대한조선학회논문집
Journal of the Society of Naval Architects of Korea
pISSN:1225-1143, Vol. 54, No. 3, pp. 250-257, June 2017
eISSN:2287-7355, https://doi.org/10.3744/SNAK.2017.54.3.250

3차원 물체 부근에 위치한 특이점이 물체에 작용하는 힘

최진영·이승준[†]
충남대학교 선박해양공학과

Force upon a Body due to Neighboring Singularity

Jin-Young Choi·Seung-Joon Lee[†]
Dept. of Naval Architecture & Ocean Engineering, Chungnam National University

It is desirable to have a way to predict the pressure drag due to various appendages attached to stern. As a mathematical model for these, a sphere and a singularity behind it, both in the uniform flow can be considered. We may use the Butler's sphere theorem to find the Stokes' stream function when the resulting flow is axisymmetric, and then the extended Lagally's theorem to get the force upon the sphere due to the singularity. Assuming the separation distance between the sphere and the singularity is small, the leading order approximation for the force is obtained and it is found out that if the separation distance and the square root of the strength of the dipole are of the same order, the effect of the image of the dipole with respect to the sphere is the most important.

Keywords : Appendages(부가물), Singularity(특이점), Stokes' stream function(스토크스 유량함수), Butler's sphere theorem(버틀러 구 정리), Lagally's theorem(라갈리 정리)

1. 서 론

선미부에 장착하는 다양한 형태의 부가물(appendage)에 대해 그 위치와 형상이 저항증가에 얼마나 큰 영향을 미치는지는 초기 설계 단계부터 중요하게 다루어져야 하지만 현실적으로는 대개 이들의 부착에 따라 증가하는 면적에 해당하는 만큼의 마찰저항 증가만을 고려한다. 그러나 이와 같은 저항증가는 기본적으로 압력 항력의 증가에 따른 것이므로, 정성적인 이해를 위해서는 점성을 무시하고 보아야 이에 대한 올바른 결과를 얻을 수 있을 것이다. (Lee, 2010a; 2010b)는 이와 같은 관점에서 2차원 및 3차원 문제에 대한 고찰을 수행한 바 있다.

본 논문에서는 3차원 물체에 국한하여 생각하기로 하는데, 선박은 구(sphere)로, 부가물은 특이점(point singularity)으로 각각 이상화하기로 한다. 구에 대한 결과를 얻는다면 이를 확장하여 타원체(ellipsoid) 또는 구체(spheroid) 등에 대해 고려할 수 있으므로, 이와 같은 이상화가 비현실적이라고 볼 수는 없다. 물체를 다극점(multipole) 조합으로 이상화할 경우, 닫힌 물체의 특성을 나타내는 가장 저차의 특이점은 쌍극점(point dipole)이며, 균일 유동(uniform flow) 중의 쌍극점은 구로 대체될 수 있으므로, 물체를 구로 이상화하는 것은 기하학적 형상은 단순화하지만, 물리적으로는 가장 중요한 특성을 고려하는 것에 해당한다고 볼 수 있다.

구 주위의 축대칭 유동을 다루는 데는 스토크스 유량함수(Stokes' stream function)를 쓸 수 있으며, 또 버틀러 구 정리(Butler's sphere theorem)를 사용할 수 있다 (Milne-Thomson, 1968; Yih, 1969).

일단 유동에 대한 속도장이 얻어지면, 확장된 라갈리 정리(Lagally theorem)를 사용하여 특이점이 구에 작용하는 힘을 구할 수 있는데, 기존의 라갈리 정리는 균일유동을 포함하지 않은 경우에 대해서만 증명되어 있으므로, 이를 여기서 생각하는 경우에 대해 증명하여, 이 정리를 확장 적용할 수 있도록 하였다.

위에서 언급한 정리들을 사용하여 구에 작용하는 힘을 구하면, 식의 형태가 복잡하여, 설계자들이 쓰기에 쉽지 않으므로, 여기서는 얻어진 엄밀해(exact solution)에 대해 구와 특이점 사이의 거리, 즉 선체와 부가물 사이의 거리가 매우 작다는 가정을 도입하여 최저차 선도항(leading order terms) 근사를 얻는다.

2장에서 먼저 관련된 정리들에 대해 간략하게 정리하고, 3장

Received : 4 October 2016 | Revised : 20 March 2017 | Accepted : 22 May 2017
[†] Corresponding author : Seung-Joon Lee, sjoonlee@cnu.ac.kr

에서는 용출점(point source)과 쌍극점에 대해 엄밀해를 구한 후, 4장에서는 구와 특이점 사이의 거리가 매우 작다는 가정을 도입하여 이들 힘에 대한 최저차의 선도항을 구하며, 5장에서는 얻어진 결과를 간략하게 요약하였다.

2. 관련 이론

유체는 비점성, 비압축성, 즉 이상유체로 가정하고, 축대칭 비회전성 유동만을 고려하기로 하면 스토크스 유량함수 ψ 를 사용할 수 있다(이하에서는 편의상 유량함수라고 부르기로 한다). 직각좌표계 (x,y,z), 구좌표계 (r,θ,α), 기둥좌표계 (x,R,α) 를 편리한 대로 사용하기로 하며, Fig. 1에 이들을 보였다.

구좌표계의 r, θ 는 각각 다음과 같이 주어지며,

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ,\ \theta = \tan^{-1}\frac{R}{x}, \tag{1}$$

기둥좌표계의 x, R 은 각각 다음과 같이 주어지고,

$$x = r\cos\theta\ ,\ R = \sqrt{y^2+z^2} = r\sin\theta\ , \tag{2}$$

α 는 x축에 수직한 평면 상에서의 방위를 나타내는 방위각(azimuthal angle)으로 다음과 같이 주어진다.

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{z}{y}. \tag{3}$$

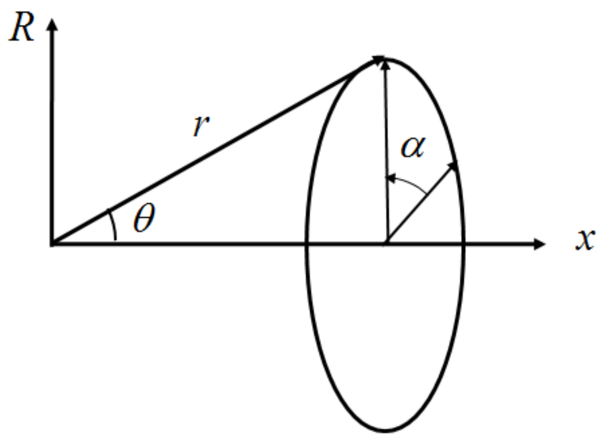

Fig. 1 Co-ordinate systems

유량함수 ψ 는 x축 상의 점에 대해서는 영, (x,R) 평면 상의 임의의 점 P에 대해 원점 O와 P를 연결하는 곡선을 가로질러 통과한 체적 유량(flux)을 2π 로 나눈 양으로 정의된다. 따라서 곡선의 미소 요소 ds 를 가로질러 곡선의 왼쪽에서 오른쪽으로 이동하는, 즉 n 방향으로 이동하는 유체 입자의 속도를 u_n 이라고 하면 $2\pi\, d\psi = 2\pi R u_n\, ds$가 성립하므로, 다음을 얻는다.

$$u_n = \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial s}. \tag{4}$$

양의 x축 방향으로 균일한 속도 U로 흐르는 균일유동(uniform flow)에 대한 유량함수는 다음과 같고,

$$\psi(r,\theta) = \frac{U}{2}r^2\sin^2\theta = \frac{U}{2}R^2\ , \tag{5}$$

원점에 위치한 세기 m 의 용출점에 대해서는 다음을 얻으며,

$$\psi(r,\theta) = -m\cos\theta\ , \tag{6}$$

또 원점에 위치한 세기 μ 의 쌍극점에 대해서는 다음을 얻는데,

$$\psi(r,\theta) = -\mu\frac{\sin^2\theta}{r}\ , \tag{7}$$

여기서 쌍극점의 축은 흡입점(point sink)으로부터 용출점을 향하는 것으로 하며, 위 식은 쌍극점의 축이 음의 x축과 같은 방향일 경우이다.

L, T를 각각 길이와 시간의 차원을 나타낸다고 하면, 유량함수의 차원은 체적 유량의 차원과 같으므로 L^3T^{-1}이며, 용출점의 세기 m 의 차원은 유량함수의 차원과 같고, 쌍극점의 세기 μ 의 차원은 L^4T^{-1}이다.

구 주위의 유동에 대해 고려할 때, 처음에 구가 없는 경우를 생각하여 어떤 유동이 주어졌다고 하고, 이 유동에 구를 도입하면 어떤 유동이 얻어지는지를 생각할 수 있는데, 여기서는 이와 같이 구가 도입되기 전의 유동을 기본유동(basic flow)이라고 부르기로 한다.

버틀러의 구 정리 (Milne-Thomson, 1968)는 다음과 같이 쓸 수 있다. 기본유동에 포함되어 있는 특이점이 원점으로부터 거리가 a 보다 모두 먼 곳에 있다고 할 때, 이 유동에 대한 유량함수 $\psi(r,\theta)$를 안다고 하자. 이 기본유동에 중심이 원점에 있고 반경 a인 구를 도입한다고 하면, 구 주위의 유동에 대한 유량함수 $\Psi(r,\theta)$는 다음과 같다.

$$\Psi(r,\theta) = \psi(r,\theta) - \frac{r}{a}\psi\left(\frac{a^2}{r},\theta\right). \tag{8}$$

확장된 라갈리 정리 (Lee, 2010b)는 부록에 간단히 정리하였는데, 그 결과는 다음과 같이 쓸 수 있다. 구가 x축의 양의 방향으로 U의 속도를 가진 균일유동과 구 바깥에 있는 단위 세기의 용출점으로 이루어진 유동 중에 있다고 할 때, 구가 받는 힘 $\underline{F}$는 다음과 같은데,

$$\underline{F} = 4\pi\rho\left(-U\hat{i} + \underline{u}_i\right), \tag{9}$$

여기서 ρ 는 유체의 밀도, $\hat{i}$ 는 x 방향의 단위 벡터, $\underline{u}_i$는 용출점에 있는 유체 입자의 속도에서 용출점 자신에 기인하는 속도를 제외한 속도이다.

용출점 대신 단위 세기의 쌍극점이 있는 경우, 구가 받는 힘은 다음과 같으며,

$$\underline{F} = 4\pi\rho\left(\hat{e}_d \cdot \nabla\right)\underline{u}_i, \tag{10}$$

여기서 $\hat{e}_d$ 는 쌍극점의 축 방향 단위 벡터이다.

3. 축대칭 유동에 대한 엄밀해

실제 체적이 유한한 물체는 용출점-흡입점 분포 또는 쌍극점으로 이상화해야 하지만, 그 적용이 간편한 용출점에 대해 먼저 생각하기로 하고, 구가 속도 U의 균일유동과 세기 m 인 외부의 용출점으로 이루어지는 유동 중에 있을 때 받는 힘을 구하여 2장의 정리들을 어떻게 적용하는지 살펴본다.

축대칭 유동으로 간주할 수 있으므로, 균일유동 중에 용출점이 x축 상의 점 B, 원점으로부터 거리 $b > a$인 곳에 있다고 하면, 기본유동에 대한 유량함수는 다음과 같다.

$$\psi(r,\theta) = \frac{U}{2}r^2\sin^2\theta - m(1+\cos\theta_1), \tag{11}$$

여기서 θ_1 은 Fig. 2에 보인 바와 같이 점 B와 유동장 내의 임의의 점 $P(\underline{x})$ 를 잇는 직선이 x축과 만드는 각도이며, 우변 둘째 항의 상수 1 은 원점에서 유량함수의 값이 영이 되도록 더해주었고, 유량함수에는 상수를 더해도 그 물리적 의미에는 변함이 없음에 유의한다.

먼저 $f(r,\theta) = \cos\theta_1$이라고 하면, 다음을 얻는다.

$$f(r,\theta) = \frac{x-b}{r_1} = \frac{r\cos\theta - b}{\sqrt{r^2+b^2-2br\cos\theta}}. \tag{12}$$

또 $g(r,\theta) = r_1$이라고 하면 다음을 얻는데,

$$g\left(\frac{a^2}{r},\theta\right) = \frac{b}{r}\sqrt{c^2+r^2-2cr\cos\theta} = \frac{br_2}{r}, \tag{13}$$

여기서 c는 $bc = a^2$으로 정의되는 점 B의 구에 대한 역점(inverse point)인 점 C의 x 좌표이며, 따라서 r_2 는 점 C로부터 점 P까지의 거리이다.

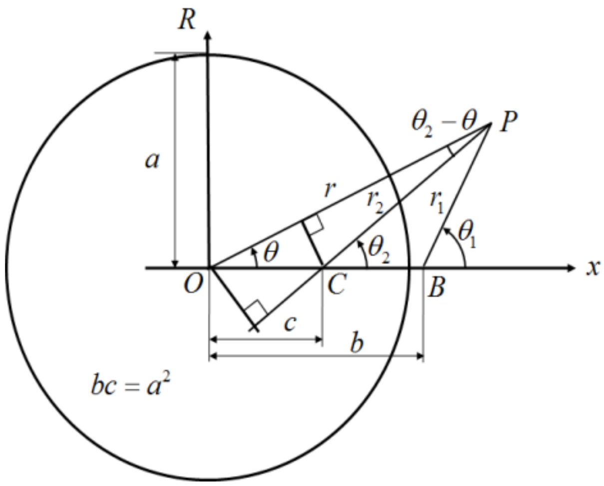

Fig. 2 Geometry for sphere and source

식 (13)을 이용하여 식 (12)로부터 다음을 얻는다.

$$f\left(\frac{a^2}{r},\theta\right) = \frac{a^2\cos\theta - br}{br_2} = \frac{c\cos\theta - r}{r_2}. \tag{14}$$

한편, Fig. 2에 보인 바와 같은 기하학적인 관계로부터 다음을 얻으므로,

$$r - c\cos\theta = r_2\cos(\theta_2-\theta) = r_2\frac{r_2 + c\cos\theta_2}{r}, \tag{15}$$

이를 식 (14)에 대입하여 다음을 얻는다.

$$f\left(\frac{a^2}{r},\theta\right) = -\frac{r_2(r_2+c\cos\theta_2)}{rr_2} = -\frac{r_2+c\cos\theta_2}{r}. \tag{16}$$

버틀러 구 정리의 식 (8) 우변의 둘째 항을 ψ_1 으로 나타내기로 하면 식 (16)을 이용하여 다음을 얻으며,

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -\frac{r}{a}\psi\left(\frac{a^2}{r},\theta\right) \\ &= -\frac{Ua^3}{2r}\sin^2\theta + \frac{m}{a}(r - r_2 - c\cos\theta_2),\end{aligned} \tag{17}$$

이 식을 버틀러 구 정리의 식 (8)에 대입하고 $\frac{c}{a} = \frac{a}{b}$ 를 이용하면 전체 유동에 대한 유량함수를 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{aligned}\Psi(r,\theta) = &\frac{U}{2}\left(r^2 - \frac{a^3}{r}\right)\sin^2\theta - m(1+\cos\theta_1) \\ &- \frac{m}{a}(r_2 - r) - \frac{ma}{b}\cos\theta_2.\end{aligned} \tag{18}$$

위 식 우변의 첫째 항은 균일유동 중에 구가 있을 때의 유량함수이고, 둘째 항은 용출점, 셋째와 넷째 항은 용출점의 경상(image)에 상응한다. 셋째 항은 원점으로부터 점 C까지 분포된 균일한 세기 m/a의 흡입점 선분포의 유량함수이며, 식 (6)으로부터 알 수 있는 바와 같이 넷째 항은 역점에 위치한 세기 $\frac{ma}{b}=\frac{mc}{a}$의 용출점의 유량함수이다. 경상을 구성하는 흡입점의 선분포에 의한 유량 $4\pi mc/a$와 용출점에 의한 유량 $4\pi ma/b$는 같으므로, 이들에 의한 순 유출량(net out-flux)은 영임에 유의한다.

d'Alembert의 역설로 잘 알려져 있는 바와 같이 이상유체로 이루어진 무한한 영역의 균일유동 내에 있는 물체는 어떠한 힘도 받지 않는다. 그러나 위에서와 같이 구 외부에 특이점이 있는 경우에는 특이점에 기인하여 구가 힘을 받으며, 용출점의 세기를 고려하고, 라갈리 정리를 사용하면 위에서 고려한 구는 다음과 같은 x 방향의 힘, X를 받는다.

$$X = 4\pi m\rho(-U+u_i)\,. \tag{19}$$

용출점 자신에 의한 속도를 제외하고, 점 B에 유기된 속도의 x 성분인 u_i는, 식 (18)의 우변에서 용출점을 제외한 부분을 ψ_i라고 하면, 식 (4)를 이용하여 다음과 같이 얻을 수 있고,

$$u_i = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi_i}{\partial R}\right)_B, \tag{20}$$

따라서 먼저 $\psi_i(x,R)$을 구하면 식 (18)로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\psi_i(x,R) = {} & \frac{U}{2}R^2-\frac{Ua^3}{2}\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \\ & -\frac{m}{a}\left(\sqrt{(x-c)^2+R^2}-\sqrt{x^2+R^2}\right) \\ & -\frac{ma}{b}\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+R^2}}\,.\end{aligned} \tag{21}$$

이를 식 (20)에 대입하여 $(x,R)=(b,0)$를 취하면 다음을 얻는데,

$$\begin{aligned}u_i &= U-\frac{Ua^3}{b^3}+\frac{ma^3}{b^3(b-c)^2} \\ &= U-\frac{Ua^3}{b^3}+\frac{ma^3}{b(b^2-a^2)^2}\,,\end{aligned} \tag{22}$$

위 식 둘째 등호 다음의 첫째 항은 균일유동, 둘째 항은 구에 상응하는 원점에 위치한 쌍극점, 그리고 셋째 항은 경상에 의해 각각 점 B에 유기된 속도이다. 특히 첫째 등호 다음의 셋째 항에서 알 수 있는 바와 같이 경상에 의한 영향은 용출점과 그 역점 사이의 거리, $(b-c)$의 제곱에 반비례하는 속도를 유기한다.

식 (22)에 $\frac{b}{a}=\beta>1$의 무차원량을 사용하기로 하면 다음을 얻는다.

$$u_i = U-\frac{U}{\beta^3}+\frac{m}{b^2}\frac{\beta}{(\beta^2-1)^2}\,. \tag{23}$$

따라서 구에 작용하는 힘은 식 (23)을 식 (19)에 대입하여 다음과 같이 얻는다.

$$X = 4\pi m\rho\left\{-\frac{U}{\beta^3}+\frac{m}{b^2}\frac{\beta}{(\beta^2-1)^2}\right\}. \tag{24}$$

선미에서 유체를 가속시키는 물체를 생각하고, 용출점의 세기를 나타내는 무차원량 γ를 사용하여, $m=-Ua^2\gamma$의 흡입점을 고려하기로 하면, 구는 다음과 같은 저항을 받는데,

$$X = 4\pi\rho U^2a^2\gamma\left(\frac{1}{\beta^3}+\frac{\gamma}{\beta(\beta^2-1)^2}\right), \tag{25}$$

여기서 $\gamma \ll 1$임을 가정할 수 있다.

저항을 $\pi\rho U^2a^2$으로 무차원화하여 저항계수 C_X를 정의하기로 하면 다음을 얻는다.

$$C_X = 4\gamma\left(\frac{1}{\beta^3}+\frac{\gamma}{\beta(\beta^2-1)^2}\right). \tag{26}$$

이 식 우변 괄호 안의 첫째 항은 구의 중심으로부터 흡입점이 얼마나 떨어져 있느냐에 따라 결정되며, 둘째 항은 흡입점의 세기와 식 (22) 아래에서 언급한 바와 같이 흡입점과 그 역점 사이의 거리의 제곱에 반비례하여 결정된다.

다음으로 균일유동 중에 쌍극점이 x축 상의 점 B, 원점으로부터 거리 $b>a$인 곳에 있다고 하면, 기본유동에 대한 유량함수는 식 (5), (7)로부터 다음과 같이 얻는다.

$$\psi(r,\theta) = \frac{U}{2}r^2\sin^2\theta-\mu\frac{\sin^2\theta_1}{r_1}\,. \tag{27}$$

먼저 위 식 우변의 둘째 항을 (r,θ)의 함수로 다음과 같이 쓸 수 있으므로,

$$\frac{\sin^2\theta_1}{r_1} = \frac{R^2}{r_1^3} = \frac{r^2\sin^2\theta}{r_1^3}\,, \tag{28}$$

식 (16)을 사용하여, 버틀러 구 정리의 식 (8) 우변의 둘째 항 ψ_1에 대해 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -\frac{r}{a}\psi\left(\frac{a^2}{r},\theta\right) \\ &= -\frac{Ua^3}{2r}\sin^2\theta + \frac{\mu a^3}{b^3}\frac{\sin^2\theta_2}{r_2}.\end{aligned} \tag{29}$$

여기서 마지막 등호를 얻는 데는 $R^2 = r^2\sin^2\theta = r_2^2\sin^2\theta_2$를 이용하였다.

이 결과를 버틀러 구 정리의 식 (8)에 대입하고 정리하면 전체 유동에 대한 유량함수를 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{aligned}\varPsi(r,\theta) = &\frac{U}{2}\left(r^2 - \frac{a^3}{r}\right)\sin^2\theta - \mu\frac{\sin^2\theta_1}{r_1} \\ &+ \frac{\mu a^3}{b^3}\frac{\sin^2\theta_2}{r_2}.\end{aligned} \tag{30}$$

위 식 우변의 첫째 항은 균일유동 중에 구가 있을 때의 유량함수이고, 둘째 항은 쌍극점, 셋째 항은 쌍극점의 경상에 상응하며, 식 (7)로부터 알 수 있는 바와 같이 경상은 역점에 위치한 세기 $-\dfrac{\mu a^3}{b^3}$의 쌍극점이다.

쌍극점의 세기를 고려하고, 확장된 라갈리 정리를 사용하면 위에서 고려한 구는 다음과 같은 x 방향의 힘, X를 받는다.

$$X = 4\pi\mu\rho\left(-\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)_B. \tag{31}$$

u_i는, 식 (30)의 우변에서 쌍극점을 제외한 부분을 ψ_i라고 하면, 식 (20)을 사용하여 얻을 수 있고, 따라서 먼저 $\psi_i(x,R)$을 구하면 식 (30)으로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\psi_i(x,R) = &\frac{U}{2}R^2 - \frac{Ua^3}{2}\frac{R^2}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}} \\ &+ \frac{\mu a^3}{b^3}\frac{R^2}{\left\{(x-c)^2+R^2\right\}^{3/2}}.\end{aligned} \tag{32}$$

이를 식 (20)에 대입하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}u_i(x,R) = &U - \frac{Ua^3}{2}\frac{2x^2-R^2}{\left(x^2+R^2\right)^{5/2}} \\ &+ \frac{\mu a^3}{b^3}\frac{2(x-c)^2-R^2}{\left\{(x-c)^2+R^2\right\}}.\end{aligned} \tag{33}$$

위 식 우변의 첫째 항은 균일유동, 둘째 항은 구에 상응하는 원점에 위치한 쌍극점, 그리고 셋째 항은 경상인 역점에 위치한 쌍극점에 의해 유동장 내부의 점에 유기된 x 방향 속도 성분이다.

식 (33)을 x에 대해 편미분하고 점 B에서의 값을 구하면, 다음을 얻는데,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)_B &= 3U\frac{a^3}{b^4} - 6\mu\frac{a^3}{b^3(b-c)^4} \\ &= 3U\frac{a^3}{b^4} - 6\mu\frac{a^3 b}{\left(b^2-a^2\right)^4},\end{aligned} \tag{34}$$

이 식 첫째 등호 뒤의 둘째 항에 따르면 경상 쌍극점에 의한 영향은 점 B와 역점 사이의 거리 $(b-c)$의 4승에 반비례한다.

무차원 변수 β를 사용하여 위 식을 다시 쓰면 다음을 얻으며,

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)_B = \frac{3U}{b}\frac{1}{\beta^3} - \frac{6\mu}{b^4}\frac{\beta^5}{\left(\beta^2-1\right)^4}, \tag{35}$$

이 식을 식 (31)에 대입하여 구에 작용하는 힘을 다음과 같이 얻는다.

$$X = 12\pi\mu\rho\left\{-\frac{U}{b}\frac{1}{\beta^3} + \frac{2\mu}{b^4}\frac{\beta^5}{\left(\beta^2-1\right)^4}\right\}. \tag{36}$$

선미에서 유체를 가속시키는 물체를 생각하고, 쌍극점의 세기를 나타내는 무차원량 $\varGamma \ll 1$를 사용하여, $\mu = -Ua^3\varGamma$로 놓기로 하면, 구가 받는 저항은 다음과 같다.

$$X = 12\pi\rho U^2 a^2\varGamma\left\{\frac{1}{\beta^4} + \frac{2\varGamma\beta}{\left(\beta^2-1\right)^4}\right\}. \tag{37}$$

앞에서와 같이 $\pi\rho U^2 a^2$으로 무차원화된 저항계수 C_X를 사용하기로 하면 다음을 얻는다.

$$C_X = 12\varGamma\left\{\frac{1}{\beta^4} + \frac{2\varGamma\beta}{\left(\beta^2-1\right)^4}\right\}. \tag{38}$$

이 식 우변 괄호 안의 첫째 항은 구의 중심으로부터 쌍극점이 얼마나 떨어져 있느냐에 따라 결정되며, 둘째 항은 쌍극점의 세기와 식 (34) 아래에서 언급한 바와 같이 쌍극점과 그 역점 사이의 거리의 4승에 반비례하여 결정된다.

4. 선도항 근사

앞 장에서 얻은 결과들은 엄밀해이므로, 그 형태가 복잡하여

쓰기에 불편하므로 이 장에서는 대부분의 부가물이 선체에 바로 붙어 있는 점을 고려하여 다음과 같은 가정을 도입하여,

$$\frac{b}{a} \equiv \beta = 1 + \delta\,,\ \delta \ll 1\,, \tag{39}$$

식 (26)과 (38)에 대한 선도항 근사를 얻기로 한다.

균일유동 중에 놓인 구 뒤의 흡입점에 기인하여 구가 받는 저항에 대해, 식 (26)으로 주어진 저항계수에 식 (39)를 대입하여 최저차 항만 취하면 다음을 얻는데,

$$C_X = 4\left(\gamma + \frac{\gamma^2}{4\delta^2}\right), \tag{40}$$

이 식에 따르면 저항계수는 $\sigma = \gamma/\delta$ 의 크기에 따라 다른 특성을 가진다. 다시 말하면 흡입점의 세기와 흡입점이 물체에 얼마나 가깝게 있는가 하는 정도, 즉 근접도(proximity)의 비(ratio)에 따라 다른 특성을 가진다.

σ 를 사용하여 식 (40)을 다시 쓰면 다음을 얻는데,

$$C_X = 4\gamma + \sigma^2, \tag{41}$$

$\gamma \ll 1$임을 상기하면,

1) $\sigma = o\left(\sqrt{\gamma}\right)$ 인 경우, 즉 $\delta \gg \gamma$ 인 경우에는 위의 식 우변의 첫째 항이 지배적인 항이며,
2) $\sigma = O\left(\sqrt{\gamma}\right)$ 인 경우, 즉 $\delta \sim \sqrt{\gamma}$ 인 경우에는 위의 식 우변의 두 항이 비슷한 크기를 가지고,
3) $\sigma = O(1)$ 인 경우, 즉 $\delta \sim \gamma$인 경우에는 위의 식 우변의 둘째 항이 지배적인 항임을 알 수 있다.

위의 사실을 종합하면 δ가 클수록 식 (40) 우변의 첫째 항이 지배적이 되며, 이는 물리적으로도 타당한 결과이다. 첫째 항은 원점에 위치하는 쌍극점에 의해 점 B에 유기된 속도 성분에 기인하는 항이므로, 부가물의 위치에 상관없이 결정되는 양이다.

흡입점의 위치가 물체로부터 조금 떨어져 있을 때는 물체를 원점에 위치한 쌍극점으로 근사할 수 있으며, 한편 흡입점이 물체에 가까워지면 역점에 위치한 흡입점의 영향이 점차적으로 지배적이 되므로 이에 대한 적절한 고려를 해야 할 것이다.

균일유동 중에 놓인 구 뒤의 쌍극점에 기인하여 구가 받는 저항에 대해, 식 (38)로 주어진 저항계수에 식 (39)를 대입하여 최저차 항만 취하면 다음을 얻는데,

$$C_X = 12\left\{\varGamma + \frac{\varGamma^2}{8\delta^4}\right\}, \tag{42}$$

이 식에 따르면 저항계수는 $\varSigma = \varGamma/\delta^2$ 의 크기에 따라 다른 특성을 가진다. 앞에서 고려한 흡입점(음의 용출점)은 유량을 흡입(분출)하는 성질을 가지고 있으므로, 실제의 부가물을 나타내기에는 상대적으로 센 특이점이라고 할 수 있다. 한편, 체적을 가진 부가물을 근사하는 다극점으로는 쌍극점이 적절하다고 할 수 있는데, 이 경우에는 앞에서 고려한 흡입점의 경우와는 달리 물체로부터 떨어진 거리의 제곱이 $\varSigma$ 를 결정하는 인자가 된다.

$\varSigma$ 를 사용하여 식 (42)를 다시 쓰면 다음을 얻는데,

$$C_X = 12\,\varGamma + \frac{3}{2}\varSigma^2, \tag{43}$$

흡입점에 대해서와 마찬가지로, $\varGamma \ll 1$이므로,

1) $\varSigma = o\left(\sqrt{\varGamma}\right)$ 인 경우, 즉 $\delta \gg \sqrt{\varGamma}$ 인 경우에는 위의 식 우변의 첫째 항이 지배적인 항이며,
2) $\varSigma = O\left(\sqrt{\varGamma}\right)$ 인 경우, 즉 $\delta \sim \varGamma^{1/4}$ 인 경우에는 위의 식 우변의 두 항이 비슷한 크기를 가지고,
3) $\varSigma = O(1)$ 인 경우, 즉 $\delta \sim \sqrt{\varGamma}$ 인 경우에는 위의 식 우변의 둘째 항이 지배적인 항임을 알 수 있다.

쌍극점에 대해서도 흡입점에 대한 결론과 유사한 결론을 얻으며, 단 흡입점에 대해 $\delta \sim \gamma$일 때 역점에 위치한 특이점의 영향이 지배적임에 반해, 쌍극점의 경우에는 $\delta \sim \sqrt{\varGamma}$ 일 때 그러함을 알 수 있다. $\gamma \ll 1$, $\varGamma \ll 1$이므로, $O(\gamma) = O(\varGamma)$ 일 때, $\sqrt{\varGamma} \gg \gamma$ 임을 고려하면, 쌍극점의 경우 상대적으로 더 먼 거리부터 역점의 영향이 지배적이 되는데, 이와 같은 사실은 흡입점에 의한 영향이 거리의 제곱에 반비례하는 반면, 쌍극점에 의한 영향은 거리의 4승에 반비례하여 증가하므로, 물체로부터 떨어진 거리가 작을 경우에는 쌍극점이 상대적으로 더 큰 힘을 가하기 때문인 것으로 이해할 수 있다.

5. 결 론

이상으로 임의 형상의 물체를 구로, 물체 뒤의 부가물을 특이점으로 각각 근사한 경우에 대해, 축대칭 유동에 대해서는 유량함수를 사용하고, 확장된 라갈리 정리를 사용하여 구에 작용하는 힘을 얻었다. 물체와 부가물 사이의 거리가 매우 작다는 가정, 즉 $\delta \ll 1$의 가정을 도입하여 무차원량인 저항계수에 대해 최저차 근사를 얻었으며, 흡입점과 쌍극점에 대해 체계적으로 매우 유사한 결론을 얻었으나, 다극점의 차수(order)에 따라 그 영향이 다름을 알 수 있었다.

부가물의 크기는 물체의 크기에 비해 매우 작으므로, 즉 $\gamma \ll 1$, $\varGamma \ll 1$ 을 가정할 수 있고, 흡입점에 대해서는 $\delta \sim \gamma$, 쌍극점에 대해서는 $\delta \sim \sqrt{\varGamma}$ 이면, 역점에 위치한 경상의 효과가 지배적이 됨을 알 수 있었다. 실제 부가물은 쌍극점에 가까우므로, 따라서 실제 부가물에 대해서는 $\delta \sim \sqrt{\varGamma}$ 이면, 경상의 효과가 지배적이라는 결론을 얻는다.

References

Lee, S.J., 2010a. Characteristics of forces upon two-dimensional circular cylinder by external singularities. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 47(6), pp.782-786.

Lee, S.J., 2010b. Forces due to external singularities upon 2- and 3-dimensional bodies. *Proceedings of 9th International Conference on Hydrodynamics*, Shanghai, China, 11-15 October, 2010.

Milne-Thomson, L.M., 1968. *Theoretical hydrodynamics*. 5th Ed. Macmillan & Co: London.

Yih, C.S., 1969. *Fluid mechanics*. McGraw Hill Book Company: New York.

부 록: 확장된 라갈리 정리의 증명

이상유체의 비회전성 유동에 대한 베르누이 방정식을 적용하기로 하고, 물체 표면에 작용하는 일정한 크기의 압력은 그 합력이 영이므로, p 는 수동압(hydrodynamic pressure), p_0 는 무한원방에서의 압력이라고 하면, 물체의 표면에 작용하는 압력은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{u \cdot u}{2}. \tag{A1}$$

먼저 다음과 같은 양을 정의하는데,

$$\underline{J} = -\hat{n}\frac{u \cdot u}{2} + \underline{u}(\underline{u} \cdot \hat{n}), \tag{A2}$$

여기서 $\hat{n}$ 은 유동장으로부터 바깥을 향하는 단위 법선 벡터이며, S_0는 물체를 나타내고, S_1은 점 B에 위치한 단위 세기를 가지는 용출점 주위의 반경 ϵ인 구이며, S_2는 반경이 무한대인 구이다(Fig. A 참조). 이들 표면으로 이루어지는 유동장에 대해 $\underline{J}$의 적분을 취하면 Gauss 정리에 의해 다음을 얻는다.

$$\sum_{k=0}^{2}\int_{S_j}\underline{J}dS = \int_V \{-\nabla(\underline{u}\cdot\underline{u})/2 + \nabla\cdot(\underline{u}\underline{u})\}dV. \tag{A3}$$

이 식 우변 피적분 함수에 대해 $\nabla \cdot \underline{u} = 0$, $\nabla \times \underline{u} = \underline{0}$ 을 이용하여 체적적분은 영임을 보일 수 있으므로, 결국 다음을 얻는다.

$$\int_{S_0+S_1}\underline{J}dS = -\int_{S_2}\underline{J}dS. \tag{A4}$$

$\hat{i}$ 를 x 방향, $\hat{e}_r$ 을 반경 방향의 단위 벡터라고 하면, 무한원방에서는 $\underline{u} = U\hat{i} + \left(\hat{e}_r/r^2\right)$ 을 가정할 수 있으므로, S_2 상에서의 적분에 대해 다음을 얻는다.

$$\int_{S_2}\underline{J}dS = \int_{S_2}\frac{U}{r^2}r^2 d\Omega\,\hat{i} = 4\pi U\hat{i}, \tag{A5}$$

여기서 $d\Omega$ 는 미소 입체각(solid angle)이다.

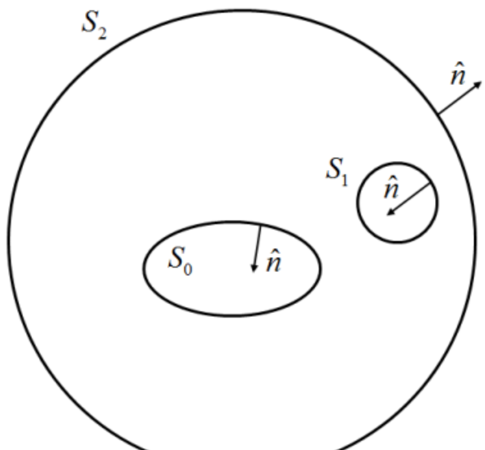

Fig. A 확장된 Lagally 정리

또한, S_0에 대한 적분은 $\underline{F}/\rho$임을 보일 수 있으므로, 이들 결과를 식 (A4)에 대입하여 다음을 얻는다.

$$\frac{\underline{F}}{\rho} = -\int_{S_1}\underline{J}dS - 4\pi U\hat{i}. \tag{A6}$$

$\underline{u}_i$를 용출점에 기인하는 속도 성분을 제외한 점 B에서의 속도라고 하면, S_1 상에서는 $\underline{u} = \underline{u}_i + \left(\hat{e}_r/r^2\right)$ 이 성립하므로, S_1 상에서의 적분에 대해 다음을 얻는다.

$$\int_{S_1}\underline{J}dS = -\int_{S_2}\frac{\underline{u}_i}{r^2}r^2 d\Omega = -4\pi\underline{u}_i. \tag{A7}$$

이를 식 (A6)에 대입하여 본문 중의 식 (9)를 얻는다.

$$\underline{F} = 4\pi\rho\left(-U\hat{i} + \underline{u}_i\right). \tag{A8}$$

쌍극점의 세기 $\mu = m\epsilon$라고 하고, 쌍극점을 구성하는 용출

점과 흡입점에 대해 따로 생각하기로 한다. 용출점에 쌍극점에 기인하는 것을 제외하고 유기된 속도를 $\underline{v}$ 라고 하면 식 (A8)에 의해 용출점에 기인하여 물체에 작용하는 힘 $\underline{F}_1$ 은 다음과 같다.

$$\underline{F}_1 = 4\pi\rho m\left(-U\hat{i} + \underline{v} - \frac{m}{\epsilon^2}\hat{e}_d\right). \tag{A9}$$

한편, 흡입점 자신에 기인하는 것을 제외하고 흡입점에 유기된 속도 $\underline{v}_2$ 는 다음과 같다.

$$\underline{v}_2 = \underline{v} - \epsilon\left(\hat{e}_d \cdot \nabla\right)\underline{v} - \frac{m}{\epsilon^2}\hat{e}_d. \tag{A10}$$

여기서 $\left(\hat{e}_d \cdot \nabla\right)\underline{v}$ 는 쌍극점에서 계산된 값이다. 흡입점에 기인하여 물체에 작용하는 힘 $\underline{F}_2$ 는 다음과 같으므로,

$$\underline{F}_2 = -4\pi\rho m\left(-U\hat{i} + \underline{v} - \epsilon\left(\hat{e}_d \cdot \nabla\right)\underline{v} - \frac{m}{\epsilon^2}\hat{e}_d\right), \tag{A11}$$

쌍극점에 기인하여 물체가 받는 힘은 $\underline{F}_1 + \underline{F}_2$ 의 $m \to \infty$, $\epsilon \to 0$ 에 대한 극한으로부터 본문의 식 (10)과 같이 얻는다.

최 진 영

이 승 준