

비례식과 비례배분에 대한 초등 수학 교과서 비교 분석¹⁾

장 해 원* · 박 해 민** · 김 주 숙*** · 임 미 인**** · 유 미 경***** · 이 화 영*****

본 연구는 초등 수학에서 비례식과 비례배분 지도 시 고려해야 할 사항에 대해 문헌 고찰을 통해 알아보고, 이를 바탕으로 국내외 수학 교과서의 비례식과 비례배분 관련 내용을 종적·횡적으로 비교 분석하여 비례식과 비례배분의 적절한 지도 방안을 모색하는 것을 주요 내용으로 한다. 구체적으로 종적 분석을 위해 국내의 5차부터 2009 개정 교육과정까지의 수학 교과서를, 횡적 분석을 위해 일본, 싱가포르, 중국 수학 교과서를 연구 대상으로 선정하였다. 각각의 교과서에 제시된 비례식과 비례배분 관련 학습 요소 및 지도 순서, 용어의 정의, 개념의 도입 맥락, 도입 시 사용된 시각적 표현을 기준으로 분석을 실시하였다. 그 결과, 비례식과 비례배분 정의의 선수 학습과의 연결, 비례식과 비례배분의 도입 시 맥락과 지도 순서의 세심한 고려, 다양한 시각적 표현의 사용, 실생활 맥락 속에서 문제 해결 기회 확대의 필요 등 차기 교과서의 비례식과 비례배분 단위 구성을 위한 몇 가지 시사점을 도출하였다.

I. 서론

비례식과 비례배분 관련 내용은 수학 내적으로 초등 산술의 결정이며 이후 수학 학습의 초석이 될 뿐 아니라, 수학 외적으로도 타 학문 영역과 일상생활에 밀접하게 연결된다(Lesh, Post, & Behr, 1988). 이러한 의미에서 2015 개정 교육 과정에 따른 초등학교 수학 교과서가 개발되고 있는 현 시점에서 학생들이 지속적으로 어려움을 느끼고 있는 비례식과 비례배분 단원에 대한 내용을 교과서에서 어떻게 구현할 것인지에 대해 심도 있는 고찰이 요구된다.

일반적으로 두 비 $a:b$ 와 $c:d$ 의 비율이 같을 때 두 비는 같다고 하며, 이를 등호를 써서 $a:b = c:d$ 로 나타내고 비례식이라고 일컫는다. 비례식 개념은 비를 포함하는 문제를 해결하는 데 유용하다. 정영옥(2015)은 비와 비례의 개념을 전자는 두 대상의 곱셈적 관계를 의미하는 것으로, 후자는 두 비가 같음을 의미하는 것으로 구분하기도 하지만, 비의 동치 관계를 파악하는 비례를 통해 이와 관련된 진정한 이해를 할 수 있다고 하였다.

비례식과 비례배분은 비례 개념을 바탕으로 하며, 비례 추론 능력은 비례식과 비례배분 학습에 꼭 필요한 수학적 사고 능력이다. 비례 추론

* 서울교육대학교, hwchang@snue.ac.kr (제1 저자)

** 서울한강초등학교, dr1203@naver.com

*** 서울서빙고초등학교, banwonele@sen.go.kr

**** 서울오류초등학교, ssbin22@sen.go.kr (교신저자)

***** 서울양진초등학교, ky980101@naver.com

***** 한국과학창의재단, hylee@kofac.re.kr

1) 이 논문은 2017년도 교육부의 재원으로 한국과학창의재단의 지원을 받아 수행된 성과물임.

능력은 초등학교 저학년부터 시작하여 중학교까지 오랜 시간에 걸쳐 발달하며(Ben-Chaim, Keret, & Ilany, 2012), 초등학교 단계에서의 비형식적 비례 추론 능력은 중학교 단계에서의 형식적 비례 추론 능력으로 이행된다(엄선영, 2012). 비례 추론 능력은 비례적 상황과 비비례적 상황을 구분하는 능력을 포함하며(이경훈, 2016), 초등학교 단계에서 형성된 비례 추론 능력은 상위 단계의 수학 학습의 성공을 위한 필수적인 요인이 된다(Lesh et al., 1988). 이러한 관점에 기초할 때 학생이 비례식과 비례배분에 대한 이해가 부족할 경우 이후의 학습에서 어려움을 겪을 수 있으므로, 비례식과 비례배분은 초등 수학에서 학생들에게 의미 있게 지도해야 할 핵심적인 내용이라 할 수 있다.

그러나 비례식 지도에 있어서, 다른 나라의 수학 교과서에 비해 우리나라 교과서는 알고리즘 지도에 중점을 두고 있어 학생들을 지나치게 형식적 알고리즘에 의존하게 만드는 경향이 있다는 지적이 있어 왔다(고은성, 이경화, 2007; 정은실, 2013; 정영욱, 2005, 2015). 비례식 알고리즘을 강조하는 것은 학생들로 하여금 비례식에 대한 계산력을 향상시켜주는 반면, 비례 상황 인식 능력이나 문제로부터 스스로 비례식을 만들어내는 능력 등 수학적 사고를 신장시키는 데에는 한계가 있다. 비례식과 관련된 비례 추론 지도 시, 다양한 맥락에서 비의 동치 관계를 파악하는 것이 중요하며 알고리즘 위주의 대수적 맥락에서 벗어나 기하적 맥락을 더 많이 제공하고 시각적 표현을 적극적으로 도입하여야 한다(정영욱, 2005, 2015). 즉 비례식의 성질을 적용한 알고리즘 위주의 교과서를 벗어나 학생들의 비례 추론 향상을 고려한 교과서 집필이 요구된다.

한편, Ponte & Marques(2011)는 포르투갈, 브라질, 스페인, 미국 수학 교과서의 비례 단원에 대

한 각 나라별 도입 시기와 과제 맥락 등에 관한 비교 연구를 실시한 후, 비례의 적절한 지도 방안을 모색하기 위해 보다 확장된 국제 비교 연구의 필요성을 언급하였다. 이에 2015 개정 교육 과정에 따른 수학 교과서(이하 2015 개정 교과서²⁾)의 비례식과 비례배분 단원을 구성하기에 앞서 관련 선행 연구에 대한 고찰 및 국내외 수학 교과서에 대한 비교 분석이 필요함을 파악하였다.

본 연구는 차기 교과서의 비례식과 비례배분 단원 구현 시 고려해야 할 사항에 대한 유의미한 시사점을 도출하는 것을 연구의 목적으로 설정하고, 선행 연구를 중심으로 한 이론적 고찰을 통해 본 연구의 교과서 비교 분석을 위한 분석틀을 마련하였다. 이에 기초하여 5차부터 2009 개정 교과서와 일본, 싱가포르, 중국 교과서의 비례식과 비례배분 관련 학습 요소 및 지도 순서, 용어의 정의, 관련 개념의 도입 맥락과 도입 시 사용된 시각적 표현에 대해 종적, 횡적으로 비교 분석하였으며, 연구 결과를 바탕으로 차기 교과서 집필 시 비례식과 비례배분 단원 구성을 위한 몇 가지 교수학적 시사점을 도출하였다.

II. 이론적 배경

본 연구를 위한 이론적 배경으로 관련 선행 연구를 고찰하기에 앞서, 교육과정에서 제시하고 있는 비례식과 비례배분 관련 내용을 분석하였다. 2009 개정 교육과정에서 2015 개정 교육과정으로 전환되면서 비례식과 비례배분 관련 내용에 어떠한 변화가 있는지 비교하였다. 그 결과, 전반적인 성취기준에는 큰 변화가 없었으나, 2009 개정 교육과정에서 ‘비례식의 뜻을 알고, ...’, ‘비례배분의 뜻을 알고, ...’로 표현되었던

2) 다른 교육과정기 및 국외 수학 교과서도 이와 같은 방식으로 칭할 것이다(예, 7차 교과서, 중국 교과서).

것이 2015 개정 교육과정에서는 ‘비례식을 알고, ...’, ‘비례배분을 알고, ...’로 수정되었음을 확인할 수 있다. 이는 단순히 비례식, 비례배분의 정의 자체에 주목하기 보다는 그 개념을 폭넓게 이해할 필요에 따른 변화로 파악된다. 한편 2009 개정 교육과정부터 유지되고 있는 교수·학습 방법 및 유의 사항으로서의 ‘규칙성 영역의 문제 상황에서 문제 해결 전략 비교하기, 주어진 문제에서 필요 없는 정보나 부족한 정보 찾기, 조건을 바꾸어 새로운 문제 만들기, 문제 해결 과정의 타당성 검토하기 등을 통하여 문제 해결 능력을 기르게 한다(교육부, 2015b).’는 문제 해결 역량에 대한 강조를 함의하므로 문제 해결 역량을 고려하여 교과서의 비례식과 비례배분 단원을 구성할 필요를 파악하였다.

비례식과 비례배분에 관한 선행 연구로는 크게 개념의 도입 맥락과 시각적 표현에 관한 연구와 비례식과 비례배분 문제 해결과 관련된 연구를 찾아볼 수 있다. 본 연구에서는 각각에 관한 선행 연구를 나누어 고찰하고, 이로부터 추출한 요소에 기초하여 본 연구의 분석틀을 마련하였다.

1. 비례식과 비례배분 도입 맥락과 시각적 표현 관련 선행 연구

정은실(2013), 정영옥(2005, 2015)은 비례식의 도입 맥락과 시각적 표현에 대한 국내외 국외 교과서를 비교 분석하였다. 먼저 정은실(2013)은 비례 추론을 비, 비율, 비례식과 관련된 추론으로 보고 2007 개정 교과서의 비례식 도입 맥락이 정적이라는 문제점을 제기하며 대안으로 Kheong et al.(2008)의 방법을 제시하였다. Kheong et al.(2008)은 4개의 빨간 사과와 8개의 파란 사과의 비를 구하고, 각각의 사과를 한 접시에 2개씩 놓고 2접시와 4접시의 비를 구한 다음, 각각의

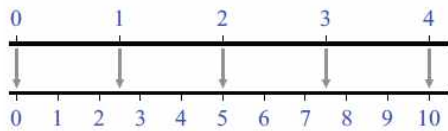
사과를 한 접시에 4개씩 놓고 1접시와 2접시의 비를 구하는 과정을 통해 각각 4:8, 2:4, 1:2인 세 비가 모두 같음을 보여 주는 맥락을 제안하였다. 이는 실생활과 연계된 맥락을 통해 학생들이 스스로 동치비의 의미를 알아가도록 하기 위함이다. 스스로 동치비의 개념을 찾아낸 학생들은 자연스럽게 비례식의 성질도 찾아낼 수 있으므로(정은실, 2013) 비례식과 비례배분의 도입은 정적인 맥락보다 동적인 맥락으로 학생들이 맥락을 통해 사고할 수 있도록 도울 필요가 있다.

정영옥(2005)은 우리나라, 미국, 일본, 중국 교과서의 비례식 지도에 대한 고찰을 통해 이른 형식화가 야기하는 어려움을 언급하였다. 우리나라는 비례식, 비례배분에 대한 지도가 미국, 일본, 중국에 비해 이른 시기에 시작되거나 짧은 시간 안에 학습이 이루어지는 것으로 나타났다. 따라서 학생들이 비례식과 비례배분 학습에 어려움을 느끼기 쉬우며, 이를 해결하기 위한 대안 중 하나로 기하적 맥락의 필요성을 언급하였다. 또한 정영옥(2015)은 우리나라, 미국, 영국 교과서에서 비와 비례의 지도 시기, 대수적·기하적 맥락, 시각적 표현을 분석한 결과를 토대로 알고리즘 위주의 대수적 과제를 활용한 맥락에서 벗어나 다양한 맥락을 균형 있고 충분하게 다룰 것을 주장하였으며 도입 맥락의 중요성 외에 영역 모델, 답음 모델, 이중 척도 모델 등 다양한 시각적 표현을 적극 활용하여 학생들 스스로 해결 방법을 찾아 비례식의 성질이나 알고리즘을 알아가는 것이 중요하다고 하였다. 즉 비례식과 비례배분의 도입 시, 알고리즘 위주의 성급한 형식화 보다는 대수적 맥락과 기하적 맥락의 균형 있는 도입과 더불어 다양한 시각적 표현의 활용을 통해 학생들 스스로 비례식의 성질이나 알고리즘을 찾아내도록 구성해야 한다.

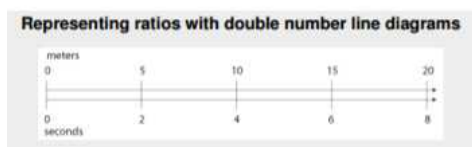
Ponte & Marques(2011)는 국외 교과서의 비례 단원의 과제 비교 분석 연구에서 포르투갈, 브라

질, 스페인 교과서의 경우, 연결성 과제 및 비수학적 맥락이 높은 비중을 차지하며 특히 실생활과 관련된 맥락의 비율이 높다는 결론을 제시하였다. 즉, 세 나라의 수학 교과서의 비례 단원에서는 비수학적 맥락을 강조하고 있음을 파악할 수 있다. 이는 국외에서 실생활과 관련된 맥락을 통해 비례 개념을 학습하고 있음을 언급하는 것이며 우리의 알고리즘 위주의 비례식, 비례배분 개념 학습과는 대비되는 결과로 파악된다.

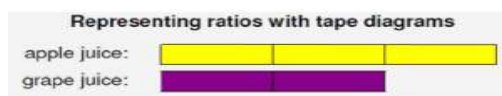
한편, 임재훈, 이형숙(2015)은 우리나라 수학 교과서의 비례식과 비례배분 단원에 나타난 시각적 표현이 매우 제한적임을 지적하며, 비례식과 비례배분 관련 내용을 지도할 때 시각적 표현이 중요함을 인식하고 이중수직선 모델([그림 II-1], [그림 II-2])과 이중테이프 모델([그림 II-3])을 사용할 것을 제안하였다.



[그림 II-1] 대응 다이어그램으로서의 이중수직선 모델 예 1 (Küchemann, Hodgen, & Brown, 2014)



[그림 II-2] 대응 다이어그램으로서의 이중수직선 모델 예 2 (Common Core Standards Writing Team, 2011)



[그림 II-3] 3 : 2의 이중테이프 모델 (Common Core Standards Writing Team, 2011)

이중수직선 모델은 승법적 접근으로 나아가는데 유용하고(Küchemann et al., 2014), 비례식 맥락에서 두 값의 조정을 용이하게 하며 한 측정 공간 내의 관계와 두 측정 공간 간 관계를 모두 나타낼 수 있다는 장점이 있다(임재훈, 이형숙, 2015). 한편 [그림 II-3]의 이중테이프 모델은 사과 주스와 포도 주스의 비가 3 : 2인 혼합 주스를 만드는 실생활 맥락을 나타낸 것으로, 테이프의 작은 직사각형 한 칸은 동일한 크기의 양을 나타낸다(Common Core Standards Writing Team, 2011). 이중테이프 모델은 종류가 같은 두 양의 비에 효과적으로 이용할 수 있다(임재훈, 이형숙, 2015). 임재훈, 이형숙(2015)은 이 두 가지 모델이 두 양의 공변 관계와 구조적 불변성 이해에 매우 유용한 시각적 표현이므로 교과서에서 비례식과 비례배분 단원을 구성할 때 이와 같은 시각적 표현의 구체적인 활용 방안이 마련되어야 한다고 하였다.

이상의 고찰을 통해 비례식과 비례배분의 도입 시 맥락은 정적인 맥락보다는 동적인 맥락으로서 실생활과 연계되어야 하고 대수적 과제를 활용한 맥락을 벗어나 기하적인 맥락 등 다양한 맥락을 균형 있게 이용해야 하며, 시각적 표현이 학생들의 이해를 도울 수 있을 것이라는 함의점을 이끌어 수 있다.

2. 비례식과 비례배분 문제 해결 관련 선행 연구

비례식과 비례배분 관련 문제를 해결하기 위해서는 비례 추론 능력이 필요하다. 김경선, 박영희(2007)는 비례 추론의 중요성을 주장하였으며, 고은성, 이경화(2007)는 비례 문제를 해결하기 위해 사칙연산, 분수, 분수의 연산, 약수와 배수 등의 개념과 비와 비례 개념이 서로 의존적으로 발달되어야 한다고 하였다.

한편 Baroody et al.(1947)과 Piaget(1977)는 비례 추론의 어려움을 언급하였으며, 특히 김경선, 박영희(2007)는 학생들이 각 항이 자연수가 아닌 소수나 분수로 표현되는 비례식 문제에서 취약함을 보인다고 하였다. 홍수영(2006), 김성준 외(2015)는 비례식 문제에서 미지수를 구하기 위해 비례식을 세우는 어려움에 대해 언급하였고, 형식적 접근의 문제점은 다수의 선행 연구(김경선, 박영희, 2007; 김성준 외, 2015; 정영욱, 2005; 홍수영, 2006)에서 언급되고 있다.

또한 비례식 문제 해결에 필요한 비례 추론을 지도하는 데 있어서 단계별 지도가 필요하다(고은성, 이경화, 2007; 김경선, 박영희, 2007; 이종욱, 2006)는 견해가 있으며, 그 밖에 학생들의 비례 추론 능력을 기르기 위한 다양한 연구가 진행되었다(임재훈, 이형숙, 2015; 정은실, 2013; Lamon, 1999).

III. 연구 방법

1. 분석 대상

본 연구에서는 우리나라 교육과정별 및 각 국가별 수학 교과서에서 비례식과 비례배분에 관한 내용을 어떻게 다루고 있는지 종적·횡적으로 분석하는 것을 주요 내용으로 한다. 종적 분석을 위해서는 5차 교육과정부터 현행 2009 개정 교육과정에 따른 수학(산수) 교과서의 비례식과 비례배분 내용을 분석 대상으로 선정하였다. 5차

교육과정을 시점으로 한 이유는 5차부터 익힘책이 제공되어 이 시기부터 현재의 2009 개정 교과서와 같은 체계로 구성되었다고 보았기 때문이다. 횡적 분석을 위해서는 초등 수학에서 비례식이나 비례배분을 다루고 있는 국가인 일본, 싱가포르, 중국의 5, 6학년 수학 교과서를 분석 대상으로 하였다. 초등 수학에서 비례식과 비례배분을 지도하는 나라는 많지 않으며, 실제로 비례배분은 국가별로 학교 수학에 포함되지 않는 경우도 있고, 비례식을 중등 수학에서 다루는 경우도 많은 것으로 확인된다(사교육걱정없는세상, 2015). 이에 우리나라와 같이 초등 수학에서 비례식과 비례배분을 다루도록 교육과정에 제시된 일본, 싱가포르, 중국의 수학 교과서를 분석 대상으로 하였다. 이때 국정 교과서 체제인 우리나라와 달리 여러 출판사에서 수학 교과서를 개발하여 활용하는 각국의 현실을 고려하여 채택 비율이 높은 출판사의 교과서를 분석 대상으로 하였다(<표 III-1>).

2. 분석틀 및 분석 방법

우리나라 교육과정별 및 국외 수학 교과서에서 비례식과 비례배분 내용의 비교 분석을 위해 앞서 II장에서 고찰한 선행 연구 중 다수의 연구에서 쟁점이 되었던 비례식과 비례배분의 도입 맥락(정영욱, 2005, 2015; 정은실, 2013; Ponte & Marques, 2011)과 도입 시 사용한 시각적 표현(임재훈, 이형숙, 2015; 정영욱, 2015; Küchemann, Hodgen, & Brown, 2014)을 분석 요소로 설정하

<표 III-1> 분석 대상 중 국외 수학 교과서

	수학 교과서명	출판사	년도
일본	新しい算數 5上, 5下, 6上, 6下	東京書籍	2013
싱가포르	Shaping Maths Coursebook 5A, 5B, 6A, 6B	Marshall Cavendish Education	2014
중국	수학 6上, 6下	人民教育出版社	2013

<표 III-2> 국내 및 국외 교과서 분석을 위한 분석틀

분석 요소		분석 내용
학습 요소 및 지도 순서		비례식과 비례배분의 학습 요소 및 지도 순서는 어떠한가?
용어의 정의		비례식과 비례배분의 정의는 어떠한가?
도입 방법	맥락	비례식과 비례배분 도입 시 사용한 맥락은 어떠한가?
	시각적 표현	비례식과 비례배분 도입 시 사용한 시각적 표현은 무엇인가?

였다. 또한 비례식과 비례배분의 선수 학습 요소라 할 수 있는 비와 비율과의 밀접한 연결성을 고려할 때 비례식과 비례배분의 학습 요소 및 지도 순서, 용어의 정의에 대한 분석의 필요성에 따라 <표 III-2>와 같은 본 연구의 분석틀을 설정하였다. 이때 용어의 정의에 대한 분석은, 비와 비율의 정의에 대한 심도 있는 논의의 필요성에 대한 언급(장혜원 외, 2017)이 있었던바, 비례식과 비례배분의 정의에 대한 논의도 같은 필요성을 지닌다고 판단했기 때문이다.

이와 같은 분석틀에 기초하여 우리나라의 5차부터 2009 개정 교육과정에 따른 수학(산수) 교과서 및 일본, 싱가포르, 중국의 수학 교과서에 구현된 비례식과 비례배분 관련 내용을 비교 분석하는 질적 연구를 실시하였다. 각각의 분석 결과를 표로 정리하여 제시하였으며, 관련 사례를 구체적으로 진술하였다.

IV. 연구 결과

1. 국내 교과서의 비례식과 비례배분 내용 분석 결과

5차부터 2009 개정 교과서의 비례식과 비례배분 단원을 분석한 후, 비례식과 비례배분 관련 학습 요소 및 지도 순서가 어떠한지(<표 IV-1>), 비례식, 비례배분은 각각 어떻게 정의되는지(<표 IV-2>), 관련 개념의 도입 방법은 어떠한지(<표

IV-3>)를 제시하고, 각 교육과정별 교과서의 비례식과 비례배분에 대한 세부적인 특징을 기술하였다.

가. 국내 교과서의 비례식과 비례배분 관련 학습 요소 및 지도 순서

국내 교과서의 비례식과 비례배분 관련 학습 요소 및 지도 순서를 분석한 결과는 <표 IV-1>과 같다.

분석 결과, 비례식을 5차부터 2007 개정 교과서는 6학년 1학기에, 2009 개정 교과서는 6학년 2학기에 다루고 있다. 비례식 단원의 구성은 5차와 6차가 유사하며, 7차에서 변화가 나타났다. 5차와 6차에서 한 차시로 구성되어 있던 ‘비와 비례식의 성질 알기’가 7차에서는 ‘비의 성질 알기’, ‘비의 성질 이용하기’, ‘비례식의 성질 알아보기’로 세분화되어 세 차시로 구성되었다. 또한 7차에서는 5차와 6차의 ‘비례식 풀기’ 차시에 제시된 미지항 x 가 삭제되고 이를 □로 표현하였다. 이는 7차 교육과정에서 방정식의 삭제에 따른 영향으로 해석된다. 이어서 7차의 ‘비의 성질 이용하기’ 차시가 2007 개정 교과서에서 ‘가장 작은 자연수의 비로 나타내기’로 변경되고 2009 개정 교과서에서는 ‘간단한 자연수의 비로 나타내기’로 변경된 것이 특징적이다.

비례배분의 경우, 5차와 6차 교과서는 6학년 2학기 ‘연비’ 단원에서 연비와 함께 다루며, 7차에서도 같은 시기에 연비와 함께 다루지만 단원

<표 IV-1> 국내 교과서의 비례식과 비례배분 관련 학습 요소 및 지도 순서

	단원명	학습 요소	비고
5차	6-1-6. 비례식	1. 비례식 알기 2. 비와 비례식의 성질 알기 3. 비례식 풀기(미지항 x 구하기) 4. 비례식의 활용(다양한 문제 풀이)	
	6-2-3. 연비	1. 연비 알기 2. 두 비의 관계를 연비로 나타내기 3. 비례배분 알기 4. 연비로 비례배분하는 방법 알기 5. 이자를 계산하는 방법 알기(이자, 원리합계, 원금)	
6차	6-1-3. 비례식	5차와 동일	
	6-2-3. 연비	1. 연비 알기 2. 두 비를 연비로 나타내기 3. 연비의 성질 알기 4. 두 양으로 비례배분하기 5. 세 양으로 비례배분하기 6. 이자 계산하기	
7차	6-가-7. 비례식	1. 비례식 알기 2. 비의 성질 알기 3. 비의 성질 이용하기 4. 비례식의 성질 알아보기 5. 비례식 풀기 6. 비례식을 이용하여 문제 풀기	x 삭제
	6-나-7. 연비와 비례배분	1. 두 수의 대응 관계를 □, △를 사용하여 식으로 나타내기 2. 연비 알아보기 3. 두 비의 관계를 연비로 나타내기 4. 연비의 성질 알아보기 5. 비례배분 알아보기 6. 연비로 비례배분 하기	이자 계산 삭제
2007 개정	6-1-7. 비례식	1. 비례식 알기 2. 비의 성질 알기 3. 가장 작은 자연수의 비로 나타내기 4. 비례식의 성질 알기 5. 비례식을 이용하여 문제 해결하기	
	6-1-8. 연비와 비례배분	1. 연비 알기 2. 두 비의 관계를 연비로 나타내기 3. 연비의 성질 알기 4. 비례배분 알기 5. 연비로 비례배분하는 방법 알기	
2009 개정	6-2-2. 비례식과 비례배분	1. 비례식 알기 2. 비의 성질 알기 3. 간단한 자연수의 비로 나타내기 4. 비례식의 성질 알기 5. 비례식을 이용하여 문제 해결하기 6. 비례배분 알기 7. 비례배분을 이용하여 문제 해결하기	연비 삭제

명이 ‘연비와 비례배분’으로 변경되었다. 또한 5차와 6차에서 다루었던 ‘이자 계산’이 7차에서는 삭제되었다. 2007 개정 교과서는 단원명이 ‘연비와 비례배분’으로 7차와 동일하지만, 7차와 달리 6학년 1학기의 비례식 단원 바로 다음으로 이동되어 지도 시기에 변화가 있다. 2009 개정 교과서에서는 교육과정에 따라 연비가 삭제됨으로써 차시가 줄고 학습량이 경감되었으며, 비례식과 비례배분을 한 단원으로 통합하여 2학기 이동시켰다. 비례식 관련 학습은 2007 개정 교과서와 크게 다르지 않은 흐름을 유지하였으며, 비례식에 이어 비례배분을 두 차시로 제시하고 있는데, 이때 비례배분을 이용하여 실생활 문제를 해결하는 차시가 새롭게 구성된 점은 이전 교과서와의 차이점이라 할 수 있다. 차후 교과서에서도 비례식과 비례배분이 한 단원으로 통합 구성된다면, 학생들이 비례식에 이어 비례배분을 자연스럽게 도입하여 이해할 수 있도록 적절한 맥락 및 지도 방법이 포함될 필요가 있다.

이상의 고찰을 통해 국내 교과서의 비례식과 비례배분 관련 학습 요소 및 지도 순서에서 특징적인 요소를 찾아보면 다음과 같다. 우선, 비

례식과 비례배분 관련 학습 요소가 점차 축소된 것을 확인할 수 있다. 순차적으로 미지항 x , 이자 계산, 연비가 삭제되었다. 이는 수학과 교육과정이 계속적으로 학습 부담 경감을 추진하는 경향 속에 개정된 것의 영향으로 해석된다. 따라서 삭제된 내용 외의 필수 개념을 다룰 때에도 학생들이 보다 쉽게 개념 및 원리를 이해할 수 있도록 교과서를 구성해야 할 것이다. 지도 순서에는 큰 변화가 없었지만 삭제된 내용으로 인한 학습 요소 간의 연결성이 부족할 수 있으므로, 이를 고려하여 차후 교과서를 구성해야 한다는 시사점을 얻을 수 있다.

나. 국내 교과서의 비례식과 비례배분 용어의 정의

국내 교과서에서 제시하고 있는 비례식과 비례배분의 정의는 <표 IV-2>와 같다.

분석 결과, 5차와 6차 교과서에서는 수치만 다를 뿐 비례식의 개념을 동일하게 정의하고 있다.

7차와 2007 개정 교과서에서는 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ 와 같이

<표 IV-2> 국내 교과서의 비례식과 비례배분 용어의 정의

	비례식	비례배분	비고
5차	1:2와 2:4의 비의 값은 같다. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \leftrightarrow 1:2 = 2:4$ 이와 같이 비의 값이 같은 두 비를 등식으로 나타낸 식을 비례식이라 한다.	전체를 주어진 비로 나누는 것	비례식을 지도할 때 전항, 후항, 내항, 외항에 대해 설명
6차	5차와 동일 (수치만 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \leftrightarrow 2:3 = 4:6$ 으로 변경)		
7차	2:3=4:6과 같이 비의 값이 같은 두 비를 등식으로 나타낸 식을 비례식이라 한다.		
2007 개정	7차와 동일 (수치만 3:2=60:40으로 변경)	전체를 주어진 비로 배분하는 것	
2009 개정	비율이 같은 두 비를 등호를 사용하여 2:3=4:6과 같이 나타낸 식을 비례식이라 한다.	전체를 주어진 비로 배분하는 것 (비례배분을 할 때에는 주어진 비의 전항과 후항의 합을 분모로 하는 분수의 비로 고쳐서 계산하면 편리합니다.)	

비의 값이 같다는 분수 표현은 삭제되었지만 비례식 개념은 이전의 교과서와 동일하게 서술하고 있다. 다만, 2007 개정 교과서의 비와 비율 단원에서 종전의 교과서에서 계속 다루었던 ‘비의 값’ 용어가 삭제되고 비율을 기준량에 대한 비교하는 양의 크기로 정의하였음에도 불구하고, 비례식을 정의할 때에는 비의 값이라는 용어를 사용하고 있는 점이 주목할 만하다. 한편, 2009 개정 교과서에서는 5차부터 2007 개정 교과서까지에서 비의 값이라는 용어를 사용하여 정의한 것에 반해, ‘비율이 같은 두 비를 등호를 사용하여 ...’와 같이 비율이라는 용어를 사용한 점이 특징적이다. 이는 2009 개정 교과서에서 비와 비율 단원 지도 시 ‘비의 값’과 ‘비율’을 동일한 의미로 사용한 것에 기인할 것이다. 또한 비례식을 나타내는 수식보다 비율이 같다는 것을 먼저 제시하였는데 이는 비례식의 의미를 강조하여 나타내고자 한 의도로 판단된다. ‘등식으로 나타낸 식’이라는 이전 교과서의 표현과 달리 ‘등호를 사용하여 나타낸 식’이라는 표현을 사용한 이유는 ‘등식’, ‘식’의 반복에서 나타나는 표현의 중복 문제를 해소할 뿐만 아니라 ‘등식’이라는 용어를 이전에 별도로 지도한 적이 없었기 때문에 이를 풀어서 진술한 것으로 볼 수 있다.

비례배분의 정의는 5차에서 7차까지 모두 동일하며, 2007 개정 교과서에서는 ‘나누는 것’이라는 표현을 ‘배분하는 것’으로 변경하였고 2009 개정 교과서도 동일함을 확인할 수 있다. 이러한 표현에 있어서의 변화는 ‘나누는 것’이라는 포괄적인 표현보다는 각자의 몫으로 나누는 ‘배분’이라는 용어를 사용하여 보다 엄밀하게 정의하고자 한 의도로 추측된다. 다만, 2009 개정 교과서는 비례배분의 정의에 이어 ‘비례배분을 할 때에는 주어진 비의 전항과 후항의 합을 분모로 하는 분수의 비로 고쳐서 계산하면 편리합니다.’라는 문장을 제시함으로써 비례배분에 대한 학

생들의 어려움을 고려한 교수학적 전략을 구현하고 있다. 다만 학생들이 비례배분에 대한 충분한 개념적 이해보다 공식을 이용한 알고리즘적 문제 풀이에 치중하지 않도록 주의할 필요가 있다.

5차부터 2009 개정 교과서의 비례식과 비례배분의 정의를 살펴본 결과, 정의의 내용이 크게 바뀌지는 않았지만 용어 사용에 변동이 있었음을 알 수 있다. 비례식을 정의할 때, ‘비의 값’을 사용하였다가 ‘비율’을 사용한 점이나 ‘등식’을 ‘등호’로 변경하여 사용한 것, 비례배분을 정의할 때, ‘나누는 것’이라는 표현을 ‘배분하는 것’으로 변경하여 사용한 것이 대표적이다. 선수 학습 요소로 지도하지 않은 용어를 정의에 사용하는 것은 학생들에게 또 다른 인지적 부담으로 작용할 수 있기 때문에, 정의에서 사용하는 용어는 학생들이 이미 학습한 것인지를 확인하여 엄밀하게 사용할 필요가 있다.

다. 국내 교과서의 비례식과 비례배분 도입 방법

국내 교과서에서 비례식과 비례배분의 도입 맥락과 시각적 표현을 정리하면 <표 IV-3>과 같다.

비례식의 도입 방법을 분석한 결과, 5차와 6차 교과서는 모두 두 개의 톱니바퀴가 돌아가는 동안 회전수를 비교하는 맥락을 제시하고 있다. 7차 교과서는 빵을 만드는 데 필요한 달걀 수를 구하는 상황으로 보다 학생들의 실생활과 밀접한 맥락을 제시하였다. 이때 5차와 6차에서는 톱니바퀴 그림이 제시될 뿐 별도의 시각적 표현을 사용하지 않은 것에 반해, 7차는 빵과 달걀의 그림을 상황과 같은 수로 제시하여 직관적 이해를 돕고 있는 것을 확인할 수 있다. 한편, 2007 개정 교과서는 생각열기에서 태극기를 소재로 3:2와 60:40의 두 비를 제시하고 활동1에서 3:2와 6:4를 제시하였다. 이에 반해 2009 개정 교과서는 생각열기에서 도면상의 옷장의 길이를 소재

<표 IV-3> 국내 교과서의 비례식과 비례배분 개념 도입 방법

	내용	맥락	시각적 표현																	
5차	비례식	㉔ 톱니바퀴가 1번 도는 동안 ㉓ 톱니바퀴가 2번 돌 때 ㉓에 대한 ㉔의 회전수의 비를 알아본 다음, ㉔가 2번 도는 동안 ㉓는 몇 번을 돌지 구하고 이때 ㉓에 대한 ㉔의 회전수의 비를 알아보고 두 비의 비의 값이 같음을 알아보기	-																	
	비례배분	2000원을 형과 동생에게 3:2의 비로 나누어 주려고 할 때 각각 얼마씩 주면 되는지 알아보기	이중수직선 모델 																	
6차	비례식	㉔ 톱니바퀴가 2번 도는 동안 ㉓ 톱니바퀴가 3번 돌고, ㉔ 톱니바퀴가 4번 도는 동안 ㉓ 톱니바퀴가 6번 돈다는 것을 명시하고, ㉔ 톱니바퀴가 2번 돌 때와 4번 돌 때의 회전수 알아보기	-																	
	비례배분	5차와 동일	5차와 동일																	
7차	비례식	빵 2개를 만드는 데 달걀 3개가 필요할 때, 빵 4개를 만드는 데 필요한 달걀의 수를 구하기	그림 																	
	비례배분	공책 10권을 오빠와 동생이 3:2로 나누어 가지기	이중테이프 모델 																	
2007 개정	비례식	태극기의 가로와 세로의 비가 3:2일 때, 축구 경기 용원을 위해 가로 60m, 세로 40m인 대형 태극기 만들기	-																	
	비례배분	연필 10자루를 오빠와 동생이 3:2로 나누어 가지기	그림 																	
2009 개정	비례식	방의 설계 도면에 옷장을 그려 넣을 때, 도면상의 책상과 침대의 길이와 실제 길이의 비를 구한 후, 가로 110cm, 세로 70cm인 옷장의 가로와 세로를 도면상에 어떻게 나타내어야 할지 구하기	표 <table border="1"> <thead> <tr> <th>가구</th> <th>도면상의 길이(cm)</th> <th>실제 길이(cm)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="2">책상</td> <td>가로</td> <td>15</td> <td>150</td> </tr> <tr> <td>세로</td> <td>6</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">침대</td> <td>가로</td> <td>20</td> <td>200</td> </tr> <tr> <td>세로</td> <td>12</td> <td>120</td> </tr> </tbody> </table>	가구	도면상의 길이(cm)	실제 길이(cm)	책상	가로	15	150	세로	6	60	침대	가로	20	200	세로	12	120
	가구	도면상의 길이(cm)	실제 길이(cm)																	
책상	가로	15	150																	
	세로	6	60																	
침대	가로	20	200																	
	세로	12	120																	
비례배분	조개 15개를 1:2로 나누어 가지면 각자 가지게 되는 조개의 수는 얼마인지 구하기	표 <table border="1"> <thead> <tr> <th>전체 조개 수</th> <th>3</th> <th>6</th> <th>9</th> <th>12</th> <th>15</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>오빠의 조개 수</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>동생의 조개 수</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>6</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	전체 조개 수	3	6	9	12	15	오빠의 조개 수	1	2	3			동생의 조개 수	2	4	6		
전체 조개 수	3	6	9	12	15															
오빠의 조개 수	1	2	3																	
동생의 조개 수	2	4	6																	

로 110:70을, 활동1에서는 책상의 도면상의 가로 15cm, 세로 6cm, 책상의 실제 가로 150cm, 세로 60cm, 침대의 도면상의 가로 20cm, 세로 12cm, 침대의 실제 가로 200cm, 세로 120cm를 표로 제시하고 있다. 표의 사용은 학생들의 이해를 돕는다는 장점이 있는 반면에, 제시된 수치가 크고 사례가 여러 개여서 비례식의 도입 차시임을 감

안할 때 학생들의 체감 난이도가 다소 높을 우려가 있다.

다음으로 비례배분의 도입 방법을 분석한 결과, 5차와 6차는 형과 동생에게 돈을 비례배분하는 상황을 제시하고 있고, 이때 수치뿐만 아니라 시각적 표현으로 이중수직선 모델을 제시하는 것까지 모두 동일하다. 7차는 공책을 오빠와 동

생이 나누어 가지는 상황으로 비례배분을 도입하며 시각적 표현으로 이중테이프 모델을 사용하였다. 임재훈, 이형숙(2015), Küchemann et al. (2014), Orrill & Brown(2012)에 따르면, 이중수직선 또는 이중테이프 모델이 비례식 맥락에서 두 값의 조정을 보다 쉽게 하여 학생들의 비례 추론을 촉진함을 알 수 있다.

2007 개정 교과서는 7차 상황의 공책이 연필로 변경되었을 뿐 수치는 동일하게 사용되었다. 다만 이전의 교과서에서 시각적 표현을 적극적으로 사용한 것에 반해, 비례식을 약속한 이후에 그림으로 나타내어 보는 활동만 제시할 뿐이어서 시각적 표현의 사용이 다소 축소된 것으로 보인다. 비례배분하는 식을 지도하기 이전에 활동1에서 연필 10자루를 3:2로 비례배분하는 절차를 상세히 제시한 점도 주목할 만하다. 구체적으로 ‘연필 10자루 중에서 오빠는 3자루, 동생은 2자루를 나누어 갖습니다. 나머지 연필 5자루 중에서 오빠는 3자루, 동생은 2자루를 나누어 갖습니다. …’로 제시함으로써 식을 사용하지 않고 전체를 주어진 비로 배분하는 상황을 절차적으로 상술하고 있다. 이를 통해 학생들은 비례배분하는 공식을 암기하기 전에 앞서 비례배분의 의미를 적절히 파악할 수 있었을 것으로 보인다.

한편, 2009 개정 교과서의 비례배분 도입 방법에서도 특징적인 점이 파악된다. 2009 개정 교과서에서는 그림을 그리거나 테이프, 수직선 등을 사용하는 대신에 표를 활용하여 비례배분을 도입하고 있다. 이때 또 하나의 차이는 2007 개정 교과서에서는 10개를 3:2로 비례배분할 때 3개, 2개를 나누어 갖고 나머지를 다시 3개, 2개로 배분하는 데 반해, 2009 개정 교과서는 조개 15개를 1:2로 비례배분해야 하는 상황을 제시한 후 조개가 3개, 6개, 9개, 12개, 15개가 있을 때 각각을 1:2로 나누어 가지는 경우를 표로 채워 넣음으로써 15개를 1:2로 비례배분한 결과를 파

악케 한다. 이를 통해 2009 개정 교과서는 2007 개정 교과서의 제시 흐름과 접근 방식이 상이함을 알 수 있다. 이어지는 활동2에서도 15개를 2:3으로 나누어 가지는 상황을 제시하였음에도 15개를 2개, 3개 나누어 갖고 나머지를 다시 나누어 갖는 것이 아니라, 조개가 5개일 때 2:3으로 비례배분한 결과로부터 15개를 2:3으로 비례배분한 결과를 유도하게끔 구성되어 있는 점이 특징적이다. 양자 간의 흐름에 차이가 있기 때문에 둘 중 어떤 전개 방식을 따르는가는 학생들이 비례배분을 이해하는 데 큰 영향을 미칠 수 있다. 2007 개정 교과서는 학생들이 비례배분의 의미를 파악하는 데 더 도움이 될 것이며, 2009 개정 교과서는 공식을 유도하기에 보다 자연스럽다. 차후 교과서에서는 양자의 장점을 고려함으로써 학생들이 비례배분의 의미를 충분히 파악한 후, 자연스럽게 공식을 유도할 수 있는 기회를 제공하는 방향으로 구성할 필요가 있다.

2. 국외 교과서의 비례식과 비례배분 내용 분석 결과

일본, 싱가포르, 중국 교과서의 비례식과 비례배분 관련 단원 및 차시를 분석하여 비례식과 비례배분 관련 학습 요소와 지도 순서(<표 IV-4>), 개념의 정의(<표 IV-5>), 개념의 도입 방법(<표 IV-6>)을 제시하고, 국가별 교과서의 세부적인 특징을 기술하였다. 이때 현행 2009 개정 교과서(본 절에서는 ‘우리나라 교과서’라 칭함)와의 비교가 요구되는 경우, 그에 대한 분석 결과도 함께 종합적으로 진술하였다.

가. 국외 교과서의 비례식과 비례배분 학습 요소 및 지도 순서

국외 교과서의 비례식과 비례배분 관련 학습

요소 및 지도 순서를 분석한 결과는 <표 IV-4>와 같다.

일본 교과서는 6학년 위에서 비와 비율을 학습하면서 비례식과 비의 성질을 함께 다루고 있어 우리나라에서 6학년 1학기에 비와 비율을, 2학기에 비례식과 비의 성질을 학습하는 것과 비교하여 그 시기에 차이를 보인다. 또한 비의 이용에서 전체에 대한 부분의 양을 구하는 비례배분의 개념을 다루고 있으나 비례배분이라는 용어는 별도로 사용하지 않는다.

싱가포르 교과서에서는 5학년에서 간단한 자연수의 비로 나타내는 것을 학습하고 6학년에서 다시 비를 학습하며 전체를 주어진 비로 나누어 보는 활동을 통해 자연스럽게 비례배분에 대한 개념을 지도하고 있다. 이를 통해 싱가포르 역시 비와 비율을 학습한 후 비례식과 비례배분을 별도로 구분하며 지도하는 것이 아니라, 비율을 학습하면서 실생활 맥락에서 비례식과 비례배분을 다루고 있음을 알 수 있다.

중국 교과서는 일본과 마찬가지로 6학년 위에

서 비를 학습한 후 비의 성질을 제시하여 우리나라에서 6학년 1학기에 비를 학습할 때 비의 성질을 다루지 않는 것과는 차이를 보인다. 또한 비례의 응용으로서 생활 속 다양한 비례식 문제 해결 상황을 제시하고 있으며, 미지수 x 를 사용한 비례식 문제 해결을 다루고 있는 점도 우리나라 교과서와의 차이로 파악되었다. 또한 우리나라는 6학년 2학기 비례식 단원에서 비례배분을 함께 다루지만 중국의 경우는 6학년 위에서 비를 학습하면서 응용 단계로서 비례배분을 다루고 있어 우리나라와 비례배분을 학습하는 지도 순서에 차이가 있다.

이상의 고찰을 통해 국외 교과서의 비례식, 비례배분 관련 학습 요소 및 지도 순서에서의 특징적 요소를 정리하면, 국외 교과서에는 비례식과 비례배분이 독립된 단원으로 구성되어 있지 않고 비를 학습하는 과정 중에 제시된다는 점이다. 우리나라의 경우 6학년 1학기에 비와 비율, 백분율을 다루고 2학기에 비례식, 비례배분으로 나누어 제시하고 있어 이와 큰 차이를 보인다.

<표 IV-4> 국외 교과서의 비례식과 비례배분 관련 학습 요소 및 지도 순서

	단원명	학습 요소
일본	6上-6. 비율을 나타내는 방법 생각하기	1. 비와 비의 값 알기 2. 동일한 비의 성질 알기 3. 비의 이용
싱가포르	5A-5. 비(Ratio)	1. 비 찾기 2. 동치비 알기 3. 3개의 양을 비교하기
	6A-3. 비(Ratio)	1. 비가 주어졌을 때 하나의 양을 다른 양의 분수로 나타내기 2. 두 양이 주어졌을 때 하나의 양을 다른 양의 분수로 나타내기 3. 전체가 주어진 비로 나누어질 때 전체나 부분 구하기 4. 두 쌍의 비를 활용한 문장제 해결하기
	6B-6. 도전 문제	1. 비(Ratio) 연습문제
중국	6-上冊-4. 비	1. 비의 의미 알기 2. 비의 값 구하기 3. 비의 기본 성질 알기 4. 비를 간단하게 만들기 5. 비의 응용 - 비에 의거하여 분배하기
	6-下冊-4. 비례	1. 비례의 의미 알기 2. 비례의 기본 성질 3. 비례식 해결하기 4. 비례의 응용-축척, 도형의 확대와 축소 5. 비례를 이용하여 미지수 x 를 사용한 문제 해결하기

나. 국외 교과서의 비례식, 비례배분 용어의 정의

국외 교과서에서 제시하고 있는 비례식과 비례배분의 정의를 정리하면 <표 IV-5>와 같다.

<표 IV-5> 국외 교과서의 비례식과 비례배분의 정의

	비례식	비례배분
일본	비의 값이 동일한 경우 「비는 동일하다」고 하고, 등호를 사용하여 다음과 같이 나타낸다. $2:3=4:6$	맥락 속에서 지도
싱가포르	맥락 속에서 지도	맥락 속에서 지도
중국	$2.4:1.6=\frac{3}{2}$, $60:40=\frac{3}{2}$. 따라서 $2.4:1.6=60:40$ 과 같고, 이와 같이 비율이 같을 때 비례라고 한다.	맥락 속에서 지도

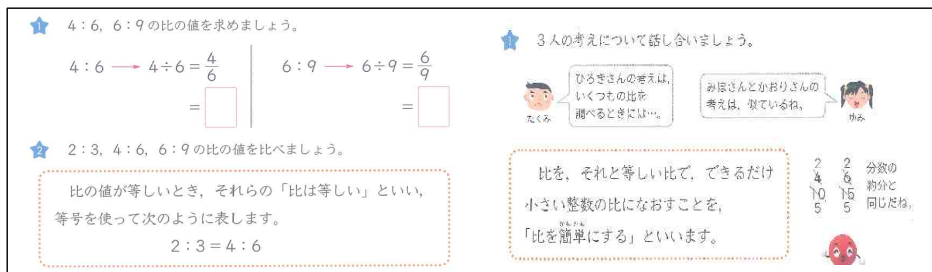
분석 결과, 비례식의 개념은 일본과 중국 교과서에만 제시되어 있고, 비례배분의 경우는 일본, 싱가포르, 중국 교과서 모두 개념에 대한 정의 없이 맥락 속에서 지도하고 있음을 알 수 있다.

일본은 6학년 위에서 비의 값을 정의한 후 바로 비례식을 도입하는데, 비례식이라는 용어를 직접적으로 사용하지는 않고 그 개념을 제시하고 있다. 또한 내항, 외항이라는 용어를 사용하지 않으며, 이는 일본의 학교수학에서 비례식이

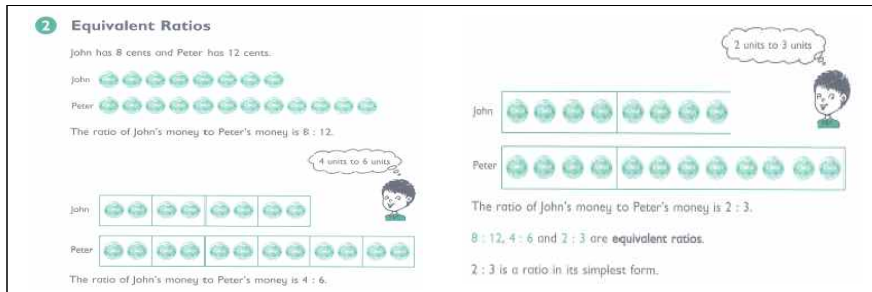
라는 용어가 초등 수학에서는 취급되지 않지만(日本數學教育學會, 2011) 우리나라 교과서에서 사용하는 의미로서 비례식의 개념을 사용하고 있다는 것을 의미한다. 또한 일본 교과서에서는 비를 그것과 같은 비로, 가능한 한 작은 정수끼리의 비로 고치는 것을 ‘비를 간단히 한다.’라고 설명하며 ‘비를 간단히 한다’라는 개념을 별도로 정리하고 있는 점이 특징적이다(그림 IV-1).

싱가포르의 비, 비례, 비율, 백분율 영역을 독립적인 내용 체계로 두어 비, 비례, 백분율, 연비 등의 내용을 5학년 1학기부터 중학교 1학년까지 매년 확대 심화하여 다루고 있다. 이는 싱가포르 교육과정에서 비, 비례, 비율 등의 개념을 초등학교 단계에서부터 학생들이 배워야 할 중요한 개념으로 인식한다는 것을 함의하며 시기적으로는 우리나라보다 1년 일찍 비례식 개념을 도입한다고 볼 수 있다(임경화, 2007). 또한 싱가포르의 [그림 IV-2]와 같이 한 단위를 동전 1개로 보았을 때, 2개로 보았을 때, 4개로 보았을 때의 비를 구하여 모두 동치비임을 통해 비례식의 개념을 도입하고 있음을 알 수 있다.

중국은 6학년 위에서 비를 학습하면서 비의 응용으로서 ‘비에 의거하여 분배한다(按比分配)’는 개념으로서 비례배분이 비례식보다 먼저 지도되고 있다. 또한 6학년 아래에서 비례를 학습하면서 ‘비율이 같을 때 비례라고 한다.’고 제시하여 우리나라 교과서에 제시된 ‘비례식’ 용어는 사용하지 않는 차이점을 보인다. 또한 항, 전항,



[그림 IV-1] 일본 6-상의 비례식 제시 사례(東京書籍, 2013)



[그림 IV-2] 싱가포르 5A(Marshall Cavendish Education, 2014)

후향의 개념을 사용하여 비례식을 지도하는 것은 우리나라와 유사하나, 정비례, 반비례를 포함하는 비례 관련 단원에서 일부 언급된다는 점이 우리나라와의 차이점으로 나타났다. 또한 내향의 곱과 외향의 곱이 같음을 보여주는 비례식의 성질을 활용하여 문제를 해결하는 방법을 제시하고 있으나 미지수 x 가 제시되며([그림 IV-3]), 중국 교과서 역시 일본, 싱가포르와 마찬가지로 비례배분의 개념을 별도로 제시하지 않고 비례배분 관련 문제 상황을 해결하는 맥락 속에서 지도하고 있음을 발견할 수 있다.

본 연구의 분석 대상인 국외 교과서의 비례식과 비례배분의 정의를 살펴본 결과, 비례배분을 정의하고 있는 교과서는 없었으며, 비례식의 개념 정의는 일본, 중국 교과서에서만 찾아볼 수 있었다. 이때 중국은 우리나라와 유사하게 전향, 후향과 같은 용어를 사용하며 비례식의 성질을

활용한 문제 해결 과정을 제시하고 있는 점이 특징적이다. 싱가포르는 맥락 속에서 비례식의 개념을 다루고 있음을 확인할 수 있다.

다. 국외 교과서의 비례식과 비례배분 도입 방법

국외 교과서에서 비례식, 비례배분의 도입 방법을 정리하면 <표 IV-6>과 같다.

비례식의 도입 방법을 분석한 결과, 일본 교과서는 케이크를 만드는데 밀가루와 설탕 양의 비가 주어졌을 때 밀가루를 140g 사용한다면 설탕을 몇 g 사용해야 하는지 알아보는 상황, 싱가포르 리본 A와 B의 길이의 비가 주어졌을 때 A 리본이 21m라면 B 리본의 길이는 얼마인지 구하는 상황, 중국은 에펠탑의 높이가 320m이고, 북경세계공원에 있는 모형 에펠탑의 높이는 원래 에펠탑 높이의 1:10일 때 모형 에펠탑의 높이를 구하는 상황이 제시되어 있다. 이때 일본과

比例的基本性质

组成比例的四个数,叫做比例的**项**,两端的两项叫做比例的**外项**,中间的两项叫做比例的**内项**.

例如:

$$2.4 : 1.6 = 60 : 40$$

$\begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ \text{内项} \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \text{外项} \end{array}$

如果把上面的比例写成分数形式: $\frac{2.4}{1.6} = \frac{60}{40}$, 2.4和40仍然是外项, 1.6和60仍然是内项。

法国巴黎的埃菲尔铁塔高度约320m。北京的世界公园里有一座埃菲尔铁塔的模型,它的高度与原塔高度的比是1:10。这座模型高多少米?

解: 设这座模型的高度是xm。

$$x : 320 = 1 : 10$$

$$10x = 320 \times 1$$

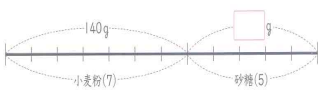
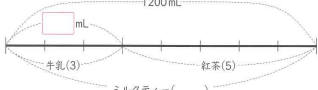
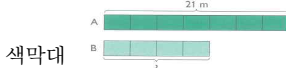
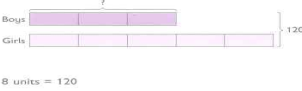
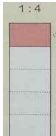
$$x = \frac{320 \times 1}{10}$$

$$x = 32$$

答: 这座模型高32m。

[그림 IV-3] 중국 6-下的 비례식 제시 사례(人民教育出版社, 2013)

<표 IV-6> 국의 교과서의 비례식과 비례배분 개념 도입 방법

		맥락	시각적 표현
일본	비례식	케이크를 만드는데 밀가루와 설탕 양의 비가 7:5일 때 밀가루를 140g 사용한다면 설탕을 몇 g 사용해야 하는지 알아보기	수직선 
	비례배분	밀크티 1200mL를 만들기 위해 우유와 홍차를 3:5로 섞을 때 필요한 우유의 양을 알아보기	수직선 
싱가포르	비례식	리본 A의 길이와 B의 길이의 비가 7:4일 때 A 리본의 길이가 21m라면 B 리본의 길이 구하기	색막대 
	비례배분	남학생이 여학생의 $\frac{3}{5}$ 일 때, 학생이 120명 있다면 그 중 남학생은 몇 명인지 구하기	색막대 
중국	비례식	에펠탑의 높이가 320m이고, 북경세계공원에 있는 모형 에펠탑의 높이는 원래 에펠탑 높이의 1:10일 때 모형 에펠탑의 높이를 구하기	-
	비례배분	세정제 농축액을 물에 넣어 희석시키려고 할 때 농축액과 물의 비가 1:4라면 500mL 혼합액에 들어 있는 농축액과 물의 양 구하기	색막대 

싱가포르는 비례식에 대한 시각적 표현으로 맥락에 맞는 수직선과 색막대를 제시하고 있으나 중국 교과서에는 별도의 시각적 표현이 사용되지 않았다.

비례배분의 경우, 일본 교과서에서는 밀크티 1200mL를 만들기 위해 우유와 홍차를 3:5의 비로 섞을 때 필요한 우유의 양을 구하는 상황을 수직선을 활용하여 전체에 대한 부분의 양을 알기 쉽도록 시각화하여 제시하였다. 싱가포르의 남학생과 여학생의 비율을 알려주고 전체 120명의 학생 중 남학생은 몇 명인지 구하는 상황에서, 한 단위 전략을 통해 문제를 해결할 수 있도록 남학생과 여학생 각각에 해당하는 색막대를 제시하여 비례배분에 대한 직관적인 이해를 돕

고 있다. 중국은 세정제 농축액과 물의 비가 1:4이고 혼합액이 500mL일 때 농축액과 물의 양을 구하는 상황을 색막대와 함께 제시하고 있다.

위의 분석 과정 중 각국의 교과서에 제시된 비례식과 비례배분 내용에 있어서 몇 가지 특징적 요소가 파악되었다. 첫째, 국외 교과서는 비례식과 비례배분에 관한 다양한 실생활 소재를 활용하고 있다. 특히 일본의 음식 만들기에 관한 비례식 문제 해결 상황은 학생들이 일상생활 속에서 흥미롭게 접할 수 있는 소재로서, 학생들의 실생활 경험과 연결 지어 비례식과 비례배분 개념을 이해하고 적용하는 데 도움이 될 것이라 예상된다. 둘째, 국외 교과서는 수직선, 색막대와 같은 시각적 표현을 활용하여 비례식, 비례배분

의 개념을 학습하게 구성함으로써 학생들의 개념 이해를 돕고 있다. 셋째, 일본, 싱가포르, 중국은 우리나라와 달리 비례배분의 개념을 비례 학습하는 과정 중 맥락 속에서 자연스럽게 다루고 있는 점이 특징적이다.

마지막으로, 우리나라 교과서와 국외 교과서를 종합적으로 비교 분석한 결과를 제시하면 다음과 같다. 첫째, 우리나라는 비례식과 비례배분을 6학년 2학기에 다룬 것에 반해, 싱가포르 교과서에는 5학년 때 관련 내용이 등장함으로써 도입 시기에 차이가 있음을 알 수 있다. 또한 우리나라 교과서에는 비례식과 비례배분이 하나의 독립된 단원으로 구성되어 있는 반면, 국외 교과서에서는 비나 비율을 학습하는 과정 중에 다루어 진다는 차이를 보인다. 둘째, 우리나라 교과서에서는 비례식과 비례배분의 정의를 명확하게 제시하지만 국외 교과서에서 비례식의 개념 정의는 일본, 중국 교과서에서만 찾아볼 수 있으며, 비례배분은 따로 정의하지 않고 맥락 속에서 지도한다. 이는 우리나라 교과서가 국외 교과서에 비해 개념 정의를 강조하고 있음을 보여 준다. 셋째, 우리나라 교과서는 비례식을 도입할 때 실제 도면에서 가구의 길이와 실제 가구의 길이를 비교하는 맥락을 제시하고 있지만, 일본의 경우 음식 만들기 상황을 이용한 비례 문제 해결 상황을 제시함으로써 좀 더 학생들에게 친숙한 소재를 사용하고 있다는 것을 알 수 있다. 넷째, 우리나라 교과서에서는 비례식, 비례배분의 개념 도입 시 표를 활용하여 수치의 변화를 파악하게 하는 반면, 국외 교과서는 수직선, 색막대를 활용함으로써 개념의 직관적 이해를 돕고 있음을 알 수 있다.

V. 논의 및 시사점

본 연구는 크게 종적 분석으로서 5차부터 2009 개정 교과서의 비례식과 비례배분 단원을 분석한 후, 학습 요소 및 지도 순서(<표 IV-1>), 비례식, 비례배분의 정의(<표 IV-2>), 개념의 도입 방법(맥락, 시각적 표현)(<표 IV-3>)을 파악하였고, 횡적 분석으로서 일본, 싱가포르, 중국 교과서의 비례식과 비례배분 관련 내용을 동일한 기준으로 분석하여 각각에 따른 결과를 얻었다(<표 IV-4>, <표 IV-5>, <표 IV-6>). 이러한 분석 결과에 기초한 몇 가지 논의를 통해 차기 교과서의 비례식과 비례배분 단원 구성을 위한 교수학적 시사점을 도출하였다.

첫째, 비례식 및 비례배분을 정의할 때 용어 사용에 대한 신중한 선택이 요구된다. 2007 개정 교과서에서는 비례식과 비례배분의 선수 학습인 비와 비율 단원에서 삭제된 용어인 ‘비의 값’이 비례식 정의에 등장하고 있다. 이와 같은 방식은 선수 학습과 후속 학습의 연결성 부족으로 학생들에게 혼란을 야기할 수 있다. 2009 개정 교과서에서 비례식을 정의할 때 ‘등식’이라는 용어 대신 ‘등호’를 사용하였는데, 이는 표현의 중복 문제의 해소뿐만 아니라 ‘등식’ 용어가 이전에 명시적으로 지도되지 않은 것을 반영하여 변경한 예로 추측된다. 따라서 차기 교과서에서는 비례식, 비례배분을 정의하기 위해서 사용하는 용어들이 선수 학습 요소에 해당하는지 세심하게 확인하고 반영할 필요가 있다. 장혜원 외(2017)에서는 교과서 집필 시 비율을 정의할 때 비율과 같은 의미로 사용되는 ‘비의 값’이란 용어를 사용할 필요가 있는지에 대해 문제를 제기한 바 있다. 이와 관련하여 비례식의 정의에서도 선수 학습 요소와의 연결성을 면밀히 고려해야 할 것이다.

둘째, 비례식, 비례배분의 도입 시 맥락과 학습 순서가 중요하다. 본 연구의 분석 결과, 각 교과서에서 다양한 도입 맥락을 적용하고 있음을 알 수 있다. 특히 국외 교과서는 실생활에서

쉽게 접할 수 있는 소재를 사용하여 맥락 속에서 비례식과 비례배분 개념을 습득할 수 있게 지도하고 있고 이때 교과서에서 명시적으로 비례식과 비례배분의 정의를 제시하지 않는 점이 특징적이다. 또한 비례배분의 경우, 비례식이 아닌 비를 학습하는 맥락 속에서 그 개념을 다루고 있기도 하다. 중국의 경우에는 이전에 습관적으로 ‘비례배분에 의거’ 했다고 말했던 것으로, 이러한 문제는 실질적으로 ‘비’에 의거하여 분배한 것이고, 학생들이 아직 비례 개념을 접하지 못하였으므로 ‘비에 의거한 분배’라고 하는 것이 더욱 적당하다고 제시하고 있다(人民教育出版社課程教材研究所, 2016). 비례식의 경우도, 중국을 제외한 일본, 싱가포르에서는 항, 외항, 내항, 전항, 후항의 개념도 정의하지 않는다. 이와 같은 분석 결과는 우리나라의 비례식 학습 시기가 국외보다 다소 빠른 편이고 학습 요소도 많은 편이라는 것을 보여준다. 이는 우리나라의 비례식과 비례배분의 도입 시기가 미국, 일본, 중국에 비해 빠르며 미국, 영국에서는 비례 관련 내용을 알고리즘 위주의 대수적 과제 맥락에서 벗어나 다양한 맥락을 균형 있고 충분하게 다루고 있다는 주장(정영욱, 2005, 2015)과 연계하여 생각해 볼 문제이다. 따라서 비례식과 비례배분을 도입할 때 그 개념의 정의 못지않게, 학생들이 개념을 쉽게 이해할 수 있도록 실생활과 밀접한 관련이 있고 흥미를 끌만한 맥락을 선택하되 지나치게 복잡한 수치를 사용하지 않도록 고려하는 것이 중요할 것이다. 특히 학생들의 창의·융합 역량 강화 및 수학의 유용성 인식을 높이기 위해 실생활 맥락 속에서 비례식, 비례배분이 사용되는 구체적인 예를 찾아보고 그에 관한 문제를 해결하면서 개념을 폭넓게 이해할 수 있도록 교과서가 구성될 필요가 있다. 실제로 비례식 문제 해결은 건축, 예술, 과학 분야에서도 다양하게 사용되고 있는 개념임에도 불구하고 국내 교과

서의 경우 비례식에 기초한 자연스러운 실생활 문제 해결 상황이 다소 부족한 것으로 파악되었다. 따라서 차기 교과서 개발 시 이러한 점을 보완하여 구성하되, 실생활 맥락 접근으로 등장하는 사례들이 또 하나의 학습 요소로서 학생들에게 부담을 주는 소재가 되지 않도록 주의해야 한다. 또한 학생들이 유의미한 맥락 속에서 비례식, 항, 전항, 후항, 내항, 외항, 비례배분을 학습하면서 각 개념에 대해 충분히 이해할 수 있도록 하기 위해 적절한 도입 순서에 대한 심도 있는 논의도 요구된다.

셋째, 비례식의 성질을 활용한 알고리즘적 문제 해결 방법뿐만 아니라 비례식, 비례배분에 대해 학생들이 직관적으로 생각해볼 수 있도록 다양한 시각적 표현의 활용 방법을 모색해야 한다. 분석 결과, 국내 교과서 중 2007 개정 교과서는 시각적 표현을 거의 사용하지 않았고, 2009 개정 교과서는 비례식과 비례배분을 도입할 때 모두 표를 사용하였다. 즉, 다양한 시각적 표현이 부족하여 학생들의 이해를 돕는 데 한계가 있는 것으로 나타났다. 또한 국내 교과서에서는 비의 성질, 비례식의 성질을 지도한 후 문제를 해결하는 과정이 있는 반면, 국외 교과서에는 알고리즘적 문제 해결이 아닌 그림, 수직선, 색막대 등 다양한 시각적 표현을 통해 학생들의 비례식과 비례배분에 대한 이해를 돕는 것으로 나타났다. 따라서 다양한 시각적 표현을 적극 활용하여 학생들 스스로 해결 방법을 찾아 비례식의 성질이나 알고리즘을 알아가는 것이 중요하다는 선행 연구(임재훈, 이형숙, 2015; 정영욱, 2005, 2015)를 바탕으로 개념 이해에 적절한 시각적 표현을 활용함으로써 학생들의 비례식, 비례배분에 대한 이해를 도울 필요가 있다.

마지막으로, 본 연구의 과정 중에 부수적으로 파악된 비례식과 비례배분의 문제 해결을 위한 다양한 비례 추론 전략을 경험할 필요가 있다. 학생

들의 비례 추론 능력을 높이기 위한 덧셈 전략, 한 단위 전략, 부분 전체 전략, 곱셈 전략, 분수 전략, 비례식 전략, 대각선 곱 전략, 방정식 전략 등 다양한 비례 추론 전략이 활용되어야 함에도 불구하고(정영옥, 2015; Lamon, 1999; Lesh et al., 1988), 국내 교과서는 비례식의 성질을 활용한 알고리즘적 전략이 주로 제시되어 학생들에게 비례식과 비례배분을 알고리즘적 문제 상황으로만 인식하게 할 우려가 있다. 비례식과 비례배분 학습을 통해 학생들은 비례 추론 능력을 신장할 수 있기 때문에, 교과서에서 비례식과 비례배분에 대한 다양한 비례 추론 전략을 어느 정도로 제시하여 표현할 것인지에 대한 후속 연구 및 논의가 요구된다. 알고리즘적 전략을 사용하기 전에 연관되는 다양한 비례 추론 전략을 사용하여 학생들의 이해를 돕도록 하는 방안을 모색해야 할 것이다.

참고문헌

- 고은성, 이경화 (2007). 초등학교 6학년 학생의 비례 추론 능력 분석. **수학교육학연구**, 17(4), 359-380.
- 교육과학기술부 (2011). **수학 6-1**. (주)동아.
- 교육인적자원부 (2002a). **수학 6-가**. 대한교과서 주식회사.
- 교육인적자원부 (2002b). **수학 6-나**. 대한교과서 주식회사.
- 교육부 (1997a). **수학 6-1**. 국정교과서주식회사.
- 교육부 (1997b). **수학 6-2**. 국정교과서주식회사.
- 교육부 (2015a). **수학 6-2**. (주)천재교육.
- 교육부 (2015b). **2015 개정 수학과 교육과정**. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8].
- 김경선, 박영희 (2007). 초등학교의 비례적 추론 지도에 관한 연구. **학교수학**, 9(4), 447-466.
- 김성준, 김수환, 신준식, 이대현, 이종영, 임문규, 정은실, 최창우 (2015). **초등학교 수학과 교재연구와 지도법**. 경기도: 동명사.
- 문교부 (1990a). **산수 6-1**. (주)국정교과서.
- 문교부 (1990b). **산수 6-2**. (주)국정교과서.
- 사교육걱정없는세상 (2015). **6개국 수학 교육과정 국제 비교 컨퍼런스**.
- 엄선영 (2012). **학업성취도에 따른 초등학생들의 비례 추론 능력 및 전략 분석**. 고려대학교 석사학위논문.
- 이경훈 (2016). **초등학교 6학년 학생들의 비례 추론능력 및 비례문제해결전략 분석**. 경인교육대학교 석사학위논문.
- 이종욱 (2006). 4학년 아동의 비와 비례 개념 분석. **수학교육학연구**, 16(2), 157-177.
- 임재훈, 이형숙 (2015). 비례 추론을 돕는 시각적 모델에 대하여: 초등 수학 교과서의 비례식과 비례배분 실생활 문제를 대상으로. **수학교육학연구**, 25(2), 189-206.
- 임경화 (2007). **한국과 싱가포르의 수학교과서 비교연구-비와 비례 단원을 중심으로**. 이화여자대학교 석사학위논문.
- 장혜원, 임미인, 유미경, 박혜민, 김주숙, 이화영 (2017). 비와 비율에 대한 초등 수학 교과서 비교 분석. **한국초등수학교육학회지**, 21(1), 135-160.
- 정영옥 (2005). 초등학교에서 비와 비례식 지도에 대한 고찰 - 한국, 미국, 일본, 중국을 중심으로-. **과학교육논총**, 18, 13-28.
- 정영옥 (2015). 초등학교에서 비례 추론 지도에 관한 논의. **수학교육학연구**, 25(1), 21-58.
- 정은실 (2013). 초등학교 수학 교과에서의 비례 추론에 대한 연구. **수학교육학연구**, 23(4), 505-516.
- 홍수영 (2006). **초등학교 5학년 학생의 비례 추론 이해**. 한국교원대학교 석사학위논문.
- Baroody, A, J., Wilkins, J, L, M. & Coslick, R. T.

- (1947). Fostering Children's mathematical power: An investigative approach to K-S mathematics instruction. 권성룡 외 (역) (2005). **수학의 힘을 길러주는: 왜? 어떻게?**. 서울: 경문사.
- Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion*. Springer Science & Business Media.
- Collars, C., Koay, P. L., Lee, N. H., Ong, B. L., & Tan, C. S. (2014a). *Shaping maths coursebooks 5A*. Marshall Cavendish Education.
- Collars, C., Koay, P. L., Lee, N. H., Ong, B. L., & Tan, C. S. (2014b). *Shaping maths coursebooks 5B*. Marshall Cavendish Education.
- Collars, C., Koay, P. L., Lee, N. H., Ong, B. L., & Tan, C. S. (2014c). *Shaping maths coursebooks 6A*. Marshall Cavendish Education.
- Collars, C., Koay, P. L., Lee, N. H., Ong, B. L., & Tan, C. S. (2014d). *Shaping maths coursebooks 6B*. Marshall Cavendish Education.
- Common Core Standards Writing Team (2011). *Progressions for the Common Core State Standards in Mathematics (draft): 6-7, Ratio and proportional relationships*.
- Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2008). *My pals are here! Maths 5A*. Marshall Cavendish Education.
- Küchemann, D., Hodgen, J., & Brown, M. (2014). The use of alternative double number lines as models of ratio tasks and as models for ratio relations and scaling. In S. Pope (Ed.), *Proceedings of the 8th British Congress of Mathematics Education (BCME8)* (pp. 231-238). BSRLM: University of Nottingham.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, 2, 93-118.
- Lamon, S. J. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding : Essential Context Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Orrill, C. H., & Brown, R. E. (2012). Making sense of double number lines in professional development: Exploring teachers' understandings of proportional relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(5), 381-403.
- Piaget, J. (1977). *Epistemology and Psychology of Functions* (Vol. 23). Springer Science & Business Media.
- Ponte, J. P. D., & Marques, S. (2011). Proportion in school mathematics textbooks: A comparative study. *RIPEM-International Journal for Research in Mathematics Education*, 36-53.
- 藤井齊亮, 飯高茂 외 40명. (2013a). **新しい算數 5-上**. 東京: 東京書籍.
- 藤井齊亮, 飯高茂 외 40명. (2013b). **新しい算數 5-下**. 東京: 東京書籍.
- 藤井齊亮, 飯高茂 외 40명. (2013c). **新しい算數 6-上**. 東京: 東京書籍.
- 藤井齊亮, 飯高茂 외 40명. (2013d). **新しい算數 6-下**. 東京: 東京書籍.
- 人民教育出版社 課程教育研究所 (2013a). **義務教育教科書 數學 六年級 上冊**. 北京: 人民教育出版社.
- 人民教育出版社 課程教育研究所 (2013b). **義務教育教科書 數學 六年級 下冊**. 北京: 人民教育出版社.
- 人民教育出版社 課程教材研究所 (2016). **義務教育教科書 教師數學用書 數學 六年級 上冊**. 北京: 人民教育出版社.
- 日本數學教育學會(編) (2011). **算數教育指導用語辭典(第四版)**. 東京: 教育出版株式會社.

A Comparative Analysis of Proportional Expression and Proportional Distribution in Elementary Mathematics Textbooks

Chang, Hyewon (Seoul National University of Education)

Park, Haemin (Seoul Hangang Elementary School)

Kim, Jusuk (Seoul Seobinggo Elementary School)

Lim, Miin (Seoul Oryu Elementary School)

Yu, Migyoung (Seoul Yangjin Elementary School)

Lee, Hwayoung (Korea Foundation for the Advancement of Science and Creativity)

This study investigated the factors that should be considered when teaching proportional expression and proportional distribution through literature review. Based on these results, we analyzed and compared Korean and foreign mathematics textbooks on proportional expression and proportional distribution longitudinally and horizontally to search for desirable methods of organizing the unit of proportional expression and proportional distribution in mathematics textbooks. For longitudinal analysis, we took the mathematics textbooks according to the national curriculum since the 5th one. For horizontal analysis, we selected the mathematics

textbooks of Japan, Singapore, and China. In each textbook, the contents and the order in relation to proportional expression and proportional distribution, the definitions of terminology, and the contexts and the visual representations for introducing related concepts are selected as the analysis framework. The results of analysis revealed many characteristics and the differences in ways of dealing contents about proportional expression and proportional distribution. Based on these results, we suggested some implications for writing the unit of proportional expression and proportional distribution in elementary mathematics textbooks.

* Key Words : proportional expression(비례식), proportional distribution(비례배분), proportional reasoning(비례 추론), elementary mathematics textbooks(초등 수학 교과서), comparison by curriculums(교육과정별 비교), international comparison(국제 비교)

논문접수 : 2017. 5. 7

논문수정 : 2017. 6. 17

심사완료 : 2017. 6. 22