정에 초점을 두는 지 등을 살펴보았다. 인지적 측면에서 교과서가 제시하는 모든 수학과제의 인지적 노력수준(cognitive demand)의 경향은 어떠한지 그리고 각 과제가 학생들에게 기대하는 활동 및 결과물이 답뿐 인지 답과 풀이 모두인지, 정당화를 포함하는지를 조사하고 교과서에 포함된 상황과제의 특성과 유형 등을 살펴보았다.

III. 연구방법

이 연구는 중학교 수학 교과서가 학생들에게 함수에 대한 학습기회(Learning opportunities or Opportunity-to-learn)를 어떻게 제공하고 있는지 알아보기 위한 것이다. 이를 위해 2009년 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 교과서 3종을 선택하여 함수 영역을 살펴보았다. 이 과정에서 분석틀의 조직은 필수적이며 분석 결과와 긴밀하게 연결된다. 다음에서는 분석틀을 조직하는 과정과 교과서를 선택하고 분석하는 과정을 차례로 설명한다.

1. 분석 프레임웍 구성

몇 가지 단계를 거쳐 분석틀을 개발하였는데 먼저 이 연구와 관련된 선행연구를 검토하였으며 교육과정과 성취기준을 살펴보았다. 선행연구의 분석틀에서 우리나라 교과서의 특성에 맞게 분석할 요소들을 선택하고 재조직하여 분석틀을 확정하였다. 교과서 분석과 관련한 Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa (2010)의 연구와 Wijaya, Van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman (2015)의 연구를 중점적으로 살펴보았다. 이 연구에서는 교과서가 함수의 의미와 그 내용을 어떻게 설명하고 있는지와 학생들이 어떤 과제를 수행하게 되는지 크게 두 가지 주제에 중점을 두고 선행연구에서 제안한 분석틀을 병합하여 재구성하였다.

분수의 덧셈과 뺄셈 내용에 대해 Cyprus와 Ireland, Taiwan 세 나라의 교과서를 비교한 Charalambous et al. (2010)의 연구에서는 각 나라의 교육 시스템과 교과서 구성에 대한 기본적인 이해를 돕기 위한 분석(horizontal analysis)과 교과서가 담고 있는 내용과 과제에 대한 분석(vertical analysis)으로 구분하였다. 세 나라의 교육 체제와 교과서의 외형적 요소에 대한 분석의 차원에서는 수업 일수, 사용하고 있는 교육과정 도서(curriculum materials)를 비롯한 교육과정에 대한 정보와 교과서의 크기, 페이지 수, 단원의 순서, 구조와 같이 교과서가 담고 있는 학습 내용 외의 것들을 분석하였다. 우리나라의 교과서를 분석하기 위하여서 분석틀의 구성요소로서 단원의 구조와 순서, 수학의 내용과 실행, 학생들에게 요구하는 학습의 수준에 대한 분석 요소들을 선택하였다.

Wijaya et al. (2015)은 상황과제(context-based task)를 중심으로 인도네시아 중학교 수학교과서를 분석하여서 상황과제가 학생들에게 제공하는 학습 기회가 어떠한지를 살펴보았다. 우리나라 2009년 개정 교육과정의 수학 과목에서 달성하고자 하는 목표는 수학 개념과 원리, 법칙을 이해하고, 주변의 사회 및 자연 현상을 관찰하여 수학적으로 의사소통하고 문제를 해결하는 능력을 기르는 것이다. 상황과제는 교육과정의 목표와 함수 영역의 학습 내용 성취 기준과도 부합하므로 우리나라 교과서는 어떤 상황과 맥락을 어떻게 활용하고 있는지를 알아보고자 상황과제 분석 요소로 차용하였다.

먼저 수학의 내용(content)과 실행(practice)의 차원과 수학과제에 관한 차원으로 프레임웍을 구성하였다. 수학의 내용은 교과서에서 함수의 개념과 의미 등 관련 내용을 어떻게 설명하고 있는지에 관한 것이며, 수학의 실행은 함수의 의미를 이해하는 과정으로 교과서의 설명에 따라 학습한 내용을 적용하는 과정으로써 이를 어떻게 설명하고 있는지 알아보기 위한 요소로 교과서의 '예제'를 실행으로서 간주하였다. 또 다른 차원에서 수학과제를 질적으로 탐구하였는데 교과서의 수학과제를 통해서 학생들이 경험하게 될 인지적 과정이 어떠하며 학생들이 학습의 결과로 제시하여야 하는 응답의 형태가 어떠한지를 추정하였다. 즉, 학생들이 수학과제를 실행하는 과정에서 무엇을 수행하며 어떻게 경험하게 되는지를 알아보기 위해서 인지적 노력수준(cognitive demand)과 학생들이 제시해야 하는 응답의 형태(type of response), 상황과제(context task)의 특성을 분석의 요소로 정하였다.

이 분석틀을 이용하여 교과서를 일차적으로 살펴보았으며 우리나라 교과서 분석에 적합하지 않은 코드들을 수정하였다. 먼저, 함수의 내용에 있어서 교과서 내용은 정의와 법칙, 규칙으로 이루어져 있었으나 함수의 의미와 개념을 어떻게 설명하는지 알아보기 위해 개념 설명에 관한 코드를 추가하였다. 수학의 실행으로 살펴본 예제는 모두 문제 풀이에 관한 절차를 기술하는데 중점을 두고 있고 따라서 코드를 추가할 필요성이 드러나지 않았다. '예제'가 제시하는 풀이 절

차나 추론 과정은 학생들이 수학과제를 해결하는 데에 있어서 필요한 인지적 과정을 보이기 때문에 예제의 인지적 노력수준에 대한 코드를 추가하였다. 학생의 응답유형과 상황과제는 선행 연구의 분석코드들을 모두 포함하여 조직하였고, 위의 과정에 따라 최종적으로 분석틀을 확정하였다<표 III-1>.

2. 교과서 분석

가. 교과서 선택

2015년 개정 교육과정이 발표되었으나 그에 따른 교과서는 아직 출판되지 않았기 때문에 2009년 개정 교육과정에 따른 교과서를 분석하였다. 비교적 많은 수의 중학교에서 채택하고 있는 것으로 추 정되는 3종의 교과서(A, B, C로 구분)를 선택하여서 함수 단원을 분석하였다. 각 교과서마다 중단원과 소단원을 나누는 기준이 약간씩 다르다. A 교과서는 함수 단원에서 다루는 모든 주제를 ‘4.1 함수의 뜻과 표현, 4.2 순서쌍과 좌표’ 등의 소단원으로 구분한다. B 교과서는 중단원에 따라 소단원으로 구분하기도 하고 구분하지 않는 경우도 있다. C 교과서는 대단원, 중단원, 소단원을 모두 구분하고 있으나 <표 III-2>에서는 각 교과서의 대단원 및 중단원명까지만 제공한다. 또한 단원을 도입하기 위해 제공하는 읽기 자료나 교과서의 본문에 포함된 여러 가지 형태의 과제, 학습한 내용을 확인하기 위한 목적으로 제공하는 과제들을 각 교과서마다 명명한 이름에 따라 제시한다<표 III-3>.

나. 분석 절차

<표 III-1> 분석틀 (Charalambous et al., 2010; Wijaya et al., 2015)

수학의 내용과 실행	
• 내용(Mathematics Content) - 개념 설명 - 정의 (definitions) - 법칙 (conventions) - 규칙 (rules)	• 실행(Practice) - 예제(worked examples) 문제풀이 절차 기술(procedures outlined) 추론(reasoning) 인지적 노력수준(cognitive demand)
수학과제 (Mathematical tasks)	
• 일반 과제 - 상황의 유형(Type of context)	• 상황과제(Context task) - 상황의 유형 - 실생활 기반 상황(Relevant and essential context) - 가장된 상황(Camouflage context) - 맥락이나 상황이 없음(No context) - 수학화와 모델링 - 수학적 절차로의 변환 (Adequate mathematical procedures) - 문제를 풀기 위하여 필요한 정보의 형태 - 학습기회의 주요 측면
인지적 노력수준 (cognitive demand)	- Memorization [M] - Procedure without connections[PNC] - Procedure with connections [PWC] - Doing mathematics [DM]
학생의 응답유형 (type of response)	- 답만 제시 (Only an answer) - 답과 풀이절차 기술 (Answer and procedural solution) - 답과 이유를 기술 (Answer and mathematical sentence) - 추론 과정 전체 기술 (Explanation) - 정당화 (Justification)

이 연구에서는 교과서의 함수 단원에서 학습자에게 제공하는 학습기회가 어떠한지 알아보기 위해서 분석틀에 따라 수학의 내용과 실행의 측면, 과제에 관한 측면으로 크게 두 가지 차원에서 분석한다. 먼저 함수 단원에 해당하는 교과서의 페이지와 부록을 확인하였고, 분석할 내용과

<표 III-2> 2009년 개정에 따른 교과서 3종 및 단원의 구성

학년 \ 교과서	A 교과서 (강옥기 외 8인)	B 교과서 (김원경 외 8인)	C 교과서 (이준열 외 7인)
중1 (2013)	4. 함수와 그래프	Ⅲ. 함수 1. 함수 2. 함수의 그래프와 활용	Ⅴ. 함수와 그래프 1. 함수의 뜻과 표현 2. 함수의 그래프 3. 함수의 활용
중2 (2014)	5. 일차함수와 그래프	Ⅲ. 일차함수 1. 일차함수와 그 그래프 2. 일차함수와 일차방정식	Ⅴ. 일차함수 1. 일차함수와 그래프 2. 일차함수와 일차방정식
중3 (2015)	3. 이차함수와 그래프	Ⅲ. 이차함수 1. 이차함수와 그 그래프 2. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프	Ⅳ. 이차함수 1. 이차함수와 그래프 2. 이차함수의 최댓값과 최솟값

<표 III-3> 각 교과서의 구성과 제시하는 과제의 이름

구성 \ 교과서		A 교과서	B 교과서	C 교과서
도입	준비학습	준비해볼까?	○○을 시작하기 전에	되짚어보기
	단원도입	수학 Story	단원 탐구	창의력 향상을 위한 생각열기
본문	개념학습	생각 펼치기	개념열기	탐구
	예제	예제	예제	예제
	문제	문제	문제	문제
		생각을 다지는 의사소통	소통과 나눔	생각담기
단원 확인	소단원	이 시간에 배운 내용 스스로 해결하기		
		*퍼즐		
		*집중탐구		
		*컴퓨터로 여는 수학		
	중단원		스스로 중단원 학습점검	*수학실험실
				*놀이터
			창의사고력 키움터	스스로 익히는 연습문제
	대단원	단원 마무리	*활동 과제	창의·인성 향상을 위한 수학적 과정 익히기
			대단원 마무리 평가	*수학의 세계
		창의력 팡팡! 인성 쑥쑥!	*컴퓨터로 푸는 수학	*○○속의 수학
			수학으로 보는 세상	스스로 마무리하는 종합문제
				창의 · 인성 프로젝트
부록			스스로 해결하는 보충 · 심화 문제	

(*표시된 과제의 경우, 매 단원마다 주어지는 것은 아님.)

과제를 분류하였다. 세 가지 교과서에서 '준비학습'과 '단원도입'으로 이루어져 있는 도입 부분도 분석에 포함하였다. '준비학습'은 이전 학년에서 학습했던 내용을 복습하기 위해 제시하는 내용과 문항들로 구성되어 있다. 해당 학년에서 학습해야 하는 내용을 직접적으로 담고 있는 것은 아니지만 이전의 학습내용을 어떻게 제시하며 이전의 학습내용에서 새로운 학습 내용으로 어떻게 연결하는지를 알아보았다. '단원도입'은 본문의 전개에 앞서 단원과 관련된 이야기로 해당 내용을 도입하기 위한 목적으로 제시한 것으로 교과서의 핵심 내용이나 과제로 보기는 어렵지만, 도입으로써의 역할을 충실히 하고 있는지를 그리고 본문에서 학습할 내용과의 연결성은 어떠한지를 알아보기 위해서 분석 내용으로 포함하였다.

본문의 개념학습에 해당하는 부분인 '생각 펼치기', '개념열기', '탐구'는 모두 수학 내용으로 분석하였으며, 예제는 모두 worked example로 수학의 실행(Practice) 측면에서 그 빈도와 내용이 어떠한지 분석하였다. 이 외에 '문제'를 포함하여 배운 내용을 점검하기 위해 풀어야 하는 '이 시간에 배운 내용 스스로 해결하기', '스스로 중단원 학습점검'은 물론'생각을 다지는 의사소통', '스스로 중단원 학습점검', '창의 사고력 키움터' '창의 · 인성 향상을 위한 수학적 과정 익히기' 등의 이름으로 제공되는 과제들을 모두 수학과제로 보았다. 이러한 수학과제들 중에서 '소통과 나눔', '의사소통', '문제해결', '추론', '수학적 과정', '창의 · 인성' 등의 키워드를 이용하여 추가로 명명한 과제들은 모두 상황과제(Context-based task)로 분류하여 일반과제인 '문제'와 구분하여 분석하였다. 각 교과서의 구성에 따라 분류한 도입과 수학의 내용, 실행 및 과제의 양적인 정보는 다음 <표 III-4>와 같다.

수학 내용과 실행, 수학과제를 분석하는 데 있어서 같은 상황이나 함수에 대해 단계적 혹은 개별적으로 답을 구하도록 한 경우나 같은 절차를 반복하도록 하는 여러 개의 문항을 묶어 제시한 경우는 하위 문항들을 포함한 문항 전체를 하나의 세트로 분석하였다. 또한 인지적 노력수준은 단순히 개별 과제의 수준만을 파악한 것이 아니라 교과서의 내용 구성과 흐름에 따라 분석하였다. 수학의 내용과 실행으로 분류된 예제들에 대해서도 인지적 노력수준과 학생의 응답 유형, 상황과제 여부를 분석하였다([그림 III-1], [그림 III-2], [그림 III-3]).

위의 기준에 따라 수학의 내용과 실행, 수학과제 차원으로 분류한 교과서의 모든 내용에 대해 분석을 실시하고 그 과정을 기록하였다. 인지적 노력수준을 분석할 때, 과제의 어떤 특징에 의해 M, PNC, PWC, DM과제로 분류되는지 과제분석

<표 III-4> 교과서의 구성요소별 개수

구성요소 \ 학년 \ 교과서	A 교과서			B 교과서			C 교과서			합계
	1학년	2학년	3학년	1학년	2학년	3학년	1학년	2학년	3학년	
도입	1	1	1	2	2	2	2	2	2	15
수학내용실행	14	32	25	10	19	15	12	25	19	171
내용	10	20	17	6	9	8	4	11	9	94
실행	4	12	8	4	10	7	8	14	10	77
수학과제	72	111	94	91	120	98	63	81	65	795
합 계	87	144	120	103	141	115	77	108	86	981

번호	B-3	교과서	B 교과서 3학년, p. 118
차원	수학의 내용		본문-개념열기

이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여 보자.

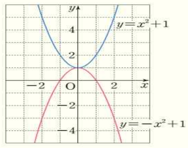
개념열기 오른쪽 그림은 두 이차함수

$y=x^2+1$, $y=-x^2+1$

의 그래프를 그린 것이다.

1 이차함수 $y=x^2+1$의 함숫값 중에서 가장 작은 값을 구하여라.

2 이차함수 $y=-x^2+1$의 함숫값 중에서 가장 큰 값을 구하여라.



함수의 함숫값 중에서 가장 큰 값을 그 함수의 **최댓값**이라 하고, 가장 작은 값을 그 함수의 **최솟값**이라고 한다.

위의 개념 열기의 1에서 이차함수 $y=x^2+1$의 함숫값 중에서 가장 작은 값은 $x=0$일 때의 함숫값 $y=1$이므로 $y=x^2+1$의 최솟값은 1이다. 그러나 가장 큰 값은 없으므로 $y=x^2+1$의 최댓값은 없다.

또 개념 열기의 2에서 이차함수 $y=-x^2+1$의 함숫값 중에서 가장 큰 값은 $x=0$일 때의 함숫값 $y=1$이므로 $y=-x^2+1$의 최댓값은 1이다. 그러나 가장 작은 값은 없으므로 $y=-x^2+1$의 최솟값은 없다.

Math Note
x의 값이 한없이 커지거나 작아질 때, 이차함수 $y=x^2+1$의 함숫값은 한없이 커지므로 최댓값은 없다.
또 이차함수 $y=-x^2+1$의 함숫값은 한없이 작아지므로 최솟값은 없다.

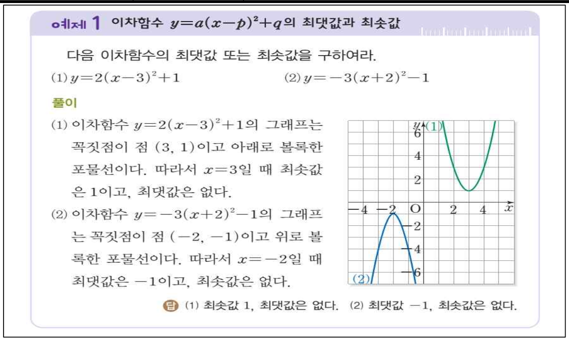
일반적으로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $a>0$이면 이 이차함수의 최솟값은 꼭짓점의 y좌표와 같고 최댓값은 없다. 또 $a<0$이면 이 이차함수의 최댓값은 꼭짓점의 y좌표와 같고 최솟값은 없다.

(B 교과서, 2015, p. 118)

분석기준	분석내용	특징
수학의 내용	규칙	최댓값과 최솟값은 이차함수가 갖는 하나의 특징이지만 함수의 개념이나 의미와 연결되도록 설명하지 않는다.
수학의 실행		
인지적 노력수준	M 1,2,3,4	질문에 대해 답하기 위해 무엇을 해야 하는지 명확하며 가장 작거나 큰 좌표를 찾기 위한 어떠한 절차나 이차함수의 의미가 필요하지 않다. 이전에 학습한 법칙에 따라 주어진 그래프의 좌표를 찾아 읽는 과정이 매우 단순하다.
학생의 응답유형	답만 제시 (Only an answer)	
상황과제	맥락이나 상황이 없는 과제. (No context)	

[그림 III-1] 수학의 내용(Mathematics content) 분석 예시

가이드(Stein 외, 2000)의 과제 분석 기준을 번호로 코드화하여 기록하였으며 각 분석 기준에 따른 특징을 기술하였다. 3종의 교과서에서 분석의 기준이 모두 동일하게 적용되었는지를 학년별로 분석한 내용을 토대로 검토하였다. 또한 연구자 간의 분석에 대한 상호신뢰도(inter-reliability)를 확인하기 위해 임의로 15%의 과제를 선택하여 코딩 결과를 비교하였다. 수학의 내용과 실행에 대한 분석결과와 학생의 응답 유형, 상황과제에 대한 분석은 모두 일치했고, 인지적 노력수준의 코딩 결과는 93%의 과제에 대하여 일치하였다. 인지적 노력수준의 코딩 결과에서 연구자들 간에 합의가 필요했던 내용은 모두 해당 과제가 M 수준인가 PNC 수준인가에 관한 것이었다. 예를 들어, 주어진 함수식을 그래프로 나타내는 과제는 함수식을 만족시키는 순서쌍과 좌표를 찾아 좌표평면에 나타내는 과정을 반복해야하므로 절차적이고 함수 개념과 의미를 연결하여 사고하는 것을 요구하지 않으며 정확한 값을 찾는 것에 초점이 맞춰지므로 PNC 수준에 해당한다. 그러나 일차방정식 $x=3$, $y=-1$의 그래프를 그리도록 하는 문항의 경우, 문항을 제시하기에

<table>
<tr><td>번호</td><td>C-3</td><td rowspan="2">교과서</td><td>C 교과서 3학년, p. 141</td></tr>
<tr><td>차원</td><td>수학의 실행</td><td>본문 - 예제1</td></tr>
<tr><td colspan="4">

예제 1 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값

다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라.

(1) $y=2(x-3)^2+1$　(2) $y=-3(x+2)^2-1$

풀이

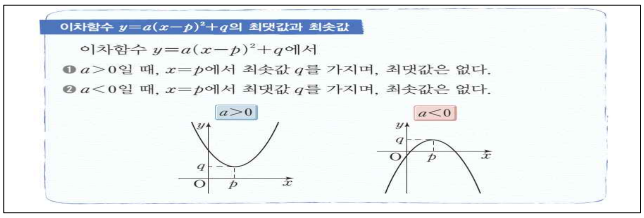
(1) 이차함수 $y=2(x-3)^2+1$의 그래프는 꼭짓점이 점 $(3,\ 1)$이고 아래로 볼록한 포물선이다. 따라서 $x=3$일 때 최솟값은 1이고, 최댓값은 없다.

(2) 이차함수 $y=-3(x+2)^2-1$의 그래프는 꼭짓점이 점 $(-2,\ -1)$이고 위로 볼록한 포물선이다. 따라서 $x=-2$일 때 최댓값은 -1이고, 최솟값은 없다.

답 (1) 최솟값 1, 최댓값은 없다. (2) 최댓값 -1, 최솟값은 없다.

(C 교과서, 2015, p. 141)
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>분석기준</td><td>분석내용</td><td>특징</td></tr>
<tr><td>수학의 내용</td><td>규칙</td><td></td></tr>
<tr><td>수학의 실행</td><td>예제</td><td>문제풀이 절차 기술</td></tr>
<tr><td>인지적 노력수준</td><td>M
1, 3, 4</td><td>
풀이에서 그래프를 제시하고 문제를 푸는 절차를 설명하고 있다. 그러나 그래프를 그리는 과정이나 이유를 설명하지 않고 있으며 이전에 학습한 법칙에 따라 함수식만을 보고도 즉각적으로 답을 구할 수 있기 때문에 그래프가 의미 있게 연결되지 않는다([그림 Ⅲ-2] 참조). 이 과제에서 무엇을 해야 하는지 명확하고, 함수의 개념이나 의미와의 연결성이 없다.


이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$에서

❶ $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 가지며, 최댓값은 없다.

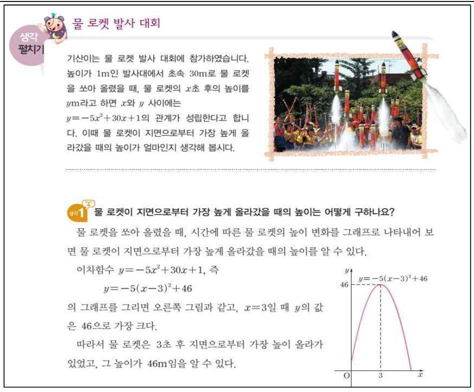
❷ $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 가지며, 최솟값은 없다.

[그림 Ⅲ-2] 예제에 앞서 교과서에서 정리하는 내용
(C 교과서, 2015, p. 141)
</td></tr>
<tr><td>학생의 응답유형</td><td colspan="2">답만 제시 (Only an answer)</td></tr>
<tr><td>상황과제</td><td colspan="2">맥락이나 상황이 없는 과제 (No context)</td></tr>
</table>

[그림 III-2] 수학의 실행(Practice) 분석 예시

앞서 '일차방정식 $x=m$, $y=n$의 그래프'라는 주제로 각각 y축과 x축에 평행한 직선이라고 내용을 정리하고 있으며 절차적인 과정을 반복하지 않더라도 교과서에서 제시하는 내용에 따라 즉각적으로 그래프를 그리는 것이 가능하기 때문에 M 수준에 해당한다. 위의 과정을 거쳐 분석한 내용을 최종적으로 정리하였고, 정리한 내용을 바탕으로 각 코드별로 두드러지는 특징을 파악하였다. 또한 인지적 노력수준 분석에서 각 수준으로 분류된 과제들에서 요구하는 학생의 응답 유형은 어떠한지, 상황과제에서는 어떤 상황과 맥락을 활용하고 있으며 어떤 특징이 있는지 등 인지적 노력수준과 학생의 응답 유형, 상황과제에 대한 분석 내용을 여러 단계에 걸쳐 살펴봄으로써 각 분석 기준들에서 공통적으로 나타나는 주제를 도출하였다.

<table>
<tr><td>번호</td><td>A-3</td><td rowspan="2">교과서</td><td>A 교과서 3학년, p.137</td></tr>
<tr><td>차원</td><td>상황과제</td><td>소단원 – 이 시간에 배운 내용 스스로 해결하기</td></tr>
<tr><td colspan="4">
7 생각을 다지는 문제
높이가 0.5m인 발사대에서 초속 25m로 물 로켓을 쏘아 올렸을 때, 물 로켓의 x초 후의 높이를 ym라고 하면 x와 y 사이에는 $y=-5x^2+25x+0.5$의 관계가 성립한다고 한다. 이때 물 로켓이 지면으로부터 가장 높게 올라갔을 때의 높이를 구하여라.
(A 교과서, 2015, p. 137)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>분석기준</th><th>분석내용</th><th>특징</th></tr>
<tr><td>수학의 내용</td><td>규칙</td><td>
생각 펼치기 물 로켓 발사 대회
기산이는 물 로켓 발사 대회에 참가하였습니다. 높이가 1m인 발사대에서 초속 30m로 물 로켓을 쏘아 올렸을 때, 물 로켓의 x초 후의 높이를 ym라고 하면 x와 y 사이에는 $y=-5x^2+30x+1$의 관계가 성립한다고 합니다. 이때 물 로켓이 지면으로부터 가장 높게 올라갔을 때의 높이가 얼마인지 생각해 봅시다.
생각 1 물 로켓이 지면으로부터 가장 높게 올라갔을 때의 높이는 어떻게 구하나요?
물 로켓을 쏘아 올렸을 때, 시간에 따른 물 로켓의 높이 변화를 그래프로 나타내어 보면 물 로켓이 지면으로부터 가장 높게 올라갔을 때의 높이를 알 수 있다.
이차함수 $y=-5x^2+30x+1$, 즉
$y=-5(x-3)^2+46$
의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같고, $x=3$일 때 y의 값은 46으로 가장 크다.
따라서 물 로켓은 3초 후 지면으로부터 가장 높이 올라가 있었고, 그 높이가 46m임을 알 수 있다.

[그림 III-4] 최댓값에 대한 설명 (A 교과서, 2015, p. 134)</td></tr>
<tr><td>수학의 실행</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>인지적 노력수준</td><td>PNC
1,2,3,4,5</td><td>교과서의 ‘개념학습’에서 학습한 내용을 이용하여 이차함수의 계수와 상수만 바꿔 그대로 적용한 문항이다([그림 III-4] 참조). ‘개념학습’을 통해 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하는 절차와 그 규칙을 경험했기 때문에 이 과제에서 무엇을 해야 하는지 명확하고 인지적으로 큰 노력을 필요로 하지 않는다. 이 같은 문제 풀이 절차가 의미하는 바나 함수의 개념과의 연결성 없이 정확한 답을 구하는 것에 초점이 맞추어져 있고, 이 과정에 대한 설명이 필요하지 않다.</td></tr>
<tr><td>학생의 응답유형</td><td colspan="2">답만 제시 (Only an answer)</td></tr>
<tr><td>상황과제</td><td colspan="2">가장 과제(camouflage context)</td></tr>
</table>

[그림 III-3] 수학과제 분석 예시

IV. 결과 및 논의

이 연구에서는 학생들이 수학 교과서를 통해 함수에 대해 경험하는 학습 기회가 어떠한지 알아보고자 하였다. 이를 위해 선행연구를 바탕으로 재조직한 분석틀을 이용하여 2009년 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 교과서 3종(A, B, C로 구분)의 함수 단원을 분석하였다. 함수 단원의 모든 내용을 수학의 내용과 실행의 차원, 과제의 차원으로 분류하여 인지적 노력수준과 학생이 제시해야 하는 응답의 형태, 상황과제를 살펴보았고, 이로부터 공통적인 주제를 도출하였다. 이에 따라 교과서에 담긴 함수의 내용과 실행에서 강조하고 있는 내용은 무엇인지, 인지적

과정으로써의 수학과제와 상황과제를 통해 무엇을 학습할 수 있는지 관찰한 결과를 ‘함수의 내용과 실행’, ‘수학과제’, ‘상황과제’로 나누어 정리하고, 학생들이 어떤 학습 기회를 경험하는지에 대해 기술한다.

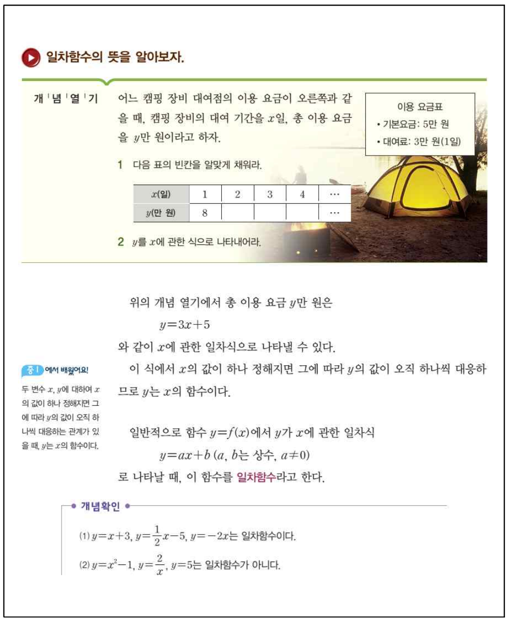
1. 함수의 내용과 실행 (content and practice)

가. 내용

학생들이 교과서를 통해 함수에 대해 학습할 수 있는 내용은 정의를 바탕으로 함수를 판별하며 규칙과 법칙에 따라 함숫값을 구하는 것에 초점을 두는 것으로 보인다. 예제를 통해 학생들이 경험할 수 있는 지점은 상황 또는 맥락이 없거나 가장된 맥락을 사용하는 문제에서 주어진 그래프나 함수식을 이용하여 특정한 값이나 식을 찾기 위해 계산하는 절차의 연습에 치중하는 것으로 나타났다.

세 교과서 공통으로 함수의 내용을 개념에 대한 설명 없이 정의(definition)를 제시하고 규칙(rules)과 법칙(conventions)을 안내한 후[그림 IV-1], 함수식의 모양을 보고 함수인지 아닌지를 판별하는 예와 문제를 제시한다[그림 IV-2]. 이어지는 예제(worked examples)에서는 주어진 함수의 함숫값을 구하거나 문제를 푸는 절차를 기술한다[그림 IV-3]. 예제를 포함한 대부분의 과제에서 학생들은 주어진 상황을 보고 함수식을 구하거나 함수식을 만족하는 함숫값을 구하여 표로 나타내고, 순서쌍과 좌표를 찾아 그래프를 그린다. 개념학습을 목적으로 제시한 ‘탐구’, ‘개념열기’, ‘생각 펼치기’에서 담고 있는 내용은 함수의 개념에 관한 것이라기보다는 정의나 법칙, 규칙에 대한 설명이다.

세 교과서의 1, 2, 3학년 함수 단원에서 가장 먼저 새롭게 학습하는 내용은 함수의 정의인데, 조사나 수식하는 말의 순서에서 약간의 차이를 보이지만 그 의미는 모두 같다[그림 IV-4]. 이와 같이 정의를 중심으로 예제와 수학과제에서 주로 다루고 있는 함수식은 변화하는 양들의 관계에 따라 결정되는 것으로서 변화율과 관련되며 이는 어떤 종류의 함수인지를 결정한다(Cooney, Beckmann & Lloyd, 2010; Lloyd, Herbel-Eisenmann & Star, 2011). 함수에서는 변화율(rate of change)과 공변(covariation)의 개념을 중심으로 원리와 패턴을 관찰하여 선형함수(linear function)의 의미를 이해하도록 하며 함수를 다양하게 표현할 수 있는 과제를 포함해야 한다. 그러나 교과서에서는 이에 대한 설명이 부족하거나 부재하며 주어진 상황을 다양하게 표현하는 과정을 충분히 제시하지 않는다.


일차함수의 뜻을 알아보자.

개념열기 어느 캠핑 장비 대여점의 이용 요금이 오른쪽과 같을 때, 캠핑 장비의 대여 기간을 x일, 총 이용 요금을 y만 원이라고 하자.

이용 요금표
- 기본요금: 5만 원
- 대여료: 3만 원(1일)

1 다음 표의 빈칸을 알맞게 채워라.

x(일)	1	2	3	4	…
y(만 원)	8				…

2 y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

위의 개념 열기에서 총 이용 요금 y만 원은

$$y=3x+5$$

와 같이 x에 관한 일차식으로 나타낼 수 있다.

이 식에서 x의 값이 하나 정해지면 그에 따라 y의 값이 오직 하나씩 대응하므로 y는 x의 함수이다.

중1 에서 배웠어요!
두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 하나 정해지면 그에 따라 y의 값이 오직 하나씩 대응하는 관계가 있을 때, y는 x의 함수이다.

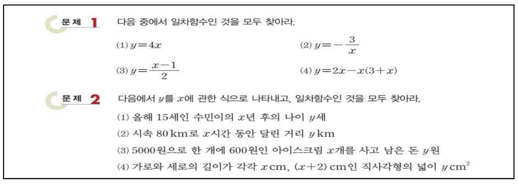
일반적으로 함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 관한 일차식

$$y=ax+b \ (a, b\text{는 상수}, a\neq 0)$$

로 나타날 때, 이 함수를 일차함수라고 한다.

개념확인
(1) $y=x+3$, $y=\frac{1}{2}x-5$, $y=-2x$는 일차함수이다.
(2) $y=x^2-1$, $y=\frac{2}{x}$, $y=5$는 일차함수가 아니다.

[그림 IV-1] 교과서에서 제공하는 함수의 내용 (B 교과서, 2014, p. 126-127)



문제 1 다음 중에서 일차함수인 것을 모두 찾아라.

(1) $y=4x$ (2) $y=-\frac{3}{x}$

(3) $y=\frac{x-1}{2}$ (4) $y=2x-x(3+x)$

문제 2 다음에서 y를 x에 관한 식으로 나타내고, 일차함수인 것을 모두 찾아라.

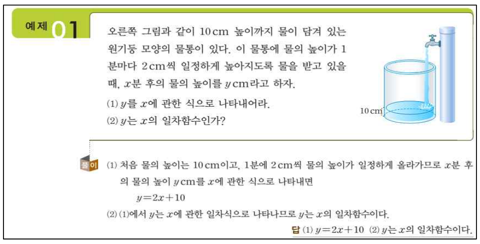
(1) 올해 15세인 수민이의 x년 후의 나이 y세

(2) 시속 80 km로 x시간 동안 달린 거리 y km

(3) 5000원으로 한 개에 600원인 아이스크림 x개를 사고 남은 돈 y원

(4) 가로와 세로의 길이가 각각 x cm, $(x+2)$ cm인 직사각형의 넓이 $y\,\text{cm}^2$

[그림 IV-2] 함수의 내용 학습에 이어 제공하는 수학과제 (B 교과서, 2014, p. 127)



예제 01

오른쪽 그림과 같이 10 cm 높이까지 물이 담겨 있는 원기둥 모양의 물통이 있다. 이 물통에 물의 높이가 1분마다 2 cm씩 일정하게 높아지도록 물을 받고 있을 때, x분 후의 물의 높이를 y cm라고 하자.

(1) y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

(2) y는 x의 일차함수인가?

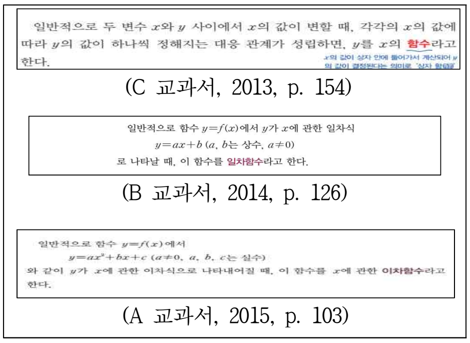
풀이 (1) 처음 물의 높이는 10 cm이고, 1분에 2 cm씩 물의 높이가 일정하게 올라가므로 x분 후의 물의 높이 y cm를 x에 관한 식으로 나타내면

$y=2x+10$

(2) (1)에서 y는 x에 관한 일차식으로 나타나므로 y는 x의 일차함수이다.

답 (1) $y=2x+10$ (2) y는 x의 일차함수이다.

[그림 IV-3] 교과서에서 제공하는 함수의 실행 (B 교과서 , 2014, p. 127)



일반적으로 두 변수 x와 y 사이에서 x의 값이 변할 때, 각각의 x의 값에 따라 y의 값이 하나씩 정해지는 대응 관계가 성립하면, y를 x의 **함수**라고 한다.

x의 값이 상자 안에 들어가서 계산되어 y의 값이 결정된다는 의미로 '상자 함(函)'

(C 교과서, 2013, p. 154)

일반적으로 함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 관한 일차식

$y=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

로 나타날 때, 이 함수를 **일차함수**라고 한다.

(B 교과서, 2014, p. 126)

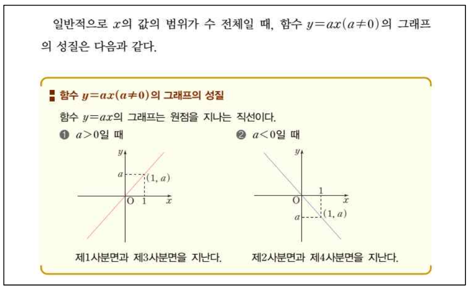
일반적으로 함수 $y=f(x)$에서

$y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 실수)

와 같이 y가 x에 관한 이차식으로 나타내어질 때, 이 함수를 x에 관한 **이차함수**라고 한다.

(A 교과서, 2015, p. 103)

[그림 IV-4] 세 교과서에서 제시하는 함수의 정의



일반적으로 x의 값의 범위가 수 전체일 때, 함수 $y=ax(a\neq0)$의 그래프의 성질은 다음과 같다.

함수 $y=ax(a\neq0)$의 그래프의 성질

함수 $y=ax$의 그래프는 원점을 지나는 직선이다.

❶ $a>0$일 때 ❷ $a<0$일 때

제1사분면과 제3사분면을 지난다. 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

[그림 IV-5] 함수 $y=ax(a\neq0)$의 그래프에서 a값에 대한 설명(B 교과서, 2013, p. 130)

1학년에서 제시하는 함수 $y=ax$ $(a\neq0)$의 그래프는 변화율에 대한 설명이 가장 용이한 선형함수의 한 형태임에도 불구하고 변화율에 대한 언급이 없으며 x의 계수 a에 대하여 $a<0$ 또는 $a>0$일 때 그려지는 그래프의 개형으로 일반화하여 제시하는 것에 그치고 [그림 IV-5], 이차함수 단원에는 변화율이나 공변과 관련된 학습 내용이 전혀 포함되어 있지 않다. 학생들은 일차함수 단원에서 '기울기'의 의미를 처음 접하게 된다. 교과서에서는 학생들 스스로 여러 가지 상황을 관찰하고 분석하여 기울기로 연결되는 패턴을 찾을 수 있도록 하는 과제를 제공하지 않으며 정의와 규칙만을 설명한다. 세 교과서는 공통적으로 어떤 한 가지 상황에 대해 함숫값을 구하여 표로 나타내어 $\dfrac{y\text{의 값의 증가량}}{x\text{의 값의 증가량}}$으로 비율을 구한 뒤, 그 값이 주어진 일차함수의 x의 계수와 같은 것을 확인한다. 이어서 '이 비율은 x의 계수 a와 같다.'고 내용을 일반화하여 정리한 후에 기울기의 정의를 제시한다. 학생들은 문제와 예제에서 주어진 함수식이나 그래프를 보고 기울기를 구하는 문제와 예제는 '일차함수의 계수=기울기'로 기억된 사실을 이용하여 풀 수 있게 된다.

수학의 개념보다는 용어의 뜻에 대한 설명을 하고 그에 대해 문제를 푸는 과정을 보이는 것은 함수 단원 전반에 걸쳐서 반복된다. 그래프의 평행이동, x절편과 y절편, 꼭짓점의 좌표 등을 학습하는 단원에서도 관찰과 추론을 바탕으로 한 과정이 명시적으로 강조되기 보다는 단원의 도입에서 설명한 용어의 뜻과 규칙을 적용하여 문제를 풀어 답을 구하는 절차를 강조한다. 선형함수의 의미나 함수의 유형에 대하여 기울기로 설명하지 않는다. 교과서에서 제공하는 함수의 표현 형태는 함수식, 그래프, 표로 나타내는 것에 한정되어 있으며 이는 모든 학년의 교과서에

서 동일하게 나타난다. 또한 2009년 개정 교육과정의 함수 학습의 목표 중 하나인 해당 학년에서 학습하는 함수로 설명할 수 있는 여러 가지 상황을 유추하거나 관찰하는 과정을 구체적으로 보이지 않는다. 몇 가지 사례를 제공하고 곧바로 일반화를 선언하기 때문에 추론의 전반적인 과정을 볼 수 없게 된다([그림 IV-1] 참조). 또한 추론을 통해 함수의 의미를 구체적으로 표현하는 문장 역시 찾아보기 어렵다.

나. 실행

수학의 실행(practice) 측면에서 예제는 학습한 내용을 어떻게 적용해야하는지 논리적 사고과정을 설명한다. 교과서에서 예제를 얼마나 자주 제시하고 있는지, 예제는 어떤 내용들로 구성되었는지, 예제의 인지적 노력수준(cognitive demand)과 제시해야 하는 답의 유형은 어떠한지, 상황 또는 맥락을 제시한다면 어떤 상황과제인지를 살펴보았다.

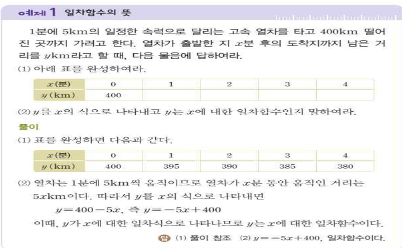
세 교과서에서 도입, 수학의 내용과 실행 및 수학과제의 개수는 총 981개였고<표 III-4>, 그 중 예제는 77개로 7.8% 가량을 차지하는 것으로 나타났다<표 IV-1>. A 교과서의 1학년 교과서에서 도입, 수학의 내용과 실행 및 수학과제의 개수는 총 87개였으며 그 중 예제는 4개로 4.5%를 차지하였다. 4개의 예제에 대한 인지적 노력수준은 모두 PNC에 해당하였다.

세 교과서 모두 중단원과 소단원에서 예제를 규칙적으로 제공하지는 않으며, 예제는 모두 함수가 됨을 판별하거나 함수식 또는 함숫값을 구하거나 그래프를 그리는 것에 관한 것이다. 즉, 교과서의 예제들은 정의와 규칙, 법칙만을 이용하여 함숫값과 식을 구하는 과정을 반복하고 연습하는 '문제풀이 절차 기술(procedure outlined)'의 형태만으로 나타났다. 모든 예제는 M과 PNC 수준으로 구성되어있으며 이는 교과서의 예제가 제공하는 학습 내용을 적용하는 과정과 일치하는 결과이다. M과 PNC 수준의 공통적인 특징은 문제를 해결하기 위해 인지적으로 거쳐야 하는 과정이 단순하고 명확하며 정확한 답을 구하는 것을 강조하는 것이다. 예제는 모두 '함수식을 구하여라.', '그래프를 그려라.', '○○의 값을 구하여라.'의 지시어만을 사용하고 있으며 이는 곧 학생에게 오로지 '답만 제시' 하도록 요구하는 응답유형과 연결된다. 77개의 예제 모두가 이처럼 '답만 제시'하는 유형으로 나타났는데 그 중 1개의 예제는 '설명하여라.'는 지시어를 사용하고 있고, 4개의 예제는 '~인지 말하여라.'는 지시어를 사용하고 있다[그림 IV-6]. 이러한 지시어는 마치 답에 대한 이유를 제시하거나 설명을 요구하는 것처럼 보일 수 있으나 5개의 예제 모두 문제풀이의 절차만을 기술하고 있으며 최종적으로는 '함수이다.' 또는 '일차함수이다.'라는 답만

<표 IV-1> 예제의 빈도와 인지적 노력수준

교과서 / 학년	A 교과서		B 교과서		C 교과서		합계	
	빈도	인지적 노력수준	빈도	인지적 노력수준	빈도	인지적 노력수준	빈도	인지적 노력수준
1학년	4.5% (4/87)	PNC(4)	3.9% (4/103)	PNC(4)	10.4% (8/77)	M(1) PNC(7)	6% (16/267)	M(1) PNC(15)
2학년	8.3% (12/144)	M(2) PNC(10)	7% (10/141)	M(1) PNC(9)	13% (14/108)	M(2) PNC(12)	9.2% (36/393)	M(5) PNC(31)
3학년	6.8% (8/120)	PNC(8)	6% (7/115)	PNC(7)	11.6% (10/86)	M(1) PNC(9)	7.8% (25/321)	M(1) PNC(24)

을 제시하면 되는 형태로 구성되어 있다. 즉, 함수가 되는 이유를 설명하기 위한 추론 과정이 제시되어 있지 않으며 '개념학습'에서 제시한 함수의 정의만을 적용하도록 요구한다. 또한 [그림 IV-6]에서와 같이 예제에서 이미 변수를 정하여서 제공하기 때문에 변수 x, y를 무엇으로 설정해야 하는지 등에 대해 추론하는 과정이 필요하지 않게 되며 변화하는 두 양들의 관계에 대한 설명이 없이 곧바로 문자와 식으로 일반화하여 일차식을 보여주고 일차함수라고 판별한다.


예제 1 일차함수의 뜻

1분에 5km의 일정한 속력으로 달리는 고속 열차를 타고 400km 떨어진 곳까지 가려고 한다. 열차가 출발한 지 x분 후의 도착지까지 남은 거리를 $y$km라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 아래 표를 완성하여라.

x(분)	0	1	2	3	4
y(km)	400				

(2) y를 x의 식으로 나타내고 y는 x에 대한 일차함수인지 말하여라.

풀이

(1) 표를 완성하면 다음과 같다.

x(분)	0	1	2	3	4
y(km)	400	395	390	385	380

(2) 열차는 1분에 5km씩 움직이므로 열차가 x분 동안 움직인 거리는 $5x$km이다. 따라서 y를 x의 식으로 나타내면

$y=400-5x$, 즉 $y=-5x+400$

이때, y가 x에 대한 일차식으로 나타나므로 y는 x에 대한 일차함수이다.

답 (1) 풀이 참조 (2) $y=-5x+400$, 일차함수이다.

[그림 IV-6] 일차함수인지 설명하는 과정을 보여주는 예제 (C 교과서, 2014, p. 155)

[그림 IV-6]의 예제에 포함된 맥락 또는 상황은 일정한 속력으로 달리는 고속열차의 시간에 따른 거리의 변화이다. 그러나 이 같은 상황은 일상생활에서 경험하지 않더라도 이해할 수 있으며, 문제를 풀기 위하여 필요한 수학적 연산 및 계산이 이미 명백히 드러나 있으며 주어진 텍스트에 포함된 숫자들을 조합하는 것만으로도 풀이가 가능하게 한다. 즉, 맥락이 있는 것처럼 보이지만 실제로는 함수를 이해하기 위해 필수적인 맥락(relevant and essential context)과는 대조되는 가장된 맥락(camouflage context)을 사용하는 것으로 볼 수 있다.

예제에서 활용하고 있는 상황과 맥락 중 실생활과 관련되어 있으며 함수를 이해하기 위해 필수적으로 포함되어야 하는 상황을 기반으로 하는 것은 거의 찾아볼 수 없었다. 상급 학년으로 갈수록 앞서 살펴본 예제처럼 맥락이나 상황이 있는 것처럼 가장된 예제의 빈도도 점차 줄어드는 경향을 보이며 맥락을 전혀 포함하지 않은(no context) Low-Level의 예제만이 제공되는 것으로 나타났다.

교과서에서 담고 있는 함수의 내용과 예제를 통한 실행에서 드러난 특징은 유사한 문제들을 푸는 과정만을 반복하고, 함수의 의미나 개념과 연결하여서 생각해볼 수 있는 상황을 제시하지 않고 있다는 점에 있어서 M, PNC 수준에 해당하는 과제의 특성과 일치한다. 이러한 흐름에 의거하여서 함수를 학습한 학생들이 접하게 되는 과제는 어떤 특성이 있는지 다음에서 살펴본다.

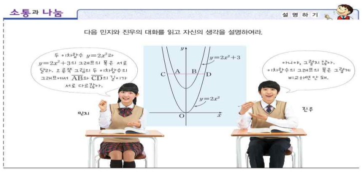
2. 수학과제

교과서의 본문에서는 정의와 규칙, 법칙을 바탕으로 예제를 푸는 과정을 반복하여 풀이 방법과 기억에 의존하는 패턴이 반복된다. 이 같은 내용과 예제를 따라 학습한 학생들이 함수 단원에서 접하는 수학과제에서도 유사한 특성을 볼 수 있다. 이 같은 수학 과제의 특성을 인지적 노력수준과 학생들의 응답유형, 과제에 포함된 상황에서 공통적으로 나타나는 주제로 정리한다.

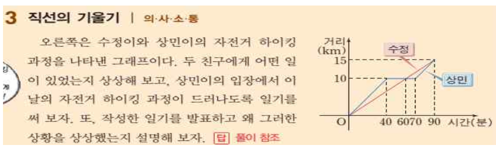
가. 인지적 노력수준 및 응답유형

함수 단원에 제시된 과제 수는 총 795개로 각 수학과제의 인지적 노력수준을 분석한 결과, 94%의 과제가 Low-Level에 해당하는 것으로 나타났다 PWC 수준에 해당하는 4%의 과제들을 제외한 나머지 2%의 과제는 수학과제로 볼 수 없는 내용들로 구성되어 있으며 DM 수준의 과제는 찾기 어려웠다. 분석한 3종 교과서의 수학과제들 중 PNC 수준에 해당하는 과제의 빈도가

65%로 가장 높게 나타났다. PNC 수준의 과제인 경우에는 PNC 수준의 5가지 특성을 거의 다 갖추고 있는 문항이 대부분이었다. 즉, 수학과제는 정확한 답을 구하는 것에만 초점이 맞춰져 있고, 학생들의 사고과정을 설명하기를 요구하지 않는다. 이러한 과제의 특성은 학생들이 학습의 결과로 제시해야 하는 응답의 형태에서도 드러난다. 대부분의 교과서 문제는 앞서 살펴본 예제와 마찬가지로 ‘값을 구하여라.’, ‘계산하여라.’, ‘함수식을 구하여라.’와 같이 오로지 답만을 요구하는 형태로 이루어져 있다.



[그림 IV-7] ‘무엇’을 ‘어떻게’ 설명해야 하는지 모호한 수학과제 (B 교과서, 2015, p. 109)



[그림 IV-8] 수학적 설명을 요구하는 것인지의 여부를 판단하기 어려운 수학과제 (C 교과서, 2014, p. 193)

답만을 제시해야 하는 유형들을 제외한 17개의 과제는 [그림 IV-7], [그림 IV-8]과 같이 ‘토의하여라.’, ‘그 이유를 말하여라.’, ‘설명하여라.’와 같은 지시어를 사용하고 있어서 답과 함께 그 이유를 수학적으로 설명하도록 요구하는 응답 유형(Answer and mathematical sentence)으로 분석할 수도 있겠으나 엄밀하게는 이 과제들에서 요구하는 설명의 형태가 수학적인 설명을 요구하는 것이라고 보기는 어렵다. 왜냐하면 학생들이 구체적으로 ‘무엇’에 대하여 토의를 하고, 이유를 ‘어떻게’ 설명해야 하는지 목적어와 지시어 등이 명확하지 않으며, 수학적 근거를 사용하지 않고 제시하는 설명도 유효한 것인지, 개인의 의견만 제시하면 되는 것인지 등이 명확히 제시되어 있지 않기 때문이다. 그러나 답 이외에 추가적인 설명을 요구하는 과제의 인지적 노력수준은 대부분 PWC 수준에 해당하는 동시에 상황과제로 구분(labeling)된 과제에서만 나타났다. 이는 Low-Level의 과제에서는 문제를 해결하는 과정에 대한 설명을 요구하지 않는다는 인지적 노력수준의 특성과도 일치하는 결과이다. 학생들의 사고과정, 추론과정을 설명하거나 정당화하도록 하는 지시어나 목적어가 포함된 과제는 없으며 추론 과정 전체를 기술하도록 요구하거나 이 같은 추론 및 풀이 과정에 대해 정당화하도록(Justification) 요구하는 과제 역시 찾아보기가 어렵다.

교과서의 ‘개념학습’과 ‘예제’에 뒤따라 제공되는 ‘문제’에서 학생들에게 요구하는 응답의 유형이나 사고의 과정은 수학적으로 계산 기능을 숙달시키는데 연습문제나 부록에서 제공하는 과제들도 모두 이와 유사하다. 세 교과서에서는 모두 소, 중, 대단원이 끝날 때마다 ‘이 시간에 배운 내용 학습하기’, ‘스스로 학습 점검’ 등의 이름으로 연습문제와 부록을 제공하며 기초, 기본, 심화 등의 단계로 과제의 난이도를 나눈다. ‘심화’ 과제의 경우, 인지적 노력수준이 High-Level일 것으로 기대할 수 있지만 이 과제들은 모두 이미 알고 있는 몇 가지 절차에 따라 특정한 값을 구하도록 유도한다. ‘심화’ 단계의 문제에서 요구하는 값을 구하기 위해서는 ‘기초’, ‘기본’ 단계의 과제들보다 여러 절차를 거쳐야 하고, 상대적으로 풀이 과정이 복잡하게 나타나지만 이 같은 과정이 High-Level의 과제임을 의미하지 않

는다. ‘서술형’이라는 라벨이 붙은 연습문제에서 는 ‘풀이 과정을 자세히 써라’등의 추가적인 지시어를 사용하고 있지만 이는 문제 풀이 절차에 대한 서술이므로 답과 풀이과정을 기술(Answer and procedural solution)에 속하는 것으로 볼 수 있으며 추론 과정을 설명하거나 정당화하는 과정과는 그 본질이 다르다고 할 수 있다.

나. 상황과제 (Context-based Tasks)

수학과제 중에서 2009 개정 교육과정에서 강조하는 ‘의사소통’, ‘문제해결’, ‘추론’과 ‘수학적 과정’ ’창의·인성’ 등의 키워드를 포함하여 제공하는 과제들은 모두 상황과제로 분류하였다. 이 외의 ‘문제’는 모두 일반과제로 분류하여 분석하였다.

세 교과서의 수학과제가 포함하고 있는 상황의 형태(Type of context)에 대한 분석결과는 <표 IV-2>와 같다. 총 795개의 과제 중에서 일반과제로 분류된 과제는 683개, 상황과제로 분류된 과제는 112개(14%)이다. 수학과제 중 실생활을 기반으로 한 상황을 포함하고 있는 과제는 24개(3%)이며 가장된 상황을 포함한 과제는 124개(15.6%), 맥락이나 상황이 없는 과제가 81.4%로 나타났다.

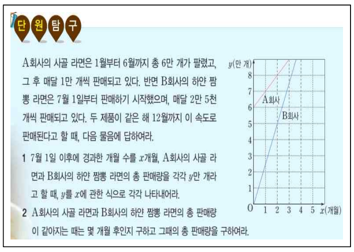
수학의 내용과 실행을 포함하여 모든 과제에 포함된 상황 또는 맥락을 통해 학생들이 학습하는 함수는 기호나 수식을 활용하여 문제를 풀이하는 것 외에는 실제적이고 구체적인 상황과 연결되지 않는다. 대부분의 상황과제 역시 정확한 답을 구하는 것에 초점이 맞춰져 있으며 문제를 풀기 위해 거쳐야 하는 과정과 고려해야 하는 조건이 명확하고 상황이나 맥락이 없는 경우가 대부분이다<표 IV-2>. 또한 상황이 포함된 것으로 나타난 과제의 경우에도 역시나 함수와 관련된 계산이나 내용 점검을 목적으로 위장된 상황(camouflage context)을 도입한 인위적인 문제가 압도적으로 많다. 세 교과서가 사용하는 가장된 상황은 거리, 시간, 속력의 관계나 높이와 온도, 용수철의 길이와 추의 무게간의 관계, 수조의 담긴 물의 양의 시간별 변화에 관한 것 등으로 매우 유사하다.

실제적인 상황을 바탕으로 제시한 과제의 경우에도 학생들이 직접 패턴을 찾도록 하고, 그로부터 일반화하여 함수식이나 값을 찾도록 하는 과정은 존재하지 않는다. 즉, 학생들은 상황과제에서 주어진 내용을 조직하여 수학적으로 변환하고, 체계화하여 문제를 해결해야 하는 수학화와 모델링의 과정(Mathematization and modeling process)을 경험할 수 없다. 상황이나 맥락이 없었던 과제들과 마찬가지로 문제에서 요구하는 값을 구하여 표로 나타내고, 그래프를 그리거나 함수식과 함숫값을 찾는 절차를 강조한다[그림 IV-9].

교과서에서는 대부분 전형적이고 공통적인 상황을 다루고 있으며, 예제나 교과서의 설명을 통해 접한 것과 유사한 상황이나 정례화 된 상황

<표 IV-2> 수학과제의 상황/맥락(context)에 대한 분석결과

교과서 / 유형	A 교과서		B 교과서		C 교과서		합계
	일반과제	상황과제	일반과제	상황과제	일반과제	상황과제	
실생활 기반 상황	3	7	4	2	3	5	24 (3%)
가장 상황	35	4	39	10	22	14	124 (15.6%)
상황 없음	210	18	234	10	133	32	647 (81.4%)
합계	248	29	277	32	158	51	795
	277		309		209		



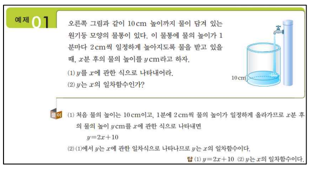
단원탐구

A회사의 사골 라면은 1월부터 6월까지 총 6만 개가 팔렸고, 그 후 매달 1만 개씩 판매되고 있다. 반면 B회사의 하얀 짬뽕 라면은 7월 1일부터 판매하기 시작했으며, 매달 2만 5천 개씩 판매되고 있다. 두 제품이 같은 해 12월까지 이 속도로 판매된다고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

1 7월 1일 이후에 경과한 개월 수를 x개월, A회사의 사골 라면과 B회사의 하얀 짬뽕 라면의 총 판매량을 각각 y만 개라고 할 때, y를 x에 관한 식으로 각각 나타내어라.

2 A회사의 사골 라면과 B회사의 하얀 짬뽕 라면의 총 판매량이 같아지는 때는 몇 개월 후인지 구하고 그때의 총 판매량을 구하여라.

[그림 IV-9] 실생활 기반 (relevant and essential context) 과제 (B 교과서, 2014, p. 157)



예제 01

오른쪽 그림과 같이 10 cm 높이까지 물이 담겨 있는 원기둥 모양의 물통이 있다. 이 물통에 물의 높이가 1분마다 2 cm씩 일정하게 높아지도록 물을 받고 있을 때, x분 후의 물의 높이를 y cm라고 하자.

(1) y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

(2) y는 x의 일차함수인가?

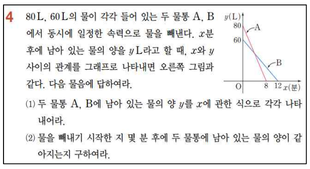
풀이 (1) 처음 물의 높이는 10 cm이고, 1분에 2 cm씩 물의 높이가 일정하게 올라가므로 x분 후의 물의 높이 y cm를 x에 관한 식으로 나타내면

$y=2x+10$

(2) (1)에서 y는 x에 관한 일차식으로 나타나므로 y는 x의 일차함수이다.

답 (1) $y=2x+10$ (2) y는 x의 일차함수이다.

(B 교과서, 2014, p. 127)

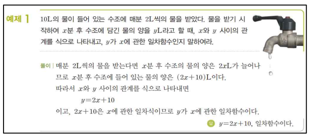


4 80 L, 60 L의 물이 각각 들어 있는 두 물통 A, B에서 동시에 일정한 속력으로 물을 빼낸다. x분 후에 남아 있는 물의 양을 y L라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 물통 A, B에 남아 있는 물의 양 y를 x에 관한 식으로 각각 나타내어라.

(2) 물을 빼내기 시작한 지 몇 분 후에 두 물통에 남아 있는 물의 양이 같아지는지 구하여라.

(B 교과서, 2014, p. 26)



예제 1 10L의 물이 들어 있는 수조에 매분 2L씩의 물을 받았다. 물을 받기 시작하여 x분 후 수조에 담긴 물의 양을 yL라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내고, y가 x에 관한 일차함수인지 말하여라.

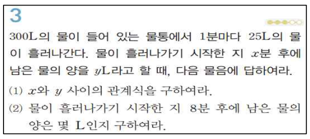
풀이 | 매분 2L씩의 물을 받는다면 x분 후 수조의 물의 양은 $2x$L가 늘어나므로 x분 후 수조에 들어 있는 물의 양은 $(2x+10)$L이다.
따라서 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내면

$y=2x+10$

이고, $2x+10$은 x에 관한 일차식이므로 y가 x에 관한 일차함수이다.

답 $y=2x+10$, 일차함수이다.

(A 교과서, 2014, p. 149)



3

300L의 물이 들어 있는 물통에서 1분마다 25L의 물이 흘러나간다. 물이 흘러나가기 시작한 지 x분 후에 남은 물의 양을 yL라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) x와 y 사이의 관계식을 구하여라.

(2) 물이 흘러나가기 시작한 지 8분 후에 남은 물의 양은 몇 L인지 구하여라.

(A 교과서, 2014, p. 178)

[그림 IV-10] 유사한 상황을 반복적으로 다루고, 문제를 풀기 위해 꼭 필요한 정보만 제공하는 예제와 과제

을 과제에서도 반복적으로 다룬다[그림 IV-10].

따라서 새로운 과제가 주어졌을 때, 문제 상황을 파악하여 변화하는 양과 그 양들 간의 관계를 스스로 탐구하기 보다는 수차례 학습한 경험을 바탕으로 절차를 반복하여 문제를 풀 가능성이 높다. 유사한 상황의 반복뿐만 아니라 예제의 분석 결과에서도 나타난 것처럼 문제에서 이미 관찰해야하는 두 양이 무엇인지를 지정해주고 있기 때문이기도 하다. 이는 상황과제를 설명할 수 있는 주요한 특성 중 하나인 문제를 풀기위해 필요한 정보의 형태가 어떠한가에 관한 분석결과와도 일치한다. 교과서의 과제는 문제를 풀기 위해 필요한 정보보다 더 많은 내용이 주어진 경우(superfluous)나 부족한 경우(missing)는 없으며 문제 풀이를 위해 꼭 필요한 정보만을 제공한다[그림 IV-10]. 즉, 문제에서 주어진 상황으로부터 문제 해결을 위한 핵심 정보들을 스스로 취사선택하며 정당화하는 과정을 필요로 하는 상황과제의 유형을 찾아보기는 어렵다.

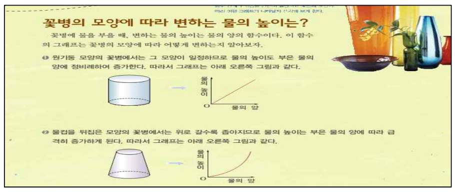
교과서에서 제시하는 함수 단원의 학습 목표는 "다양한 상황을 표와 식으로 나타내고, 함수의 개념을 이해하는 것"과 "함수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결하는 것"이다(A 교과서, 2013). 상황과제는 수학적 절차로 단순히 변환하여 해결할 수 없는 특성을 포함해야 하지만 교과서의 상황과제들에는 예제 및 본문의 내용들에 의해 문제 풀이의 절차가 명시적으로 드러나 있다. 예제를 통해 제공하는 '문제를 푸는 순서'에 따라 관계식을 찾고, 특정한 함숫값을 구하는 형태의 과제가 대부분이며 문제의 상황을 수식과 계산 절차 등으로 변환하는 과정이 명확하게 기술된다.

'의사소통', '추론', '문제해결', '창의·인성 기르기' 등의 이름이 부여된 상황과제들도 대부분 가장된 상황을 도입한 과제이거나 맥락이 전혀 없는 과제들이었고, 문제해결과 의사소통, 추론 등의 과정은 High-Level의 과제를 수행할 때 요

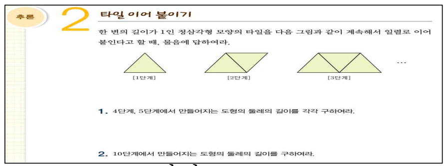
구되는 과정임을 주지할 때 이러한 과제들의 인지적 노력수준은 PNC 수준에 해당한다. 교과서마다 각 단원에서 이처럼 구분(labeling)된 상황과제들을 제시하고, 함수를 이해하기 위해 필수적으로 도입되어야 하는 상황이 포함된 과제(relevant and essential context)는 단원의 마지막 활동 과제에서 일부 다루기 때문에 학생들이 추론, 논리적 사고 과정을 경험하고 논의 및 토론을 할 수 있을 것으로 기대되지만 수학과제의 특성이나 교과서의 구성은 이러한 경험을 장려하는 것으로 보기는 어렵다. 학생들이 구체적으로 무엇을 해야 하는지에 대한 지시어나 목적어가 명확하지 않거나 존재하지 않는 등 과제에 부여한 명칭의 의미가 과제의 내용과 부합되지 않는 것으로 보인다. 또한 과제 자체를 독립적으로 살펴보았을 때에는 PWC의 특성을 가지고 있으나 교과서에서 과제를 제시하는 순서나 과제의 앞과 뒤에서 제공하는 흐름에 따라 상황과제에서 사용하는 맥락이 의미가 없어지거나 PNC나 M과 같은 Low-Level의 과제로 변질된다.

[그림 IV-11]의 상황 과제는 실제적인 상황과 맥락을 이용하여 학생들이 스스로 문제를 해결할 수 있는 방법을 탐구하고 추론하게 한다. 이 상황과제의 인지적 노력수준은 PWC에 해당하나 문제의 서술 방식이나 요구하는 응답의 형태는 그에 부합하지 않는다. 이 과제는 중학교 1, 2학년에 걸쳐서 세 교과서에서 매우 유사하거나 동일한 형태를 띠고 있는 상황과제로 '추론', '수학의 세계', '창의력 팡팡! 인성 쑥쑥'의 이름으로 제공된다. '추론'과제 역시 주어진 상황을 이해해야만 규칙을 찾아 함수가 됨을 확인할 수 있는 실생활 기반 상황과제이며 PWC 수준에 해당하지만 상황에 대한 질문은 반복적으로 길이를 구하는 것에 그치고 있다. 과제를 실제로 수행하는 과정과 과제에서 명명한 이름의 의미가 일치하지 않는 상황과제라고 볼 수 있다.

과제에 부여한 명칭의 의미가 과제의 내용과 부합되지 않으면서 교과서에서 과제를 제시하는

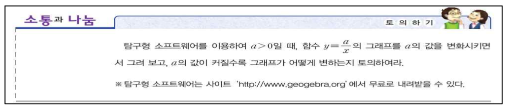


(C 교과서, 2013, p. 182)

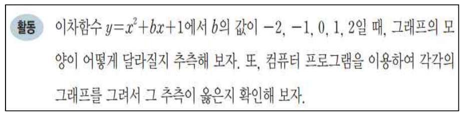


(B 교과서, 2013, p. 122)

[그림 IV-11] 주어진 맥락을 이해해야만 문제가 가능한 상황(relevant and essential context) 과제



(B 교과서, 2013, p. 134)



(C 교과서, 2015, p. 134)

[그림 IV-12] 교과서의 구성 및 과제 제시 순서에 따라 과제의 인지적 노력수준이 Low-Level로 나타나는 상황과제의 예

순서나 흐름에 따라 과제의 의미와 구성 내용, 인지적 노력수준 등이 영향을 받는 과제의 예로는 '소통과 나눔' [그림 IV-12] 과제를 들 수 있다. 함수의 계수가 변화함에 따라 함수의 그래프 모양이 어떻게 달라질지 추측해보고 탐구용 소프트웨어를 이용하여 추측 내용을 점검하도록 하고 있다. 그러나 이 과제가 주어지기 전에는 $y=\frac{a}{x}$에 대하여 $a=6$ 또는 -6일 때의 그래프

만을 관찰했기 때문에 컴퓨터 프로그램에 단순히 수식을 입력하고, 즉각적으로 결과를 확인하는 과정의 반복은 추론의 과정이나 결과를 의미있게 정리하기가 어렵다고 볼 수 있다. 또한 '활동' [그림 IV-11]에서 이차함수에서 일차항의 계수의 변화가 그래프의 모양을 어떻게 변화시킬지 추측하도록 하고 있다. 이러한 상황과제는 이차함수의 개념을 이해하기 위해 필요한 이차함수에서의 변화율의 의미를 바탕으로 추론하고 패턴을 찾을 수 있는 과제이다. 그러나 '소통과 나눔' 과제와 마찬가지로 추측의 이유나 과정에 대한 설명을 요구하지 않으며, 컴퓨터 프로그램을 이용하여 시각적으로 바로 확인이 가능하기 때문에 Low-Level 과제로 볼 수 있으며 상황과제로써의 맥락이 유효하지 않은 것으로 보인다.

세 교과서는 각 함수 단원에서 선형함수의 의미를 명확히 설명하지 않은 채 오로지 식의 모양에 의해 함수를 구분하도록 유도한다. 상황과제에서도 주어진 함수의 식에서 동류항끼리의 연산으로 함수식을 정리했을 때 나타나는 식의 형태로 일차함수와 이차함수를 구분하며, 일차함수와 이차함수를 비교하는 상황과제에서도 변화율에 대한 설명을 제시하지 않고, 두 함수가 반드시 지나는 점과 그래프의 모양과 같이 시각적으로 관찰할 수 있는 요소에 대하여만 기술하고 있다. 이미 알고 있는 사실을 단순 기술하는 것에 그치며 다양한 수학적 방법으로 설명하도록 요구하지 않는다.

지금까지 상황과제에 대하여 인지적 노력수준, 학생이 제시해야 하는 응답의 유형, 상황의 유형 등을 살펴보았다. 이를 통하여서 알 수 있는 사실은 상황과제는 대체로 문제에 포함된 상황과 주어진 정보만을 이용하여 풀 수 있으며 풀이 과정과 계산의 절차가 명확하여서 학생들이 문제 해결을 위해서 필요한 인지적 노력 수준이 낮게 나타나고 이에 상황과제가 제공하는 학습 기회의 중요한 측면은 계산 기능의 숙달만이 강조되는 것으로 보인다. 다음에서는 함수의 내용과 실행, 수학과제, 상황과제의 분석의 결과를 바탕으로 한 내용에 대하여 논의한다.

3. 논의

세 교과서는 모두 해당 학년에서 학습하게 되는 함수에 대해 함수와 그 그래프, 함수의 활용의 순서로 단원을 전개한다<표 III-2>. 단원의 구조는 선수학습 내용을 확인하고, 관련된 이야기로 단원을 도입한 후 함수의 정의와 규칙, 법칙을 학습하고, 예제와 과제를 통해 문제풀이를 반복적으로 수행하도록 되어있다<표 III-3>. 이렇게 구성된 교과서의 구조에 따라 학생들은 어떤 학습 기회를 경험하게 되는지 종합하여 논의할 내용을 네 가지로 정리한다.

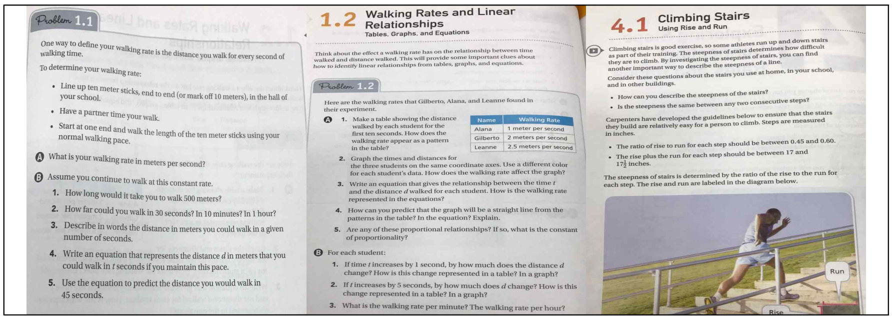
첫째, 단원의 도입에서 이전 학년에서 학습한 내용과 해당 단원에서 학습하게 될 내용 간의 연결성을 파악할 수 없으며, 단원도입에서 제공하는 함수에 관한 이야기와 그에 따른 질문만으로는 해당 단원에서 학습하고자 하는 내용을 파악하기가 어렵다. 이전 학년에서 학습한 내용을 확인하는 것을 목적으로 제공하는 '준비해볼까?', '되짚어보기' 등의 '준비학습'은 함수식을 보고 함수의 종류를 판별하거나 함숫값을 구하여 표의 빈 칸을 채우는 M 또는 PNC 수준의 문항들로만 구성되어 있다. 학생들이 이전에 알고 있던 지식들을 스스로 조직하여 정리하거나 설명하도록 요구하지 않으며 단순한 수학적 사실을 알고 있는지 확인하거나 계산 능력을 확인하는 수준이다. '준비학습'에 이어 제공하는 '단원도입'은 해당 학년에서 학습할 함수의 한 예를 이야기로 제공한다. 그러나 이러한 이야기들은 함수를 이해하기 위해 반드시 다뤄야 하는 실질적인 맥락이 아니라 교과서의 본문의 과제에 적용하기 위

해 인위적으로 구성한 소재로 이루어진다. 이야기에 이어지는 질문은 무엇을 답해야 하는지가 분명하지 않으며 이를 바탕으로 본문에서 학습하게 될 내용이 무엇인지 예상하기 어렵다. 또한 '단원도입'의 이야기를 본문의 개념학습이나 수학과제에서 구체적으로 다루지 않기 때문에 학생들이 답한 내용에 대해 점검하고 사고를 확장할 수 있는 기회를 제공하지 않는다.

둘째, 수학의 내용에서 반드시 포함하고 있어야 하는 함수의 개념이나 의미에 대해 설명을 충분히 하지 않으며 정의와 규칙, 법칙을 제시하고 일반화를 선언하고, 수학의 실행으로써의 예제에서는 이를 바탕으로 한 계산의 절차만을 설명하기 때문에 학생들은 함수 학습에서 계산의 과정을 반복적으로 수행하게 된다. 함수의 핵심 내용인 변화율과 공변 추론의 개념을 설명하지 않는다. 이는 함수식의 모양으로 함수의 종류를 구별하는 교사들의 지식(문진수 · 김구연, 2014; 전미현 · 김구연, 2015)과도 관련이 있다. 교과서의 모든 예제는 패턴을 찾고 탐구하는 과정, 그리고 다양한 방법으로 함수를 표현하고 설명하는 과정을 강조하기 보다는 함숫값을 구하거나 그래프를 그리는 등 단순한 문제풀이와 답 구하기를 반복하도록 유도하는 것으로 보인다.

셋째, 수학의 내용에서 제시한 정의와 법칙, 규칙을 따라 계산하는 절차가 예제와 과제를 통해 강조되고 있고, 각 요소들의 구성이나 내용의 흐름이 연결되지 않는다. 따라서 앞서 해결한 과제가 다음의 과제를 해결하는 데에 있어서 사고가 확장되게 돕거나, 심화하여 생각할 수 있는 형태가 아니다. 미국의 Connected Mathematics Project 7학년 교과서의 경우, 선형관계 단원에서 'Walking rates'이라는 주제로 두 변수의 관계 및 변화를 탐구할 수 있는 질문들을 여러 단계에 거쳐서 제시한다[그림 IV-13]. 일정 거리를 가는 데 시간이 얼마나 걸리며 걷는 시간을 점차 늘려갈 때 갈 수 있는 거리는 어떻게 되는지를 조사하고, 걷는 속도가 다른 여러 사람을 비교함으로써 상황을 확장한다. 과제를 수행하면서 학생들은 표, 그래프, 방정식, 비율관계 등으로 표현하여야 하며, 점차 뛰거나 계단을 오르는 상황으로 확장하면서 두 변수의 관계를 다양하게 탐구하고 비율추론으로써 기울기의 개념을 탐구할 수 있는 학습기회를 경험한다.

넷째, 상황과제는 해당 상황과제가 지향하는 목적과 부합하지 않는 것으로 보인다. 예를 들어 각 교과서 과제의 지시어가 '말하여라.', '토의하여라.'인 경우 '의사소통'과제로 구분을 하고, '추측하여라.'의 경우 '추론'과제 등으로 구분한다. 그러나 수학과제의 내용을 다층적으로 살펴보았을 때 이 같은 상황과제들은 학생들에게 의사소통이나 추론과 같은 수학적 과정을 경험하도록



Problem 1.1

One way to define your walking rate is the distance you walk for every second of walking time.

To determine your walking rate:

- Line up ten meter sticks, end to end (or mark off 10 meters), in the hall of your school.
- Have a partner time your walk.
- Start at one end and walk the length of the ten meter sticks using your normal walking pace.

A What is your walking rate in meters per second?

B Assume you continue to walk at this constant rate.

1. How long would it take you to walk 500 meters?
2. How far could you walk in 30 seconds? In 10 minutes? In 1 hour?
3. Describe in words the distance in meters you could walk in a given number of seconds.
4. Write an equation that represents the distance d in meters that you could walk in t seconds if you maintain this pace.
5. Use the equation to predict the distance you would walk in 45 seconds.

1.2 Walking Rates and Linear Relationships

Tables, Graphs, and Equations

Think about the effect a walking rate has on the relationship between time walked and distance walked. This will provide some important clues about how to identify linear relationships from tables, graphs, and equations.

Problem 1.2

Here are the walking rates that Gilberto, Alana, and Leanne found in their experiment.

A 1. Make a table showing the distance walked by each student for the first ten seconds. How does the walking rate appear as a pattern in the table?

Name	Walking Rate
Alana	1 meter per second
Gilberto	2 meters per second
Leanne	2.5 meters per second

2. Graph the times and distances for the three students on the same coordinate axes. Use a different color for each student's data. How does the walking rate affect the graph?
3. Write an equation that gives the relationship between the time t and the distance d walked for each student. How is the walking rate represented in the equations?
4. How can you predict that the graph will be a straight line from the patterns in the table? In the equation? Explain.
5. Are any of these proportional relationships? If so, what is the constant of proportionality?

B For each student:

1. If time t increases by 1 second, by how much does the distance d change? How is this change represented in a table? In a graph?
2. If t increases by 5 seconds, by how much does d change? How is this change represented in a table? In a graph?
3. What is the walking rate per minute? The walking rate per hour?

4.1 Climbing Stairs

Using Rise and Run

Climbing stairs is good exercise, so some athletes run up and down stairs as part of their training. The steepness of stairs determines how difficult they are to climb. By investigating the steepness of stairs, you can find another important way to describe the steepness of a line.

Consider these questions about the stairs you use at home, in your school, and in other buildings.

- How can you describe the steepness of the stairs?
- Is the steepness the same between any two consecutive steps?

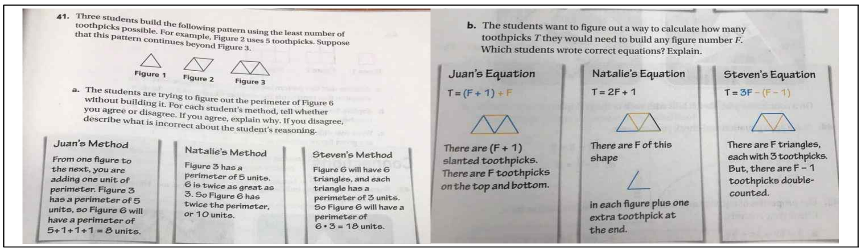
Carpenters have developed the guidelines below to ensure that the stairs they build are relatively easy for a person to climb. Steps are measured in inches.

- The ratio of rise to run for each step should be between 0.45 and 0.60.
- The rise plus the run for each step should be between 17 and $17\frac{1}{2}$ inches.

The steepness of stairs is determined by the ratio of the rise to the run for each step. The rise and run are labeled in the diagram below.

[그림 IV-13] 단원 내에서는 물론 단원 간에서 연결성을 보여주는 상황과제

(Lappan, Phillips, Fey, & Friel, 2014, pp. 9-10)



[그림 IV-14] 변수에 대한 관점을 다양하게 관찰하고 추론하도록 하는 상황과제
(Lappan, Phillips, Fey, & Friel, 2014, p. 107)

유도하지 않는다. [그림 IV-12]에서 타일을 이어 붙이는 상황과제는 일차함수에 있어 실질적인 이해를 돕는 상황을 제시하지만 하위 문항에서 학생의 사고과정을 설명할 수 있도록 유도하지는 않는다. 이 과제는 삼각형, 사각형, 오각형 등의 다각형에 성냥개비나 막대를 이어 붙여서 연속된 도형을 만드는 형태로도 다수 제공된다 (Lappan, Phillips, Fey, & Friel, 2014). 교과서에서는 도형이 하나씩 늘어날 때, 타일의 둘레의 길이로만 변수를 한정하여 관찰할 것을 요구하나 타일이 만나면서 생긴 모서리의 개수를 모두 포함하여 패턴을 관찰할 수도 있고, 교점까지 포함한 꼭짓점의 개수를 관찰하는 규칙을 찾는 등 학생들마다 다른 관점으로 상황을 탐구할 수 있다. 주어진 도형의 규칙을 식으로 나타내거나 식을 보고 주어진 상황을 해석하는 과정은 변수에 대해 보다 깊이 이해할 수 있도록 돕는다[그림 IV-14]. 따라서 탐구의 결과로 특정한 값만을 구하는 것보다 추론의 과정을 설명하도록 하거나 식으로 나타내어 문자의 의미를 설명하도록 하는 것이 '추론' 과제로서 적합하다고 할 수 있다.

V. 결론 및 제언

이 연구에서는 중학교 수학교과서가 함수의 내용과 실행을 어떻게 제시하며 수학과제의 특성을 통해서 학생들이 어떠한 학습 경험을 하게 될 것인지를 학습기회 측면에서 탐색하였다. 교과서가 제시하는 함수의 내용은 함수의 본질적인 구성요소에 기초하여서 조직되기 보다는 함수의 정의, 함수식 구하기, 그래프 그리기, 함숫값 찾기 등의 뜻을 알고 계산하기에 초점을 두고 있는 것으로 보인다. 교과서에 포함된 수학과제/문제들은 함수를 개념적으로 설명하기 위하여 의미 있는 상황 혹은 맥락을 제공하지 않으며 매우 파편화되어 있으며 분절화 되어 있는 것으로 나타났다. 즉, 교과서의 함수단원에서 제시하는 과제는 학생들이 복합적으로 사고하도록 장려하지 않으며 절차적 지식 습득의 숙달만을 강조하는 것으로 보인다. 교과서의 함수 단원에 포함된 과제들은 함수의 개념을 설명하기 위한 상황 혹은 맥락을 대단원의 서두에서 제시하는데 이러한 상황과 맥락이 본격적인 내용을 설명하고 적용하는 데에 있어서 연결성이 부족한 것으로 보인다. 또한, 실생활에서 자주 접할 수 있는 현상을 소재로 문제를 제시하는 경향성이 뚜렷하여서 실제로 고차원적 사고를 촉진하는 것으로 이해할 수 있는 여지를 제공하지만 교과서에서 제시하는 실생활 문제들의 대부분이 수학적 개념과 실제 상황과의 연결을 강조하기보다는 문제의 내용과 맥락이 단순히 실생활을 위장하는 것에 그치며 (권지현 · 김구연, 2013; 이혜림 · 김구연, 2013) 결국 그 실생활의 맥락이 유의

미하지 않은 상황으로 귀결된다.

교과서 구성을 구체적으로 살펴보면 중학교 3 학년에서는 '이차함수와 그 그래프'와 '이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프' 로 구성되어 있으며 그 내용은 이 주제에만 국한된 내용을 다루고 있다. 또한 각 단원 별로 스스로 중단원 학습점검, 집중탐구, 창의·인성 향상을 위한 수학적 과정 익히기, 단원마무리 등으로 과제/문제를 구분하여 제시하지만 이러한 구분(labeling)이 크게 의미가 없는 경우가 많은 것으로 나타났는데, 이러한 결과 또한 선행연구 결과(권지현 · 김구연, 2013; 김미희 · 김구연, 2013; 홍창준 · 김구연, 2012)와 그 궤를 같이 한다. 즉, 우리나라의 교과서에서 문제해결 능력, 창의력 등으로 구분되어 문제를 제시하지만 그 문제의 질적인 부분은 앞에서 학습한 본 내용과 유사한 구조로 사고 수준이 질적으로 변환되지 않은 채 거의 똑같은 구조를 가진 문제로 단순히 숫자나 문자만을 변형하여 제시하고 있다. 학생들이 앞에서 배운 절차적 지식(법칙, 알고리즘, 공식 등)을 개념과 의미와의 연결 없이 그대로 반복하여 적용하는 연습은 수학적 사고력을 함양하며 문제해결 능력을 기르는 데 크게 도움이 되지 않을 것이다.

특히, 교과서에서 제공하는 내용과 형식을 통해서는 학생들이 함수를 개념적으로 이해할 수 있는 경험을 하는 것이 매우 어려울 것으로 보인다. 학교수학에서 함수를 학습함으로써 학생들은 패턴 찾기에서부터 시작하여 비율 추론(proportional reasoning)으로 확장되는 대수적 추론 능력을 개발하게 된다. 함수의 핵심 내용은 변수 간의 관계를 규명하며 이때 상황, 문장제, 표, 그래프, 대수식 등의 다양한 표상 방식으로 나타낼 수 있는 능력, 변수의 변화율을 찾는 능력, 변수 간의 선형관계, 공변(covariation) 추론 능력 개발에 그 초점을 둔다(Cooney, Beckmann, & Lloyd, 2010; Lloyd, Herbel-Eisenmann, & Star, 2011). 그러나 중학교 교과서의 내용 조직은 선형성의 의미를 변화율과 연결하여서 다른 유형의 함수를 구분하기 보다는 (독립)변수의 지수로 구분하는 방식을 암시적으로 제시한다. 또한 교과서가 변화율, 공변의 개념도 명시적으로 제공하지 않으므로 학생들은 함수의 개념적 의미를 변화율과 공변의 개념으로 이해하는데 어려움을 겪으며 그래프의 의미를 제대로 해석하지 못하고 (마민영 · 신재홍 · 이수진 · 박종희, 2016; 이광상 · 조민식 · 류희찬, 2006; 박종희 · 신재홍 · 이수진 · 마민영, 2017) 함수의 내용을 대수적 계산으로만 이해할 가능성이 크다.

수학교육에서 수학적 과정(mathematical process, NCTM, 1989, 2000) 강조와 수학적 역량(mathematical proficiency, NRC, 2001) 계발은 매우 중요한 목표이며 방식이다. 수학적 과정이라는 측면에서는 학생들이 수학적 과정(문제 해결, 추론 및 증명, 연결성, 표현, 의사소통)을 하나의 엮인 구조로 인식하고 직접 경험하여 고차원적 사고를 기르는 것을 강조한다(NCTM, 1989, 2000). 수학적 역량이라는 관점에서도 수학을 성공적으로 학습한다는 것은 개념적 이해, 절차적 지식에 대한 능숙함, 추론 능력, 적절한 전략의 활용, 긍정적인 태도 등이 서로 뒤얽힌 상호의존적 연결체(interwoven and interdependent)라는 의미이다(NRC, 2001). 이러한 교육과정의 목표와 형식은 교과서에 반영되어서 구체화되어야 하는데 특히 학습자가 배워야 할 내용과 함께 그 내용을 통해서 할 수 있게 되는 행동양식을 구조화하여야 한다(Bell, 1993; Schmidt, 2012). 그러나 우리나라 교육과정에서 목표로 설정한 수학적 과정이나 수학적 역량(proficiency)[1]의 요소들은

---

1) 이전의 연구에서는 mathematical proficiency를 수학적 숙련도로 해석하였으나 수학적 능력이나 역량의 뜻으로 해석하는 것이 적절하다고 본다. 2007 개정 교육과정에서 mathematical power를 수학적 능력으로 볼

교과서에서는 상호의존적 연결체로 간주하기 보다는 분절적이고 파편화된 요소로 여기는 경향을 보이며 이러한 경향성은 학생들이 경험할 학습기회에 막대한 영향을 미칠 것으로 예상된다.

수학과 교육과정이 제시하는 수학교육의 목표와 성격도 학생들의 복합적이고 고차원적 사고 습관 개발과 함양을 표방한다. 2009 개정 교육과정에는 수학 핵심역량 개발을 강조하는데 이는 문제해결 능력, 추론 능력, 의사소통 능력 등을 의미한다. 2015 개정 수학과 교육과정에서는 수학 교과역량 개발을 수학교육의 중요한 성격과 목표로 규정하고 있다. 수학 교과역량이란 문제해결, 추론, 창의 · 융합, 의사소통, 정보처리, 태도 및 실천을 의미하는 것으로 수학교육 및 수학수업을 통해서 이러한 학생들의 역량 개발을 강조한다. 수학 교과역량은 단순한 문제 풀이나 계산 기능의 습득으로 기를 수 있는 능력이 아니며 매우 고차원적인 사고 능력이다. 그러나 2009 개정에 따른 교과서에 포함된 과제들은 과제의 인지적 노력수준 관점에서 볼 때 고차원적 사고를 강조하기 보다는 낮은 수준의 매우 단편적이고 단선적인 계산 기능을 강조하며 따라서 수학수업을 통한 학생들의 고차원적 사고 습관 개발 및 함양에 대한 강조점이 실현되지 못하는 것으로 나타났다. 이는 2007 개정에 따른 중학교 교과서에 포함된 수학과제 분석을 시도한 선행연구 결과(김구연, 2010; 홍창준 · 김구연, 2012; 권지현 · 김구연, 2013; 김미희 · 김구연, 2013)와도 일맥상통한 결과이다. 다시 말해서, 우리나라의 중학교 교과서는 교육과정이 지향하는 수학교육의 목표와 비전 그리고 성격을 구현할 수 있도록 설계되고 구성되어 있다고 보기 어려우며, 2007 개정 교과서의 문제점과 개선점이 2009 개정 교과서에 적절한 방식으로 반영이 되어 개선되었다고 볼 수 없다. 특히, 함수의 내용의 측면에서 학생들은 교과서를 통해서 함수를 개념적으로 이해할 수 있기보다는 함수의 형식적 뜻을 알고 그 뜻에 따라 그리고 대수적인 계산 절차에 따라 함숫값을 구하는 절차적 기능 숙달만을 강화하게 되는 측면이 매우 두드러진다. 나아가 학생들이 진정한 의미의 문제해결이나 추론 및 정당화 등을 구체적으로 경험할 수 있는 기회는 매우 부족한 것으로 보인다.

교사가 인지적으로 높은 수준의 과제를 잘 선택하고 설정하는 것만으로 학생들의 고차원적 사고 수준을 보장할 수 있는 것은 아니지만 (Henningsen & Stein, 1997), 교과서가 제시하는 수학과제의 대부분이 간단한 암기에 기초하거나 혹은 절차적 지식을 적용한 단순 계산 기능을 통해 답을 구하는 것에 집중한다면 학생들에게 수학교육을 통해서 길러야 할 고차원적 사고능력 배양을 기회를 차단하는 결과를 초래한다. 이를 해결하기 위해서는 최소한 학생들에게 다양한 수준의 사고과정을 경험할 수 있는 과제/문제 구성이 이루어지도록 수학 교과서 설계와 구성에 대한 심각한 비판적 검토와 검증을 시급히 실시하여야 할 것이다. 왜냐하면 교과서를 통해서 학생은 수학이 무엇인가에 대하여 인식하게 되며 그에 따른 태도와 실천을 수반한다(NCTM, 1995; 2000). 동시에 교사는 교과서를 통해서 학교수학의 내용과 개념을 이해하고(김대영 · 김구연, 2014; 전미현 · 김구연, 2015) 교육과정을 이해하는 경향성을 드러낸다(김민혁, 2012). 또한 교사들은 교과서의 내용을 학생들의 수학적 사고를 촉진하는 인지적으로 높은 수준의 과제들로 인식하며(김대영 · 김구연, 2014; 이혜림 · 김구연, 2013) 따라서 교과서를 중심으로 수업을 계획하여 실행한다(김민혁, 2013; Collopy, 2003; Remillard, 1999; Remillard & Bryans, 2004; Stein, Grover & Henningsen, 1996; Stein, Remillard &

수 있으므로 이화 차별화하기 위하여서 proficiency를 역량으로 해석하였다.

Smith, 2007). 교과서의 구성은 기존의 구성에서 탈피하여야 할 것이며 또한 질적으로 고차원적 사고를 촉진하며 핵심역량을 강화할 수 있도록 설계된 수학과제를 포함하는 등 질적인 변화를 시도하여야 할 것이다.

참고문헌

교육과학기술부 (2009). **2009 개정 수학과 교육과정**.

교육과학기술부 (2010). **2011년 주요 업무계획: 창의인재와 선진과학기술로 여는 미래 대한민국**. Retrieved from http://if-blog.tistory.com/939

권지현 · 김구연 (2013). 중학교 수학 교과서에 제시된 기하영역의 수학 과제 분석. **수학교육, 52**(1), 111-128.

김구연 (2011a). How teachers use mathematics curriculum materials in planing and implementing mathematics lessons. **학교수학, 13**(4), 485-500.

김구연 (2011b). The impact of enacted curriculum on student learning in mathematics classrooms. **한국학교수학회논문집, 14**(1), 31-42.

김대영 · 김구연 (2014). 중등 수학교사의 교과서 수학과제 이해 및 변형 능력. **학교수학, 16**(3), 445-469.

김미희 · 김구연 (2013). 고등학교 교과서의 수학과제 분석. **학교수학, 15**(1), 37-59.

김민혁 (2014). 수학 교사의 교과서 및 교사용 지도서 활용도 조사. **학교수학, 16**(3), 503-531.

마민영 · 신재홍 · 이수진 · 박종희 (2016). 중학생들의 함수의 그래프에 대한 이해와 발달. **학교수학, 18**(3), 457-478.

문진수 · 김구연 (2014). 중등 수학교사의 함수에 대한 지식(MKT)측정 및 분석. **학교수학, 17**(3), 469-492.

박종희 · 신재홍 · 이수진 · 마민영 (2017). 그래프 유형에 따른 두 공변 추론 수준 이론의 적용 및 비교. **수학교육학연구, 27**(1), 23-49.

이광상 · 조민식 · 류희찬 (2006). 엑셀의 활용이 일차함수 문제해결에 미치는 효과. **학교수학, 8**(3), 265-290.

이혜림 · 김구연 (2013). 수학교과서 문제에 대한 예비중등교사의 이해 및 변형 능력. **수학교육학연구, 23**(3), 353-371.

전미현 · 김구연 (2015). 예비교사들의 수학교수 지식(MKT) 측정 및 분석 연구. **수학교육학연구, 25**(4), 691-715.

홍창준 · 김구연 (2012). 중학교 함수 단원의 수학 과제 분석. **학교수학, 14**(2), 213-232.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1996). Reform by the book: What is-or might be-the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational Researcher, 25*(9), 6-8.

Bell, A. (1993). Principles for the design of teaching. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 5-34.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning, 12,* 117-151.

Collopy, R. (2003). Curriculum materials as a professional development tool: How a mathematics textbook affected two teachers' learning. *Elementary School Journal, 103*, 287-311.

Cooney, T. J., Beckmann, S., & Lloyd, G. M. (2010). *Developing essential understanding of functions for teaching mathematics in grades 9-12.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Davis, E. A., & Krajcik, J. S. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher, 34*(3), 3-14.

Day, L. (2015). Mathematically rich, investigative tasks for teaching algebra. *Mathematics teacher, 108*(7), 512-518

Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989). Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? *American Educational Research Journal, 26*(3), 403-421.

Haggarty, L., & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks in England, France and Germany: Some challenges for England. *Research in Mathematics Education, 4*(1), 127-144.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-Based Factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524-549.

Hill, H. C., & Charalambous, C. Y. (2012). Teacher knowledge, curriculum materials, and quality of instruction: Lessons learned and open issues. *Journal of Curriculum Studies, 44*, 559-576.

Kilpatrick, J. (2003). What works? In S. L. Senk & D. R. Thompson (Eds.), S*tandards-based school mathematics curricula. What are they? What do students learn?* (pp. 471-493). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lappan, G., Phillips, E. D., Fey, J. T., & Friel, S. N. (2014). *Connected Mathematics 3: Grade 7.* Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Liu, X. (2009). *Linking competence to opportunities to learn: Models of competence and data mining*. Springer: New York.

Lloyd, G. M. (1999). Two teachers' conceptions of a reform curriculum: Implications for mathematics teacher development. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*, 227-252.

Lloyd, G. M., Herbel-Eisenmann, B., & Star, J. R. (2011). *Developing essential understanding of expressions, equations, and functions for teaching mathematics in grades 6-8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lloyd, G. M., Remillard, J. T., & Herbel-Eisenmann, B. A. (2009). Teachers' use of curriculum materials: An emerging field. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 3-14). Routledge: New York.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.). Washington, DC: National Academy Press.

Remilard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research, 75*(2), 211-246.

Remillard, J. T., & Bryans, M. B. (2004). Teachers' orientations toward mathematics curriculum materials: Impllications for teacher learning. *Journal for Research in Mathematics*

Education, 35, 352-388.

Reys, B. J., Reys, R. E., & Chavez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership, 61*(5), 61-66.

Reys, R. E, Reys, B. J., Lapan, R., Holliday, G., & Wasman, D. (2003). Assessing the impact of Standards-based middle grades mathematics curriculum materials on student achievement. J*ournal for Research in Mathematics Education, 34*, 74-95.

Schmidt, W. H. (2012). Measuring content through textbooks: The cumulative effect of middle-school tracking. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived'resources; Mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 143-160). Dordrecht: Springer.

Senk, S. L., & Thompson, D. R. (2003). Middle school mathematics curriculum reform. In S. L. Senk & D. R. Thompson (Eds.), *Standards-based school mathematics curricula: What are they? What do students learn?* (pp. 181-191). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sherin, M., & Drake, C. (2009). Curriculum strategy framework: Investigating patterns in teachers' use of a reform-based elementary mathematics curriculum. *Journal of Curriculum Studies, 41*(4), 467-500.

Stein, M. K., & Kim, G. (2009). The role of mathematics curriculum materials in large-scale urban reform: An analysis of demands and opportunities for teacher learning. In In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 37-55). Routledge: New York.

Stein, M. K., Kim, G., & Seeley, M. (2006). *The enactment of reform mathematics curricula in urban settings: A comparative analysis*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Stein, M. K., Remilard, J. T., & Smith, M. S. (2007).How curriculum influences student learning. In F. K. Lester (Ed), S*econd handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-370). Charlotte, NC: Information Age.

Tarr, J. E., Chavez, O., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2006). From the written to the enacted curricula: The intermediary role of middle school mathematics teachers in shaping students' opportunity to learn. *School Science and Mathematics, 106*(4), 191-201.

Tornroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation, 31*(4), 315-327.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 89*, 41-65.

Exploring How Middle-School Mathematics Textbooks on Functions Provide Students an Opportunity-To-Learn

Kim, Gooyeon (Sogang University)
Jeon, MiHyun (Graduate School of Education, Sogagn University)

This study aims to explore how Korean middle-school mathematics textbooks on functions provide students an opportunity-to-learn [OTL]. For this purpose, we investigate 3 textbooks in terms of mathematics content and practice, the level of cognitive demands of mathematical tasks, types of student responses, types of context-based tasks, and connections among the tasks. The findings from the data analysis suggest as follows: a) an opportunity-to-learn to connect procedures to functional concepts and new ideas of functions to the existing one is very limited; b) the textbooks seem to provide students an OTL to understand functions as definitions, rules and conventions and to experience repeatedly procedural executions through worked examples and mathematics tasks; c) students may not experience to explain their own ideas/thinking by using mathematical sentence or justify their own cognitive processes; and d) students can be exposed to get a sense of mathematics as a set of fragmented and isolated facts or procedures, rather than to encourage to expand and deepen their understanding of functions.

* Key Words : Opportunity-To-Learn (학습기회), functions (함수), 교과서 (textbooks), 중학교 수준 (middle-school)

논문접수 : 2017. 5. 9
논문수정 : 2017. 6. 18
심사완료 : 2017. 6. 21