

동시회전의 화이버 단면 보 요소를 이용한 평면 구조물의 재료 및 기하 비선형 해석

김 정 수^{1*} · 김 문 겸²

¹한국건설기술연구원 구조융합연구소, ²연세대학교 토목환경공학과

Material and Geometric Nonlinear Analysis of Plane Structure Using Co-rotational Fiber-section Beam Elements

Jeongsoo Kim^{1*} and Moon Kyum Kim²

¹Structural Engineering Research Institute, Korea Institute of Civil Engineering and Building Technology, Goyang, 10223, Korea

²Department of Civil and Environmental Engineering, Yonsei University, Seoul, 03722, Korea

Abstract

This paper presents a beam element capable of conducting material and geometric nonlinear analysis for applications requiring the ultimate behavioral analysis of structures with composite cross-sections. The element formulation is based on co-rotational kinematics to simulate geometrically nonlinear behaviors, and it uses the fiber section method to calculate the stiffness and internal forces of the element. The proposed element was implemented using an in-house numerical program in which an arc-length method was adopted to trace severe nonlinear responses (such as snap-through or snapback), as well as ductile behavior after the peak load. To verify the proposed method of element formulation and the accuracy of the program that was used to employ the element, several numerical studies were conducted and the results from these numerical models were compared with those of three-dimensional continuum models and previous studies, to demonstrate the accuracy and computational efficiency of the element. Additionally, by evaluating an example case of a frame structure with a composite member, the effects of differences between composite material properties such as the elastic modulus ratio and strength ratio were analyzed. It was found that increasing the elastic modulus of the external layer of a composite cross-section caused quasi-brittle behavior, while similar responses of the composite structure to those of homogeneous and linear materials were shown to increase the yield strength of the external layer.

Keywords : *geometric nonlinearity, material nonlinearity, fiber section, co-rotational formulation, ultimate analysis, composite*

1. 서 론

사회기반시설물의 성능기반설계(performance-based design: PBD) 적용이 점차 확산됨에 따라, 이들 시설물의 구조적 보유성능을 해석적으로 정확히 파악해야 할 필요성이 높아지고 있다(Lee *et al.*, 2008; Hur *et al.*, 2013). PBD에서는 요구성능에 부합하는 구조물의 보유성능만 충족시키면 설계가 가능하기 때문에, 신재료 및 새로운 해석기법의 적용과 같은 설계자의 창의적인 시도를 가능하게 하고, 시설물의 경제성을

제고할 수 있다. PBD는 극한상태(구조물 붕괴)까지 고려한 구조설계의 통합성(integrity)이 유지되어야 한다는 점에서 구조물의 전 구간에 걸친 보유성능이 사전에 평가되어야 하며, 이는 구조물의 재료 및 기하적 상태 변화를 고려한 극한 해석을 요구하게 된다. 일반적으로 기반 시설물의 설계에서는 반복적인 해석 작업이 요구되므로, 선 요소(line element: beam, frame element)를 이용해 구조해석을 수행하고, 응력집중부 또는 형상이 복잡한 부분 등에 대해 고체 요소(solid element)를 이용한 상세해석이 주로 이루어진다. 이러한 점을 고려했을 때,

* Corresponding author:

Tel: +82-31-910-0093; E-mail: jeongsookim@kict.re.kr

Received April 20 2017; Revised April 25 2017;

Accepted May 29 2017

©2017 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

PBD를 위한 해석모델은 적은 전산비용이 소모되면서도 구조물의 전반적인 거동을 평가할 수 있는 선 요소 기반의 해석 모델이 사용될 필요가 있다.

Co-rotational(CR) 보 요소는 정식화 과정에서 강제 운동과 변형이 분리되므로 기하 비선형성을 고려하는데 효과적이며, 잘못 누적되는 변형 에너지를 제거할 수 있는 장점이 있다 (Yoon *et al.*, 2015). 이러한 이유로 재료적으로 선형거동을 가정한 CR 요소를 적용하여, 기하 비선형성을 고려한 구조물의 해석과 관련해 여러 연구가 이루어졌다. Crisfield(1990)은 3차원 CR 보 요소 정식화를 제시하고 수치예제를 통해 CR 보 요소의 정확성과 활용성을 보였으며, Teh와 Clarke(1998)는 다양한 수치예제를 통해 CR 보 요소와 Updated Lagrangian (UL) 보 요소 결과를 비교하였다. Yoon 등(2015)은 CR 보 요소에 기능성 경사재료(functionally graded material)를 적용해 3차원 해석을 수행하였다. 최근의 선형 CR 보 요소에 관한 연구는 뒤틀림(warping) 거동까지 고려할 수 있도록 확장되어 있으며(Zang *et al.*, 2011; Yoon *et al.*, 2012), 국내에서도 항공기 날개에 선형 CR 보 요소를 적용해 정적, 동적해석이 수행되고 있다(Ko *et al.*, 2015; Kim *et al.*, 2016). 한편, 기하학적 비선형 특성뿐만 아니라 재료적 비선형성을 고려하기 위한 CR 보 요소에 관한 연구 또한 점차 확대되고 있다. Xu 등(2012)는 XFEM 기법을 적용한 2차원 CR 보 요소를 제시하고, 소성현상이 발생하는 고정단 보 구조물 해석에 적용하였다. Le Corvec(2012)는 뒤틀림 구속으로 인한 국부 효과를 고려한 3차원 CR 보 요소를 개발하고, 탄소성 모델을 적용해 교량 거더 및 건축 구조물의 해석을 수행하였다. Parnte JR 등(2014)은 2차원 CR 보 요소에 콘크리트 재료 모델을 적용하여 비선형 해석을 수행하였고, 단면 내력 산정 시의 전산해석 효율성을 제고하기 위한 단면 내력 산정 알고리즘을 제시하였다.

본 연구에서는 2차원 CR 보 요소에 화이버 단면법을 적용한 수치모델을 제시하였다. 제시된 모델은 재료 및 기하 비선형성을 고려한 해석이 가능할 뿐만 아니라, 화이버 단면법을 사용함으로써 서로 다른 재료적 특성을 갖는 합성단면 구조물의 해석이 가능하고 부재 단면 내 발생하는 심한 응력변화를 추적할 수 있다. 제시된 해석모델의 구현을 위해 MATLAB 기반의 유한 요소해석 프로그램을 개발하였으며, 이를 다양한 수치예제에 적용함으로써 제안된 방법과 해석 프로그램의 정확성 및 적용성을 보이고자 한다.

2. CR 화이버 단면 보 요소

CR 보 요소에서 절점변위는 강제운동(병진 및 회전)과 순수

변형으로 분리하여 기술되며, 이는 작은 변형률과 큰 회전거동을 갖는 구조물의 기하학적 비선형 문제를 푸는데 적합하다(Rankin and Nour-Omid, 1986). 본 연구에서 제시된 CR 보 요소는 Euler-Bernoulli 보 가정을 따르며, 강제운동이 제거된 요소의 변형 크기는 미소하다고 가정하였다. 또한 휨 변형으로 인한 부재 자체의 형상 변화는 작다고 가정하여, 개별 요소는 직선 형상을 유지한다고 고려하였다. 본 장에서는 Crisfield(1990)의 연구를 참고하여 CR 보 요소의 정식화 과정을 간략히 기술하였으며, 여기에 화이버 단면을 이용한 단면 내력 산정방법을 기술하였다.

2.1 CR 보 요소 정식화

CR 정식화에서 보 요소 좌표계는 보 요소의 강제운동은 제외되므로, 보 요소의 변형은 양단 절점의 회전과 축 방향 변형량에 의해 표현될 수 있다. Fig. 1과 같이 보 요소의 변형이 발생한다고 할 때, 가상일(Virtual work)의 원리를 CR 좌표계상에서 적용하면 식 (1)과 같이 기술할 수 있다.

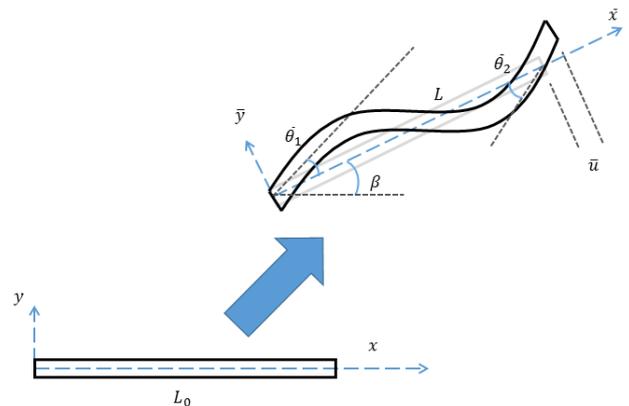


Fig. 1 Undeformed and deformed beam element

$$\delta \bar{\mathbf{p}}^T \bar{\mathbf{Q}} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV \quad (1)$$

여기서, $\bar{\bullet}$ 는 CR 좌표계에서 기술되는 임의 물리량으로, $\bar{\mathbf{p}} = [\bar{u} \ \bar{\theta}_1 \ \bar{\theta}_2]$ 는 보 요소의 절점 변형벡터, $\bar{\mathbf{Q}} = [\bar{N} \ \bar{M}_1 \ \bar{M}_2]$ 는 보 요소의 절점 하중벡터(외력)이며, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 과 $\boldsymbol{\sigma}$ 는 CR 좌표계의 \bar{x} 축 일치하는 방향으로 정의된 보 요소의 변형률과 응력이다. 식 (1)은 비선형 평형방정식이므로, 이를 위해 Taylor 전개를 이용해 식 (2)와 같이 선형화할 수 있으며, 이를 식 (3)과 같이 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\delta \bar{\mathbf{p}}^T \bar{\mathbf{Q}} - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{p}}^T \bar{\mathbf{Q}} - \delta \bar{\mathbf{p}}^T \left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{a}^T \sigma(\varepsilon) dV \right) & \quad (3) \\ = \delta \bar{\mathbf{p}}^T \left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{a}^T E_t(\varepsilon) \mathbf{a} \mathbf{B} dV \right) \Delta \bar{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

여기서, $\mathbf{a} = [1-y]$ 이며, E_t 는 접선 탄성계수, \mathbf{B} 는 식 (4)와 같다.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/L_0 & 0 & 0 \\ 0 & (-4L_0 + 6\bar{x})/L_0^2 & (-2L_0 + 6\bar{x})/L_0^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서, L_0 는 보 요소의 변형전 길이이다. 식 (3)으로부터 식 (5)와 같은 증분 평형 방정식을 도출할 수 있으며, 식 (5)의 각 성분은 식 (6), (7)에 기술하였다.

$$\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{Q}}_{int} = \bar{\mathbf{K}} \Delta \bar{\mathbf{p}} \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{int} = \int_x \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{f}}_{sec} dx \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \int_x \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{k}}_{sec} \mathbf{B} dx \quad (7)$$

여기서, $\bar{\mathbf{Q}}_{int}$ 와 $\bar{\mathbf{K}}$ 는 요소 부재력 벡터와 강성행렬, $\bar{\mathbf{f}}_{sec}$ 과 $\bar{\mathbf{k}}_{sec}$ 은 단면 내력벡터와 단면 강성행렬로, 식 (8)과 (9)와 같이 기술된다.

$$\bar{\mathbf{f}}_{sec} = \int_A [\sigma(\varepsilon) \quad -y\sigma(\varepsilon)]^T dA \quad (8)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{sec} = \int_A E_t(\varepsilon) \begin{bmatrix} 1 & -y \\ -y & y^2 \end{bmatrix} dA \quad (9)$$

식 (5)는 CR 좌표계에서 기술된 것이므로, 요소 간 조합 (assembly)을 위해 전역 좌표계 상에서 식 (5)를 기술할 필요가 있다. CR 보 요소에 대한 물리량은 좌표계와 무관하게 일정해야 하므로, 가상일에 대해 식 (10)과 같은 관계가 성립해야 한다.

$$\delta \mathbf{p}^T \mathbf{Q} = \delta \bar{\mathbf{p}}^T \bar{\mathbf{Q}} \quad (10)$$

여기서, \mathbf{p} 와 \mathbf{Q} 는 전역 좌표상의 요소 절점 변형벡터와 절점 하중벡터이다. $\delta \bar{\mathbf{p}}$ 와 $\delta \mathbf{p}$ 의 관계는 기하학적으로 정의할 수 있으며, 이는 식 (11)와 같이 기술된다. 식 (11)을 식 (10)의 우변에 대입함으로써, 식 (12)와 같이 전역 좌표계와 CR좌표계 상의 내력 벡터의 관계를 정의할 수 있다.

$$\delta \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{T} \delta \mathbf{p} \quad (11)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{Q}} \quad (12)$$

여기서, \mathbf{T} 는 CR 좌표계 상의 변수를 전역좌표계로 전환하는 행렬이며, 식 (13)과 같이 기술된다.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & 0 \\ -s/L & c/L & 0 & s/L & -c/L & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서, c 는 $\cos \beta$, s 는 $\sin \beta$, L 는 축변형을 포함한 보 요소 길이, β 는 보 요소 축과 전역 좌표계의 가로축 간에 이루는 각이다(Fig. 1 참조). 식 (12)과 식 (6)으로부터, 평형방정식을 충족시키는 전역 좌표계 상의 요소 내력벡터를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{Q}_{int} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{Q}}_{int} \quad (14)$$

전역 좌표계 상의 일관된 접선강성 행렬(consistent tangent stiffness matrix)을 얻기 위해 \mathbf{Q}_{int} 에 대해 변분을 취하면 식 (15)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Q}_{int} &= \mathbf{T}^T \delta \bar{\mathbf{Q}}_{int} + \delta \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{Q}}_{int} \\ &= \mathbf{T}^T \delta \bar{\mathbf{Q}}_{int} + \delta \mathbf{T}_1 \bar{N} + \delta \mathbf{T}_2 \bar{M}_1 + \delta \mathbf{T}_3 \bar{M}_2 \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, CR 좌표계가 강제이동과 회전을 포함하므로 \mathbf{T} 역시 변분량을 가짐을 유의해야 하며, $\delta \mathbf{T}_1, \delta \mathbf{T}_2, \delta \mathbf{T}_3$ 은 \mathbf{T}^T 의 각 행의 변분량이다. $\delta \mathbf{T}_1, \delta \mathbf{T}_2, \delta \mathbf{T}_3$ 의 유도과정은 Yaw(2009)을 참고할 수 있다. \mathbf{T} 와 $\bar{\mathbf{Q}}_{int}$ 에 대해 변분값을 정리하면 식 (15)를 식 (16)과 같이 정리할 수 있다.

$$\delta \mathbf{Q}_{int} = \mathbf{K} \delta \mathbf{p} = (\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_y) \delta \mathbf{p} \quad (16)$$

여기서, \mathbf{K} 는 전체 요소 강성행렬, \mathbf{K}_m 는 재료 변형에 관한 요소 강성행렬, \mathbf{K}_y 는 기하 비선형성으로 인한 요소 강성행렬이며, \mathbf{K}_m 과 \mathbf{K}_y 는 식 (17), (18)과 같이 각각 정리된다.

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T} \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_y = \frac{\bar{N}}{L} \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2)}{L^2} (\mathbf{r}^T \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \mathbf{r}) \quad (18)$$

여기서, \mathbf{z} 와 \mathbf{r} 는 각각 식 (19), (20)와 같다. 식 (14), (17), (18)은 전역 좌표상의 요소 내력벡터 및 강성행렬이므로,

이를 조합해 전체 해석모델에 대한 증분 평형방정식을 기술할 수 있다.

$$\mathbf{z} = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T \quad (19)$$

$$\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T \quad (20)$$

2.2 화이버 단면법

재료 비선형 및 합성 거동을 고려하기 위해 화이버 단면법이 CR 보 요소에 적용되었다. 화이버 단면법은 보 요소 단면을 여러 개의 화이버 다발로 고려하고 각각의 화이버에 1축 응력-변형률 관계를 정의함으로써, 합성단면을 갖는 부재의 단면력 및 단면 강성을 계산하게 된다(Fig. 2). 화이버 단면법에 대한 자세한 내용은 Spacone 등(1996)을 참고할 수 있다. 본 연구에서 사용된 화이버 단면법은 강성법(displacement-based formulation)에 의해 식 (6)과 (7)의 단면력 $\bar{\mathbf{f}}_{sec}$ 과 단면 강성 $\bar{\mathbf{k}}_{sec}$ 을 결정한다. 도심축과 중립축의 위치가 일치하다고 가정하여 화이버 단면법을 적용하면, 식 (8)과 (9)는 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\mathbf{f}}_{sec} = \left[\sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma_i(\epsilon_i) \Delta A_i \quad - \sum_{i=1}^{n_{fib}} y_i \sigma_i(\epsilon_i) \Delta A_i \right]^T \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{sec} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{t,i}(\epsilon_i) \Delta A_i & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{n_{fib}} y_i^2 E_{t,i}(\epsilon_i) \Delta A_i \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서, 하첨자 i 는 각각의 화이버를 나타내며, y_i 는 i 화이버의 중립축으로부터의 거리, ΔA_i 는 i 화이버의 단면적, σ_i 는 i 화이버의 수직응력(normal stress), ϵ_i 은 i 화이버의 수직 변형률, $E_{t,i}$ 는 i 화이버의 접선 탄성계수이다. 각 화이버마다 서로 다른 재료물성의 할당이 가능하므로, 합성단면을 갖는 부재의 재료적 비선형 거동을 구현할 수 있다.

2.3 재료 구성모델

CR 정식화에 의해 도출된 요소는 변위는 크지만 변형량이 작은 문제에 적합하다. 본 연구에서 제시된 화이버 CR 보 요소는 변형이 미소함을 가정하였으므로, 일반적으로 사용되는 탄소성 모델을 그대로 적용할 수 있다. 재료 구성모델로써 등방 선형경화모델이 가정되었으며, 이에 대한 모식도를 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3에서 σ_y 는 항복강도, E 는 선형탄성계수, K 는 경화계수이다. 해당 재료모델은 식 (14)와 (15)에서 각

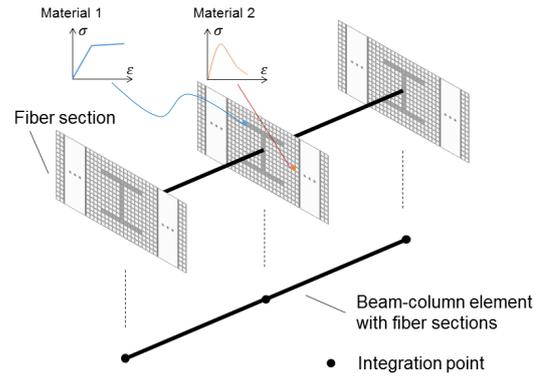


Fig. 2 Scheme of beam-column element with fiber sections(Kim et al., 2014)

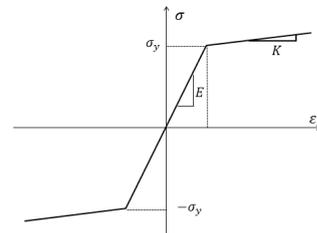


Fig. 3 Isotropic hardening model

각의 화이버에 적용되며, 화이버에 서로 다른 재료 물성을 적용함으로써 합성단면 거동을 재현할 수 있게 된다.

2.4 비선형 해법(solution scheme)

Snap-through 또는 snapback과 같은 심한 기하 비선형성을 동반한 문제는 Newton-Raphson법과 같은 일반적인 비선형 해법을 적용했을 때 수렴성 문제가 발생하게 되므로, 구조물의 거동을 온전히 추적해 내는데 어려움이 존재한다. 본 연구에서는 심한 비선형성을 포함한 구조물의 거동을 예측하기 위해 호장법(arc-length method)을 적용하였다. 호장법은 평형방정식과 제약함수(constraint function)를 동시에 충족시키는 절점변위벡터와 하중 크기를 계산하는 방법으로, 유한 요소 방정식에서 변위벡터뿐만 아니라 하중 크기까지도 미지 값으로 고려함으로써 극한하중 이후의 거동까지 예측이 가능하다. 호장법은 hyper-ellipsoids 형상에 대한 가정에 따라 반복연산 횟수 및 수렴성이 달라지는데, 본 연구에서는 hyper-plane 형상을 가정한 제약함수를 사용하였다. 호장법에 대한 상세한 내용은 Borst 등(2012)을 참고할 수 있다.

3. 해석모델 검증

화이버 CR 보 요소를 구현하기 위해 2장에 기술된 내용을 바탕으로 MATLAB 기반의 유한요소해석 프로그램을 개발

하였다. 개발된 프로그램은 화이버 CR 보 요소에 대한 증분 요소 방정식을 조합하여, 증분 변위벡터 및 하중계수 값을 산출한다. 여기서 각 요소의 강성 및 내력은 4점 Gauss-Legendre 적분법에 의해 계산되었다. 비선형 해의 수렴기준으로써 잔류하중벡터의 norm 값이 사용되었고, 이에 대한 허용값은 $1.0 \times 10^{-9} \text{N}$ 이다.

화이버 CR 보 요소 및 개발된 프로그램의 검증에 위해 선형 및 탄소성 해석을 수행하였다. 해석대상은 폭과 깊이가 각각 2cm인 정사각 단면을 갖는 길이 1m의 캔틸레버 보로, 자유단에서 집중하중을 받는다. 과도한 변형 발생을 위해 부재는 FRP 재료(탄성계수 10GPa과 항복강도 80MPa)로 이루어졌다고 가정하였다. 자유단에서의 하중-변위 선도를 도출하기 위해 폭과 깊이 방향으로 각각 1개, 8개의 화이버로 분할된 CR 보 요소 10개를 이용해 해석모델을 생성하였다. 한편, CR 보 모델의 해석결과의 검증을 위해 상용 유한요소해석 프로그램인 ABAQUS ver.6.14을 이용하여 연속체 모델(C3D8R)을 생성하였다. ABAQUS는 Updated Lagrangian(UL) 정식화를 사용한다. 연속체 모델은 보 단면의 폭과 깊이를 각각 8 등분하여 20,000개의 요소 격자로 구성되었으며, CR 보 모델과 동일한 하중 및 경계조건이 부여되었다(Fig. 4).

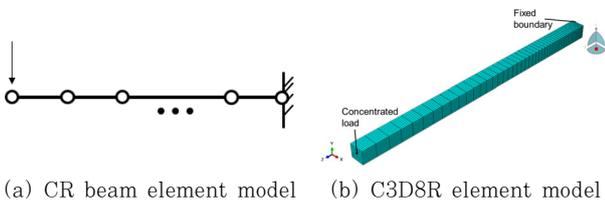


Fig. 4 Numerical model

Fig. 5는 캔틸레버 보의 자유단에서의 하중-변위 선도를 보여준다. 수치모델의 검증과 재료적 비선형성으로 인한 거동 변화를 확인하기 위해 기하학적 비선형성만 고려된 해석결과를 함께 도시하였다. CR 보의 해석결과가 참조모델의 것과 거의

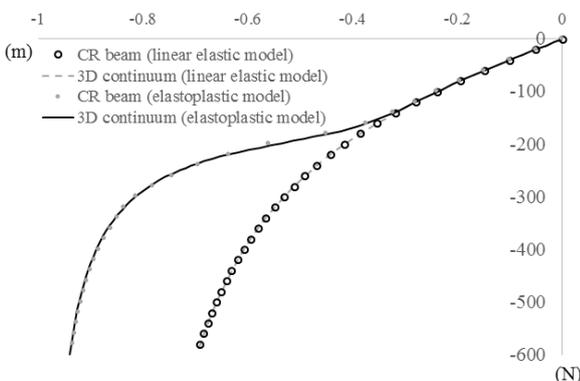


Fig. 5 Comparison of load-displacement curves at the free end of cantilever beam

일치하는 것을 확인할 수 있으며, 재료적 비선형성을 고려함에 따라 하중-변위선도가 상이하게 변화되는 것도 함께 관찰할 수 있다. 140N 이상의 하중이 가해짐에 따라 탄소성 변형이 발생하였고, 600N 하중이 작용할 때, 고정단 부근의 단면 대부분이 항복하였다.

추가로, 압축하중과 휨 하중을 동시에 받는 기둥문제에 대해서도 CR 보 모델을 적용하여 비탄성 거동을 확인하였다. 기둥 제원 및 하중조건은 Fig. 7에 나타내었다. 여기서 P는 압축력, V는 횡방향 하중, L_0 는 기둥의 변형 전 길이, b는 정사각 단면의 폭이다. 20개의 CR 보 요소를 이용해 Fig. 6에 대한 해석 모델을 생성하였으며, 각 요소 단면은 폭과 깊이 방향으로 각각 1개, 14개의 화이버로 구성되도록 분할하였다. 해석결과와 정확도를 평가하기 위해 Fig. 6에 상응하는 3차원 연속체 모델을 함께 생성하였다. 연속체 모델은 고체 요소(C3D8R) 22,400개를 이용해 생성하였으며, 탄소성 해석 시 연화(softening) 거동이 예상되므로 호장법을 이용해 응답을 결정하도록 하였다.

Fig. 7은 보-기둥 상단에서의 축방향 하중과 횡방향 변위의 변화를 나타낸 것이다. 재료적으로 선형 거동이 가정되었을 때,

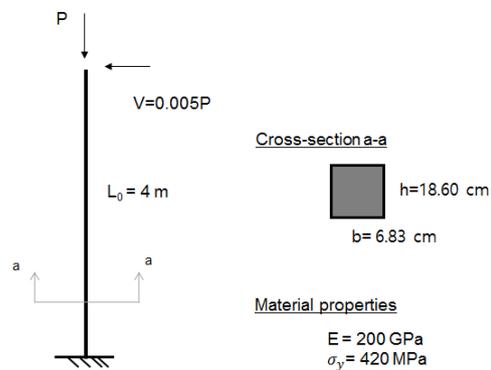


Fig. 6 Analysis of beam-column structure

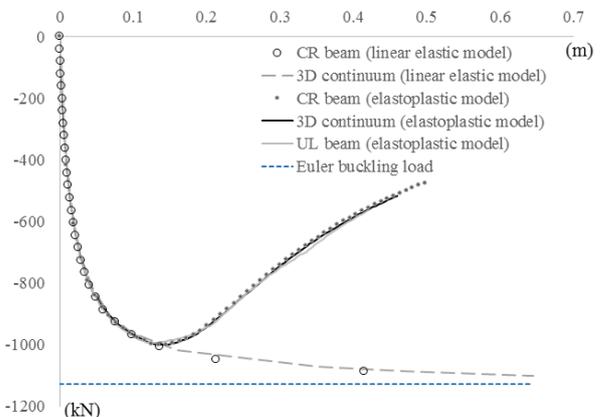


Fig. 7 Comparison of load-displacement curves at the top of beam-column

보-기둥은 횡 변위에 의한 $P-\Delta$ 효과가 발생하였고, 그 결과 축하중이 Euler 좌굴하중 값 1129kN에 근사함에 따라 수평 변위가 급격하게 증가되었다. 이러한 거동은 기하 비선형성이 고려되지 않는 해석모델에서는 관찰되지 않는다. 한편 탄소성 거동을 가정한 경우, CR 보 모델의 해석결과와 거의 일치하였으나, UL 보 모델의 경우 최대하중(1000.83kN) 전후의 하중-변위 선도에 대해서는 다소 차이가 나타났다.

4. 합성단면 구조물의 기하 및 재료 비선형 해석

집중하중을 받는 캔틸레버 보와 보-기둥의 기하 및 재료 비선형 해석을 통해, 제시된 하이버 CR 보 요소의 유효성을 보였다. 본 장에서는 제안된 요소를 적용해 합성단면을 갖는 구조물의 비선형 거동 예측하였다. 합성단면 및 재료적 비선형성으로 인한 영향을 고찰하기 위해 de Souza(2000)의 연구에서 수행된 수치예제와 동일한 구조물을 해석대상으로 선정하고(Fig. 8), 구조물이 샌드위치 패널 단면을 갖는 부재로 구성되어 있다고 고려하였다. 샌드위치 패널 단면은 Fig. 8에 나타낸 것과 같이 폭과 깊이 방향으로 각각 1, 18개의 하이버로 분할되었으며(material A: 6개, material B: 12개), 외부와 내부에 대해 Table 1에 제시된 재료물성을 적용하였다. 참고로 Fig. 8의 구조물은 기하학적 비선형성을 고려하는 경우, snap-through와 snapback을 모두 동반하는 심한 비선형 거동을 보이는 것으로 알려져 있다(Lee *et al.*, 1968).

합성단면을 갖는 구조물의 해석을 수행하기에 앞서, 본 연구의 해석모델을 de Souza(2000)의 수치예제에 적용하였다. De Souza(2000)의 연구는 본 연구와 달리 단일 재료로 이루어진 구조물에 대해 수치해석이 수행되었으며, 유연도법에 의한 요소 정식화와 5점 Gauss-Lobatto 적분법이 사용되었다. 또한 소성모델로써 이동 경화(kinematic hardening)가 함께 고려된 선형 경화모델이 사용되었다. 해석 구조물은 Table 1의 A 재료로 이루어진 것으로 고려하였으며, 하중 재하점에서의 하중-수직변위 변화를 비교하여 Fig. 9에 나타내었다.

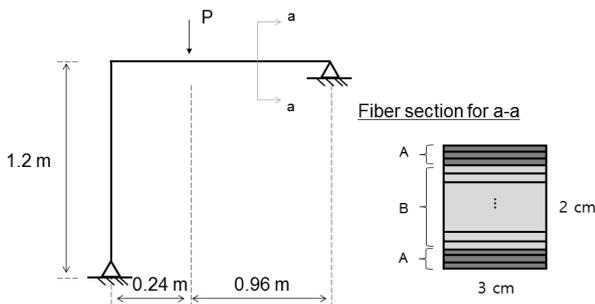


Fig. 8 Frame structure with sandwich panel

Table 1 Material parameters of composite member

Mat.	Elastic modulus (GPa)	Yield strength (MPa)	Hardening modulus (GPa)
A	70.608	1020	7.608
B	200	420	0

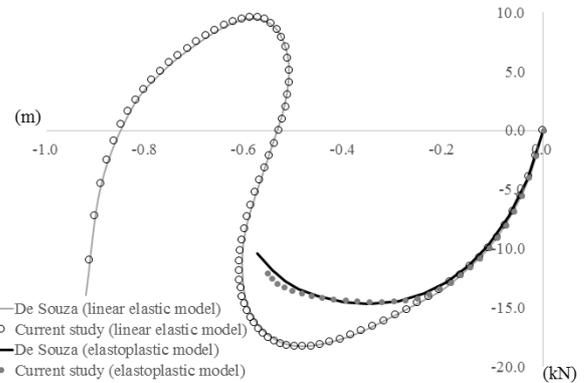


Fig. 9 Vertical load-displacement curve (homogeneous material)

기하학적 비선형만 고려한 결과에 대해서는 거의 일치하는 결과를 얻었으나, 재료적 비선형성이 고려된 결과에서는 재료 모델의 차이로 인해 극한하중을 전후로 하여 다소 차이가 나타났다. 한편, 재료 비선형성과 기하 비선형성을 함께 고려함으로써, 재료 비선형성만 고려한 경우(18.4kN)에 비해 구조물의 최대 내력이 적게 나타났으며, 변형이 증가됨에 따라 내력 또한 점차 감소하는 것을 확인할 수 있다. 내력 감소는 하중 재하지점에서의 소성힌지와 우각부(corner)에서 심부 재료(B)의 상당 부분이 항복되는 것에 기인한다. 다만, 우각 부의 외층 재료(A)는 해석 구간 전체에서 걸쳐 선형적으로 거동하였다.

샌드위치 패널 단면을 갖는 구조물에 대해 수치해석을 수행하였으며, 추가적으로 사용 재료 간의 탄성계수 비와 강도 비를 달리하여 구조물의 응답 변화를 분석하였다. Table 1의 재료 물성을 기본으로 하여 material A, B의 탄성계수와 강도 비를 Table 2와 같이 달리하여 해석을 수행하였다. Table 2에서 탄성계수 비 $\alpha=0.353$ 과 강도 비 $\beta=2.429$ 가 Table 1의 합성단면 재료물성이 적용된 경우에 해당되며, 나머지 해석케이스는 material B의 물성은 고정된 상태로 material A의 탄성계수 또는 강도를 증감시킨 것이다.

Table 2 Change in composite material properties for parametric study

Object	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
Ratio of elastic modulus ($\alpha = E_A/E_B$)	0.176	0.353	1.000	2.000
Ratio of yield strength ($\beta = \sigma_{yA}/\sigma_{yB}$)	0.500	1.000	2.429	3.644

수치해석으로부터 얻은 하중 재하점에서의 수직변위 변화를 Fig. 10~11에 나타내었다. 합성단면의 외층 재료(A)의 탄성 계수가 증가됨에 따라 하중-변위 선도의 초기 기울기가 점차로 증가하였으며, 최대 내력에 이른 후 발현되는 내력이 감소되는 경향이 보다 명시적으로 드러났다($\alpha=1.000$, $\alpha=2.000$). Fig. 10에 나타낸 하중-변위선도에서 case별 최대 내력이 발생된 이후의 내력이 감소하는 원인이 서로 다름에 유의해야 한다. $\alpha=0.176$ 과 $\alpha=0.353$ 은 하중재하점의 소성흔지 발생과 우각부 단면의 심부재료의 항복으로 인해 구조물의 저항성능 자체가 감소된 것이다. 반면, $\alpha=1.000$ 과 $\alpha=2.000$ 은 기하학적 대변형에 기인한 것으로, 하중 재하점에서 단면 대부분이 항복되었지만 우각부 단면에서 외층과 심부 재료 모두 항복이 발생하지 않았으므로 외력에 대한 추가적인 저항이 가능하다.

한편, 합성단면 외부 재료의 강도 비가 증가됨에 따라 구조물의 최대 내력이 증가되었으며, 기하학적 비선형성만 고려한 하중-변위 선도의 형상과 점차 유사하게 변화됨을 확인할 수 있다(Fig. 11). 다만, 재료 비선형성으로 인해 snapback 거동은 관찰되지 않았다. $\beta=0.500$ 과 $\beta=1.000$ 의 경우 항복

강도가 낮아 하중-변위선도의 연성구간에서 하중 재하점과 우각부 대부분이 항복되었으며, $\beta=2.429$ 와 $\beta=3.644$ 는 우각부 단면의 심부 재료가 일부 항복되었으나 외층 재료는 탄성 영역에서 거동하였다.

위에 기술된 내력 증감에 대한 분석은 화이버 단면의 응력추이를 통해 도출되었다. Figs. 12, 13은 $\beta=3.644$ 조건에서 하중 재하점과 우각부에서의 수직변위 변화와 단면 내 응력 추이를 함께 나타낸 것으로, 각 응력 관측지점 a, b, c, d는 도심으로부터 각각 0.94cm, 0.72cm, 0.61cm, 0.06cm 떨어진 위치에 있다. 그림에서 확인할 수 있듯이, 해석에서 다뤄진 변형 구간동안 우각부 c점을 제외하고 재료적으로 선형 거동을 유지하였다. 반면, 하중 재하점에서는 재료 대부분이 항복되었다가, 탄성영역으로 응력이 점차 전이되었다.

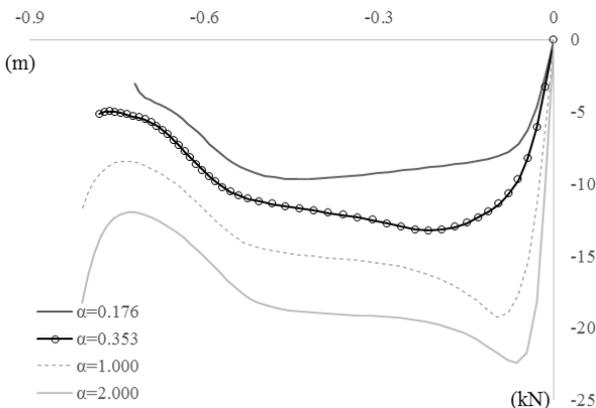


Fig. 10 Vertical load-displacement curve(composite cross-section): elastic modulus ratio

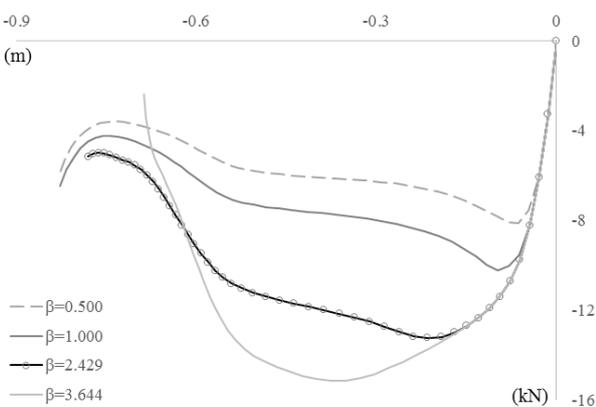


Fig. 11 Vertical load-displacement curve(composite cross-section): yield strength ratio

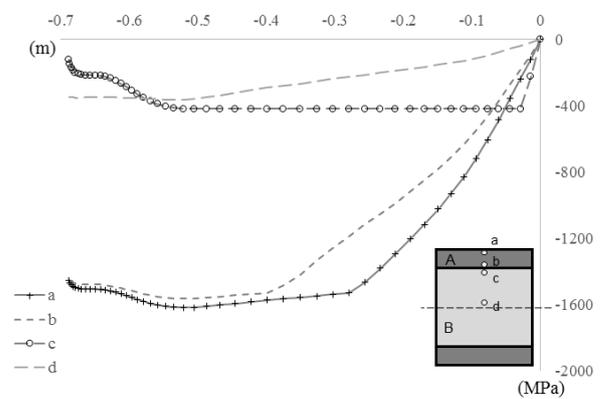


Fig. 12 Stress history at the loading point($\beta=3.644$)

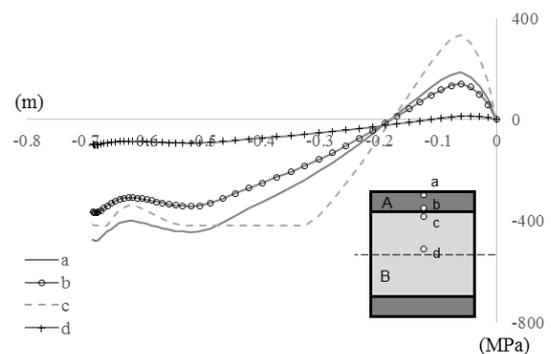


Fig. 13 Stress history at the corner($\beta=3.644$)

5. 결 론

본 연구에서는 구조물의 기하학적 비선형성을 효과적으로 고려할 수 있는 CR 보 요소에 화이버 단면법을 적용하여 재료 비선형성과 함께 합성단면 거동까지 함께 고려할 수 있도록 요소 정식화를 수행하였으며, 캔틸레버 및 프레임 구조물에 대한 수치예제를 통하여 개발된 방법의 타당성과 적용성을

평가하였다.

본 연구에서 제시된 방법은 UL 정식화에 의한 3차원 연속체 해석 및 기존 해석해와 비교되었으며, 이를 통해 구조물의 기하학적 비선형과 탄소성 거동을 잘 예측해낼 수 있음을 확인하였다. 특히, 단면 크기에 비해 부재 길이가 긴 구조물의 경우, 휨 거동이 지배적이므로 3차원 연속체 모델은 단면 깊이 방향으로 충분한 격자 분할이 이루어져야 하며, 양호한 격자 형상을 유지하기 위해 많은 요소가 생성되어야 한다. 그 결과 많은 전산 자원이 요구되므로 효율성이 떨어지게 되는데, 재료 및 기하학적 비선형 거동을 하는 합성단면을 갖는 부재에 대해서는 더 많은 요소가 사용되어야 하므로 해석 효율성이 더 낮아지게 된다. 반면, 본 연구에서 제시된 방법은 화이버 단면법을 통해 구조물에 대한 강성행렬 및 하중벡터의 크기의 증가없이 비선형 합성 단면 거동을 구현해 냈고, CR 정식화를 사용함으로써 적은 요소 사용으로도 기하학적 비선형을 잘 추적해 낼 수 있었다.

합성단면을 갖는 프레임 구조물의 지배적 거동이 합성단면의 탄성계수 비와 항복강도 비에 따라 상이해짐을 확인하였다. 합성단면의 심부 재료에 비해 외부층 재료의 탄성계수 비가 높아짐에 따라 최대 저항 내력 및 초기 강성이 증대되었으며, 외부 재료의 항복강도 비가 증가됨에 따라 하중-변위 선도는 기하학적 비선형성만 고려된 경우와 유사하게 변화되었다.

감사의글

본 연구는 에너지기술평가원의 에너지기술개발사업(No. 2015 3030071630)의 지원을 받아 수행되었습니다. 연구비 지원에 감사드립니다.

References

Borst, R.D., Crisfield, M.A., Remmers, J.C., Verhoosel, C.V. (2012) *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, 2nd ed., Wiley, pp.116~124.

Crisfield, M.A. (1990) A Consistent Co-rotational Formulation for Non-linear, Three-dimensional, Beam-elements, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 81, pp.131~150.

De Souza, R.M. (2000) *Force-based Finite Element for Large Displacement Inelastic Analysis of Frames*, PhD. Dissertation, University of California, Berkeley.

Hur, J.S., Kim, S.R., Hwang, J.D., Seo, Y.W., Jung, M.K. (2013) A Study on the Performance-based Design Methodology for Tunnels through Case Study on the

Tunnel Built by the Prescribed Design, *J. Korean Tunn. & Undergr. Space Assoc.*, 15, pp.415~429.

Kim, J.S., Yu, J.H., Kim, M.K. (2014) Numerical Study on Shotcrete Lining with Steel Reinforcement using a Fiber Section Element, *J. Korean Soc. Civil Eng.*, 34, pp.919~930.

Ko, J.W., Bin, Y.B., Eun, W.J., Shin, S.J. (2015) Linear Analysis and Non-linear Analysis with Co-rotational Formulation for a Cantilevered Beam under Static/Dynamic Tip Loads, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 28, pp.467~475.

Kim, S.I., Kim, Y.S., Park, C.W., Shin, S.J. (2016) Study on Vibration Characteristics in Terms of Airfoil Cross-Sectional Shape by using Co-rotational Plane Beam Transient Analysis, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 29, pp.389~395.

Lee, B.G., Park, T.H., Lee, S.Y. (2008) Introduction and Necessity of Concept of Demand for Performance-based Design, *Proc. Korea Concr. Inst. Conf.*, 20, pp.125~128.

Le Corvec, V. (2012) *Nonlinear 3d Frame Element with Multi-axial Coupling under Consideration of Local Effects*, PhD. Dissertation, University of California, Berkeley.

Lee, S., Manuel, F.S., Rossow, E.C. (1968) Large Deflections and Stability of Elastic Frames, *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 94, pp.521~548.

Parente, JR.E., Nogueira, G.V., Meireles Neto, M., Moreira, L.S. (2014) Material and Geometric Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames, *IBRACON Struct. & Mater. J.*, 7, pp.879~904.

Rankin, C.C., Brogan, F.A. (1986) An Element Independent Co-rotational Procedure for the Treatment of Large Rotations, *ASME J. Press. & Vessel Tech.*, 108, pp.165~174.

Spacone, E., Filippou, F.C., Taucer, F.F. (1996) Fiber Beam-column Model for Non-linear Analysis of R/C Frames: Part I. Formulation, *Earthq. Eng. & Struct. Dyn.*, 25, pp.711~726.

Teh, L.H., Clarke, M.J. (1998) Co-rotational and Lagrangian Formulations for Elastic Three-dimensional Beam Finite Elements, *J. Constr. Steel Res.*, 48, pp.123~144.

Xu, J., Lee, C.K., Tan, K.H. (2012) A Two-dimensional Co-rotational Timoshenko Beam Element with XFEM Formulation, *Comput. Mech.*, 49, pp.667~683.

Yaw, L.L. (2009) *2D Corotational Beam Formulation*,

Walla Walla Univ.

Yoon, K., Lee, Y., Lee, P.H. (2012) A Continuum Mechanics based 3-D Beam Finite Element with Warping Displacements and Its Modeling Capabilities, *Struct. Eng. & Mech.*, 43, pp.411~437.

Yoon, K., Lee, P.H., Kim, D.N. (2015) Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Functionally

Graded 3D Beams Considering Warping Effects, *Compos. Struct.*, 132, pp.1231~1247.

Zhang, X., Rasmussen, K.J.R., Zhang, H. (2011) *Formulation and implementation of three-dimensional doubly symmetric beam-column analyses with warping effects in OpenSees*, Research Report R917.

요 지

본 논문에서는 합성단면을 갖는 구조물의 극한 거동 해석에서 요구하는 재료 및 기하학적 비선형 해석을 수행하기 위한 보 요소를 제시하였다. 제안된 요소는 기하학적 비선형성을 효과적으로 모사할 수 있는 co-rotational 정식화를 통해 도출되었으며, 다양한 합성단면의 저항성능을 재현할 수 있도록 화이버 단면법이 요소의 내력 및 강성을 산정하는데 활용되었다. 제안된 방법을 구현할 수 있도록 해석 프로그램이 개발되었으며, 호장법을 적용하여 최대내력 발생 이후의 연성거동뿐만 아니라 심한 비선형 응답(snap-through 또는 snapback)까지 추적해낼 수 있도록 하였다. 본 연구에서 제안된 요소 정식화와 해석 프로그램의 정확성을 검증하기 위해 몇 가지 수치예제가 수행되었고, 해석결과는 제안된 요소의 정확성과 효율성을 보이기 위해 3차원 연속체 모델 및 기존 연구의 결과와 비교되었다. 추가로 합성단면을 갖는 골조 구조물에 대한 수치예제를 통해, 합성단면을 구성하는 재료의 탄성계수 비 및 강도 비에 따른 영향을 분석하였다. 해석결과는 외층 재료의 탄성계수가 증가됨에 따라 준취성 거동이 나타났으며, 외층 재료의 항복강도가 높을수록 선형 거동하는 기하적 비선형 응답과 유사한 응답을 보였다.

핵심용어 : 기하학적 비선형, 재료 비선형, 화이버 단면, 동시회전 정식화, 극한해석, 합성단면