대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 2, 191 ~ 205. May 2017

기하증명과제에서 나타나는 중학교 1학년 학생들의 증명스키마와 그 특징

변 규 미* · 장 경 윤**

본 연구는 서울의 C중학교 1학년 학생들이 기하 증명 문제를 해결하는 과정에서 보여주는 증명스키마 유형과 그 특징을 조사한 것이다. 자료 분석은 Harel, & Sowder의 증명스키마 유형에 기초하여 이루어졌다. 연구 결과, 학업성취수준에 따라 학생들이 사용하는 증명스키마 유형에 차이가 있었다. 상위권에서 하위권으로 갈수록 변형적 증명스키마를 사용하는 학생의 비율이 감소하였고 귀납적(측정) 증명스키마를 사용하는 학생의 비율은 증가하였다. 또한 증명과정에서 비형식적인 부호 사용하기, 문제에서 주어진 그림 특정 비율로 인식하기 등 각 증명스키마 유형마다 고유한 특징이 나타났다. 이를 바탕으로 4개의 의미 있는 결론을 추출하였고, 이것이 증명 교수·학습에 주는 시사점을 논의하였다.

I. 서 론

수학교육은 지식뿐 아니라 수학적 사고를 가르치는 것에도 목적을 두어야 한다. 증명은 학생들의 연역적 추론 능력 개발과 수학적 이해를 요구하는 활동이라는 점에서 학교 수학에서 중요한 위치를 차지한다. 최근 NCTM(2000)도 추론 및 증명활동의 중요성을 역설하고 이것을 수학 수업의 주요 규준으로 규정하고 있다.

그동안 국내외 여러 연구에서 증명 교육에 대한 어려움이 보고되었다(Chazan, 1993; Harel, & Sowder, 2007; Healy, & Hoyles, 2000; 권성룡, 2003; 나귀수, 1998 등). 학교 수학에서 이루어지는 전반적인 증명 수업은 교사의 시범, 학생들의 모방, 암기의 패턴으로 이루어지고 있으며(박은조, 방정숙, 2005), 학생들은 증명의 필요성을 이해하지 못한 채 피상적으로 증명 학습을 하는 것으로 알려져 있다(강정기, 노은환, 2013).

학생들의 증명 수행과 증명 개념 인식에 관한 자료는 증명 관련 교수·학습 개선을 위한 중요한 기초자료로 활용될 수 있다. 일반적인 수학 수업은 다양한 성취도를 가진 학생들의 참여로 이루어지기 때문에 교사는 그것을 고려하여 교수계획을 세울 필요가 있다. 특히, 학생들의 학업성취도 수준에 따라 매우 다른 양상으로 나타나는 증명 수행은 증명 학습 개선을 위한 중요한 단서가 될 수 있다(Heinze, A., & Reiss, K, 2009).

우리나라 수학교육에서 중학교 1학년 과정은 경험적, 비형식적인 증명에서 형식적인 증명으로 넘어가는 과도기라 할 수 있다. 초등학교에서는 주로 실험, 측정 등의 활동으로 수학적 추측, 결과를 확인하는 반면 중학교 1학년부터 문자가 도입되고 대수적 증명이 가능해진다. 이를 바탕으로 중학교 2학년 때 논증기하를 통한 형식적

* 건국대학교 대학원, oneisgm@sen.go.kr (제1 저자)
** 건국대학교, kchang@konkuk.ac.kr (교신저자)

인 증명에 입문하게 된다. 따라서 형식적 증명 지도가 이루어지기 전인 중학교 1학년생의 증명 수행과 그 특징의 분석을 통해 이후 형식적인 증명 지도를 위한 유용한 정보를 얻게 될 것이다.

이에 본 연구자는 Harel, & Sowder(1998, 2007)의 증명스키마 개념을 차용하여 중학교 1학년 학생들의 증명스키마를 분석하고 이를 통하여 증명 지도를 위한 시사점을 얻고자 한다. 본 연구를 위한 연구 문제는 다음과 같다.

연구 문제1. 학업성취수준에 따라 중학교 1학년 학생들의 증명스키마 유형이 차이가 있는가?

연구 문제2. 각 증명스키마 유형에서 나타나는 특징은 무엇인가?

II. 이론적 배경

이 장에서는 Harel, & Sowder(1998, 2007)의 증명스키마 개념과 그 유형에 대해 살펴보고, 학생들의 증명 혹은 정당화 유형을 조사한 연구들을 검토하고자 한다.

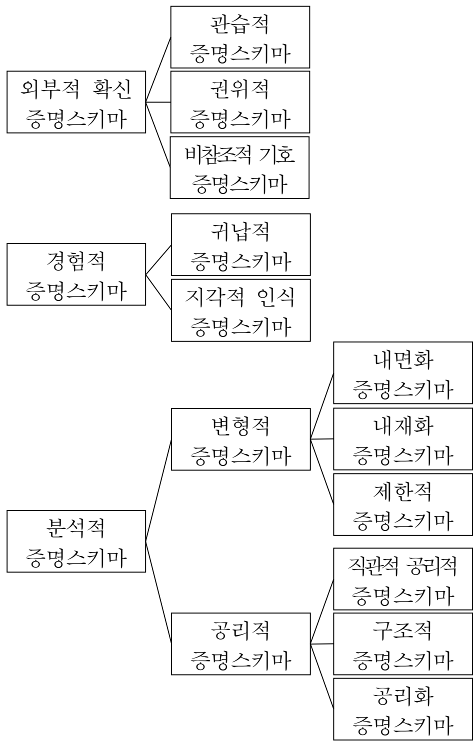
1. Harel, & Sowder의 증명스키마

증명이란 "어떤 사항 또는 판단 등이 참인지 혹은 정당한지 보여주는 것"으로(Dictionary, M. W., 2006) 수학자들 사이에서 증명은 어느 정도 통일된 의미를 가지고 있다. 그러나 아직 전공 수학자 수준의 수학을 하지 못하는 초, 중등학생이나 학부생에게 '증명을 한다는 것'은 그들이 가지고 있는 수학적 배경지식, 수학적 능력, 문화적, 상황적 배경에 따라 다를 수밖에 없다.

이에 Harel, & Sowder(1998)는 학습자 관점에서 증명에 대한 개념을 표현하기 위해 증명스키마(proof scheme)라는 용어를 도입하고 "자신 또는 타인을 설득하고 규명하도록 구성하는 것"을 증명스키마라고 정의했다.

2. 증명스키마 유형

Harel, & Sowder(1998)의 증명스키마 유형은 Harel이 직접 교사로 참여하고 수년간 교실 관찰, 인터뷰, 지필 평가 방법 등을 이용하여 중·고등학생 및 학부생들의 증명을 분석한 결과이다([그림 II-1]참조). 증명스키마의 각 유형은 위계적이지 않으며 한 사람이 한 개 이상의 서로 다른 증명스키마를 가지고 있을 수 있다. 또 상황에 따라서 다른 증명스키마를 사용할 수도 있다.



[그림 II-1] Harel, & Sowder의 증명스키마

[그림 II-1] Harel, & Sowder의 증명스키마 유형에 대한 자세한 설명은 다음과 같다(Harel, &

Sowder, 1998, pp. 234-283; Harel, & Sowder, 2007; pp. 805-842).

가. 외부적 확신(External conviction) 증명스키마

외부적 확신 증명스키마란 어원 그대로 자신을 확신시키거나 다른 사람들에게 설명하기 위해서 사용되는 요인이 외부에 의존할 때 나타나는 증명스키마이다. 세부적 유형으로는 관습적 증명스키마, 권위적 증명스키마, 비참조적 기호 증명스키마가 있다.

관습적(Ritual) 증명스키마는 어떤 주장에 대한 판단이 증명 내용의 타당성보다는 그 증명이 가지고 있는 양식, 겉 표현에 의존할 때 나타나는 증명스키마이다. 가령 미국 기하 증명의 관습은 증명을 이단 형식의 명제와 근거들로 쓰는 것과 관련이 있다(Herbst, 2002).

권위적(Authoritarian) 증명스키마는 어떤 명제의 참에 대하여 확신을 하게끔 한 요인이 '교과서에 나온 명제여서' 또는 '교사에 의해 언급된 명제라서'와 같이 특정한 권위에 의존할 때 가지고 있는 증명스키마이다.

비참조적 기호(Non referential symbolic) 증명스키마는 올바르지 않은 기호적 추론에 의해 명제가 증명되는 것을 의미한다. 물리적인 양이나 실제적인 관념이 배제된 의미 없는 기호 조작은 증명을 하는데 있어서 도움이 되지만, 이 증명스키마의 경우에는 기호 조작 체계를 무시한 채 기호 조작을 수행하는 것을 의미한다.

나. 경험적(Empirical) 증명스키마

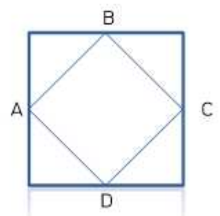
경험적 증명스키마는 물리적인 사실이나 감각적인 경험에 의하여 어떤 명제를 정당화하거나 부정할 때 나타나는 증명스키마이다. 하위영역으로는 귀납적 증명스키마와 지각적 인식 증명스키마가 있다.

귀납적(Inductive) 증명스키마는 하나 이상의 특정한 경우에서 정량적인 측정으로 명제의 참을 판단할 때 나타나는 증명스키마이다.

지각적 인식(Perceptual) 증명스키마는 어떤 명제의 참, 거짓을 판단할 때 그 명제의 내용에 해당하는 이미지를 형성하지만 그것을 변형하는 능력이나 변형된 결과를 예측하는 능력이 부족한 경우를 이르는 증명스키마이다. 다음은 지각적 인식 증명스키마를 가지고 있는 학생의 사례이다.

<표 II-1> 지각적 인식 증명스키마 사례(Harel, & Sowder, 1998, p. 257)

'A, B, C, D가 한 평행사변형의 네 변의 중점들일 때, □ABCD는 항상 어떤 도형이겠는가'의 문제에 Melissa는 다음과 같이 사각형을 그리고 □ABCD는 정사각형이 될 수밖에 없다고 답변하였다.



다. 분석적(Analytic) 증명스키마

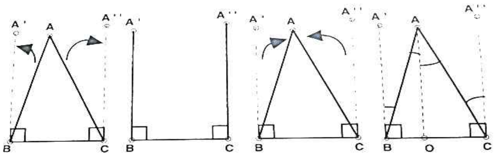
분석적 증명스키마는 논리적, 연역적인 수단에 의해 명제를 정당화하는 것을 의미한다. 분석적 증명스키마의 하위 증명스키마로는 변형적 증명스키마, 공리적 증명스키마가 있다.

변형적(transformational) 증명스키마는 연역적 수단에 의하여 이미지를 변형하거나 주어진 상황을 일반화하는데 초점을 두어 명제를 정당화할 때 나타나는 증명스키마이다. 여기서 이미지의 변형은 기하에서 도형의 변형, 대수에서 식의

변형 모두를 포함한다. Harel, & Sowder(1998)는 변형적 증명스키마를 가지고 있는 학생들 안에서 존재하는 인지 수준의 차이, 증명을 수행하는 데 있어서 다소 제한적인 사고 등을 표현하기 위해 더 세부적인 증명스키마로 구분하였다.[1] 다음은 변형적 증명스키마를 사용하여 '삼각형의 내각의 합이 180°'임을 증명한 사례이다.

<표 II-2> 변형적 증명스키마의 사례
(Harel, & Sowder, 1998, p. 259)

Amy는 다음과 같이 삼각형의 변의 위치를 변형하는 사고 실험을 통해 '삼각형의 내각의 합이 180°' 임을 보였다.



공리적(axiomatic) 증명스키마란 수학적 증명이 무정의 용어와 증명 없이 받아들인 공리들을 바탕으로 이루어진다는 것을 인지하는 증명스키마이다. 공리적 증명스키마를 가지고 있는 학생은 무정의 용어와 정의된 용어의 차이를 알며 증명 없이 받아들인 공리와 공리로부터 파생된 정리를 구분할 줄 안다. 이때, 직관적인 공리만을 수용하고 그 공리들로 이루어진 구조만을 이해하는 다소 제한적인 증명스키마를 Harel, & Sowder (1998)는 직관적-공리적(intuitive-axiomatic) 증명스키마라고 명명하였다. 공리 체계 자체보다 그 공리들의 집합으로 이루어진 구조에 초점을 두는 증명스키마를 구조적(Structural) 증명스키마로 정의하였고, 특정한 구조를 이루는 공리들을 탐구 대상으로 삼으며 공리들이 변함에 따라 구조가 어떻게 변화하는지 조사할 수 있는 단계를 공리화(axiomatizing) 증명스키마로 명명했다.

이상의 Harel, & Sowder(1998)의 증명스키마 개념은 단순히 학생들의 증명 양식, 외형적인 형태뿐만 아니라 증명을 하는 과정에서 작용하는 학생들의 인지적인 특성까지 다루었다는 점에서 가치가 있으며 증명에 유창하지 않은 학습자들의 증명 활동을 분석하고 연구하는데 유용한 개념이라 판단된다. 또한 각 증명스키마 유형은 중·고등학생 및 학부생들을 대상으로 한 관찰에 기반을 두어 범주화되었기 때문에 상당히 포괄적이며 각 유형의 하위 범주도 체계적으로 정교화 되어 있으므로 우리나라 중학생들에게도 적용 가능한 것으로 생각된다. 현재 Harel, & Sowder(1998)의 증명스키마는 동·서양을 막론하고 증명과 관련된 많은 연구들에 활발히 이용되고 있다(박은조, 방정숙, 2005; 김정하, 강문봉, 2009; 김은미, 2010; 이경언, 2014; AVR Rodríguez, 2006; Housman, & Porter, 2003; Harel, 2002 등).

본 연구에서는 학생들의 증명 이해를 분석하기 위하여 Harel, & Sowder(1998)의 증명스키마 개념과 그 유형을 활용하고자 한다. 그 이유는 연구 대상이 아직 형식적 증명에 능숙하지 않은 학습자이기 때문에 다소 비형식적인 정당화까지 증명의 범주에 포함하는 Harel, & Sowder(1998)의 증명스키마 개념이 연구 분석에 적합하다고 판단했기 때문이다. 또한 증명스키마 개념이 학생들의 증명 형태뿐만 아니라 증명 과정에서 나타나는 그들의 인지작용을 설명하는데 용이하다는 점에서 이 분석틀을 선택했다.

2. 학생들의 증명에 관한 선행 연구

1) Harel, & Sowder(1998, 2007)는 변형적 증명스키마의 유형을 내재화(interiorized) 증명스키마, 내면화(internalized) 증명스키마, 제한적 증명스키마로 나누었다. 또, 제한적 증명스키마는 맥락적(Contextual) 증명스키마, 일반적(Generic) 증명스키마, 구성적(Constructive) 증명스키마의 세부 유형으로 나뉜다.

가. 초등학생들을 대상으로 한 연구

초등학생들의 증명 또는 정당화에 대한 연구로는 권성룡(2003), 김정하(2010), 서지수, 류성림(2012), Maher(2005) 등이 있다.

김정하(2010)는 초등학교 6학년 학생(449명)들을 대상으로 정당화 유형과 정당화의 역할에 대한 인식을 조사하였다. 연구 결과, 초등학생들은 정당화의 역할을 어떤 명제에 대한 개인의 확신이라고 생각하고 있었다. 또 외적 확신에 의한 정당화보다는 포괄적 예에 의한 연역적 정당화, 단순 연역적 정당화를 더 많이 하였다.

서지류, 류성림(2012)은 초등학교 3학년 학생(62명)들을 대상으로 수와 연산, 도형 영역에서의 정당화 유형과 정당화 과정에서 관찰되는 오류 등을 조사하였다. 연구 결과, 수와 연산 영역보다 도형 영역에서의 경험적 정당화 비율이 더 높게 나타났다. 또 이미 학습한 내용에 관한 문제에서는 분석적 정당화 유형이 높게 나타나고, 그렇지 않은 내용에 관한 문제에서는 예를 이용한 경험적 정당화 유형이 높게 나타났다.

권성룡(2003)은 초등학교 5학년 학생(34명)들을 대상으로 그들의 정당화 유형을 살펴보았다. 연구 결과, 학생들의 정당화 유형은 외적 증명부터 연역적 증명까지 다양했다. 이에 같은 학년의 아동이지만 정당화 활동 능력에는 큰 차이가 있음을 밝혔다.

Maher(2005)는 초등학교 3학년 학생들을 대상으로 탑 쌓기 과제를 해결하며 보이는 학생들의 추론 과정을 조사하였다. 연구 결과 학생들은 반박에 의한 증명, 귀납법을 사용했으며 아동들도 타인과 의사소통하는 과정에서 수학적 증명과 같은 형식을 갖춘 논쟁을 할 수 있다는 가능성이 있음을 밝혔다.

요약하면 이상의 초등학생을 대상으로 한 연구에서 학생들이 사용하는 정당화 유형은 비교적 다양했고, 아직 형식적인 증명 지도를 받지 않았지만 일부 학생들은 어떤 영역에 한하여 연역적 정당화가 가능하였다. 위의 연구들은 초등학교 과정에서 훗날 형식적, 연역적 증명을 할 수 있는 준비과정으로써 비형식적인 것을 포함한 다양한 정당화 활동의 경험을 학생들에게 제공할 필요성이 있음을 시사하고 있다.

나. 중등이상 대학생을 대상으로 한 연구

중·고등학생의 증명 또는 정당화에 대한 연구로는 이경언(2014), 김정하(2011), 최남광(2008), Knuth et al.(2009) 등이 있다.

이경언(2014)은 대학교 과학영재교육원 중학생(20명)을 대상으로 요세푸스 문제에 기반을 둔 탐구과제를 이용하여 영재들의 정당화 유형과 특성을 Harel, & Sowder의 증명스키마에 기초하여 분석하였다. 연구 결과, 영재들은 규칙을 탐구하는 과정에서 직접 몇 개의 숫자를 대입해보거나(귀납적 증명스키마) 구체적인 그림을 그려보는 등(지각적 인식 스키마) 경험적 증명스키마의 측면을 가장 많이 보여주었다.

최남광(2008)은 중학교 2학년 영재학생들을 대상으로 공간기하과제 해결과정에서 나타나는 정당화 유형과 수학적 표현을 분석하였다. 경험적 정당화를 한 학생의 비율과 연역적 정당화를 한 학생의 비율의 비슷했으며, 학생들이 문제해결 과정에서 자신의 풀이를 시각적 표현에서 기호적 표현으로 발전시키는 모습을 관찰하였다.

김정하(2011)는 초등학교 5, 6학년(169명), 중학교 1, 2, 3학년(305명)을 대상으로 수학적 정당화에 대한 인식과 수학적 정당화의 단계를 조사하였다. 연구 결과, 낮은 성취 수준의 학생보다는 높은 수준의 학생들이 수학적 정당화에 대해 긍정적인 인식을 가지고 있었다. 단순 연역적 정당화의 비율은 증명을 학습한 후인 중학교 3학년

에서 가장 높게 나타났으며 같은 학년 안에서는 상위 수준으로 갈수록 단순 연역적 정당화가 더 높은 비율로 나타났다.

Knuth et al.(2009)은 CMP(Connected Mathematics Project)교육과정을 활용한 수업을 들은 중학생 (400명)들을 대상으로 수학적 정당화의 특성과 유형에 관한 연구를 하였다. 연구 결과 학생들은 증명, 특히 일반적인 논증을 만드는 것을 어려워 하였다. 대부분의 학생이 예에 의존한 정당화를 시도하였다. 상당수의 학생들은 일반적 논증을 시도한 후에도 예를 통해 자신의 논증을 보충 설명하는 경향이 있었다.

학부생, 수학 교사와 같은 전공자를 대상으로 한 연구로는 AVR Rodríguez(2006), Housman, & Porter(2003) 등이 있다.

AVR Rodríguez(2006)은 고등학교 수학교사 7명, 전공 대학원생 1명을 대상으로 역동적 기하 소프트웨어를 이용하여 문제를 해결하고 그 절차를 정당화할 때 나타나는 행동을 조사하였다. 연구 결과, 역동적 기하 소프트웨어 사용이라는 특수한 환경에 놓였을 때 연구대상들은 여러 증명스키마를 매우 일관적인 방식으로 사용했다. 주로 지각적 인식 증명스키마와 귀납적 증명스키마를 비슷한 정도로 사용하였고, 소프트웨어 사용은 변형적 증명스키마 중에서도 구성적 증명스키마 사용을 지원했다.

Housman, & Porter(2003)는 상위 학생들의 논증과 그 학생들이 새로운 수학적 개념을 학습할 때 사용하는 전략에서 어떤 패턴이 관찰 되는지 조사하고자 수학 전공 코스를 밟고 있는 상위권 대학생 11명을 대상으로 연구를 진행했다. 연구 결과, 일부 학생들에게서 두 개 이상의 증명스키마가 관찰되었다. 또 논증의 타당성을 주로 외부 요인에 의해 판단하는 한 학생은 예를 만들어내고 개념을 재구성하는데 성공적이지 못했다. 반면 연역적인 논증을 이해하고 수행할 수 있는 학생은 개념을 재구성하고 예를 활용하는 데 성공적이었음을 밝혔다.

이상의 선행연구들을 요약하면 많은 중, 고등 학생들이 형식적 증명을 하지 못하고 경험적 정당화 수준에 머물러 있는 것으로 나타났다. 연구 대상들은 자신이 처해 있는 특수한 상황, 환경에 따라서 다른 증명스키마를 사용하기도 하였으며, 현재 가지고 있는 증명스키마에 따라 타 영역에서 다른 학습 양상을 보이기도 하였다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구는 편의 표집 방법을 이용하여 연구 대상을 선정하였다. 연구 대상은 서울 C중학교 1학년 5학급(남녀 포함, 120명)이며 학생들은 중학교 1학년 과정에서 ‘문자와 식’, ‘기본 도형’ 등의 학습을 마친 상태였다. 따라서 참여 학생들은 본 연구에서 제시된 증명 과제를 해결하는데 필요한 내용들을 모두 학습했다고 볼 수 있다.

본 연구에서 학업성취도는 수학학업성취도를 의미한다. 2016학년도 1학기 기말고사 수학 성적을 기준으로 상위권(25%), 중상위권(25%), 중하위권(25%), 하위권(25%)로 분류하였다.

2. 검사 도구

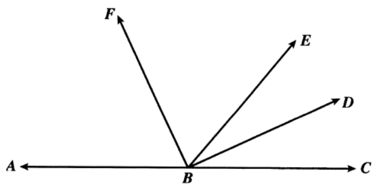
본 연구는 학생들의 증명 문제 해결 여부보다는 기하증명문제를 해결할 때 그들의 증명스키마 유형과 증명하는 과정에서 나타나는 특징을 파악하는데 초점을 두었다. 이에 본 연구자는 연구 참여자들이 증명을 하는데 있어서 문항에 제시된 용어와 내용으로 인해 겪는 어려움을 분석에서 배제하였다.

Herbst(2002)는 <표 III-1>의 문제에 진술된 명제의 가정과 결론이 비교적 명시적으로 드러나 있고 이 문제에서 정의가 적용되는 개념이 ‘직각’, ‘평각’ 뿐이어서 이 문항이 학생들의 증명 활동을 지원한다고 언급했다. 이에 <표 III-1>의 문항이 본 연구자의 의도와 부합하다고 판단하여 검사 도구로 선정하였다.

중학교 1학년 학생들은 교과서에서 증명 내용을 접하였지만 (예, 평행선의 성질을 이용하여 삼각형의 내각의 합이 180° 임을 보이는 것) 교육 과정상 ‘증명’이라는 용어 자체를 학습한 적은 없었다. 따라서 문항 내용 중 ‘증명하시오.’를 ‘설명하시오.’라는 문구로 대체하였다.

<표 III-1> 검사도구

다음과 같이 A, B, C 가 한 직선 위에 있다. $\angle ABF = \angle EBF$, $\angle EBD = \angle CBD$ 일 때, $\angle FBE + \angle EBD = 90^\circ$ 임을 설명하시오.



3. 자료 수집 및 분석

2016년 12월 중 본 연구자가 교사로 활동하는 각 학급의 수학 수업시간에 120명의 연구 참여자에게 검사 문항을 적용하였다. 학생들에게 최대한 자세하게 자신의 풀이 과정을 쓸 것을 요청했으며 풀이 시간에 특별히 제한을 두지 않았으나 대부분의 학생이 15분 내외로 과제를 해결하였다.

연구문제 1을 해결하기 위해 우선 수집한 자료인 연구 참여자의 풀이를 Harel, & Sowder (1998)의 증명스키마 유형별로 분류하였다. 1차 검토 결과 다음과 같이 6가지 유형으로 나누어졌다.

<표 III-2> 자료 분석 틀

증명스키마 유형	코드	분류 기준
변형적	T	가정을 문자식으로 표현하고 기호 조작을 통해 결론을 이끌어 냄. 또는 주어진 그림을 연역적 과정에 의해 변형하여 결론을 이끌어냄.
지각적 인식	P	문제에 주어진 특수한 그림에 의존하여 명제의 참을 판단함.
귀납적 (예)	I1	하나 이상의 수치적 예를 통하여 명제의 참을 판단함.
귀납적 (측정)	I2	도구를 이용한 측정 활동을 통해 명제의 참을 판단함.
권위적	A	교사나 교과서의 권위에 의존하여 명제의 참을 판단함.
인식 불가 또는 무응답	N	증명을 하려고 시도하였으나 전혀 상관없는 문장들을 적거나 아무 내용도 적지 않음.

이경언(2014), Housman, & Porter(2003) 등의 연구에서는 한 사람에게서 2개 이상의 증명스키마가 관찰되기도 하였는데 본 연구에서는 한 사람당 하나의 증명스키마가 관찰되었다. 이는 검사도구인 증명 문항의 난이도나 복잡성에 기인하는 것으로 보인다.

결과풀이만으로 학생들의 증명스키마 판단이 어려운 경우 해당 학생과의 간단한 인터뷰를 참고하였다. 이후 학업성취도에 따른 각 유형에 대한 도수 및 비율을 구하기 위해 정량 분석을 시행하였다. 학업성취도에 따른 증명스키마 유형의 차이가 유의미한지 알아보기 위해 χ^2검정을 실시하였다.

연구문제 2를 해결하기 위해 활동지에 적힌 학생 풀이에 대한 면밀한 질적 분석을 수행하였다. 이를 통해 각 증명스키마 유형별로 보이는 공통적인 특징을 추출하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 학생들의 증명스키마 유형

본 연구의 검사문항을 120명의 연구 참여자에게 조사한 결과는 <표 IV-1>과 같다.

연구 결과, 연구 참여자 120명 중 변형적 증명스키마(T)를 사용한 학생 46명(38%)으로 제일 많았으며 관련 없는 내용을 적거나 아예 무응답(N)을 한 학생이 35명(29%)이나 되었다. 귀납적(예) 증명스키마(I1)를 사용한 학생이 14명(12%), 귀납적(측정) 증명스키마(I2)를 사용한 학생이 12명(10%), 지각적 인식 증명스키마(P)를 이용한 학생이 11명(9%)로 그 뒤를 이었으며 단 두 명의 학생만이(2%) 권위적 증명스키마(A)를 사용한 것으로 나타났다.

본 연구에서는 학생들로부터 관습적 증명스키마가 관찰되지 않았는데 이는 중학교 1학년 과정이 아직 증명이라는 개념을 배우기 전이고 논증기하와 같은 형식적 증명지도가 이루어지기 전이기 때문이라 생각 된다. 또한 Harel, & Sowder의 증명스키마 개념은 미국 학생들을 대상으로 만들어진 것이기 때문에 문화적 요인에 기인한 현상으로도 볼 수 있다. 예를 들어 우리나라에서는 이단 형식 증명이 관습적이지 않다.

χ^2검정 결과, $\chi2 = 50.190$(p=0.000)으로 학업성취도에 따른 네 집단(상, 중상, 중하, 하)의 증명스키마유형이 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다.

학생들의 학업성취도 집단별로 볼 때, 상위권에서는 변형적 증명스키마(80%)를 사용한 학생이 제일 많았다. 지각적 인식 증명스키마(7%), 귀납적(예) 증명스키마(3%)가 그 뒤를 이었고, 관련 없는 내용을 적거나 무응답을 한 학생이 3명(10%) 있었다. 한편 귀납적(측정) 증명스키마와 권위적 증명스키마를 쓴 학생은 없었다.

중상위권에서는 변형적 증명스키마를 사용한 학생이 14명(46%)으로 여전히 제일 높은 비율을 차지했으나, 관련 없는 내용을 적거나 무응답을 한 학생이 6명(20%)으로 두 배 가량 증가하였다. 지각적 인식 증명스키마, 귀납적(예) 증명스키마, 귀납적(측정) 증명스키마를 사용한 학생이 각각 3명(10%), 5명(17%), 2명(7%)로 상위권보다 그 비율이 증가했고, 권위적 증명스키마를 사용한 학생은 없었다.

중하위권에서는 관련 없는 내용을 적거나 무응답을 한 학생이 13명(43%)으로 중상위권보다 2배 이상 증가하며 하위권 내에서 절반 가까이

<표 IV-1> 학업성취도에 따른 증명스키마 유형

학업성취도	증명스키마 유형							χ^2
	T	P	I1	I2	A	N	계(비율)	
상	24 (.80)	2 (.07)	1 (.03)	0 (.00)	0 (.00)	3 (.10)	30 (1.00)	50.190*** (p=0.000)
중상	14 (.46)	3 (.10)	5 (.17)	2 (.07)	0 (.00)	6 (.20)	30 (1.00)	
중하	6 (.20)	2 (.07)	5 (.17)	4 (.13)	0 (.00)	13 (.43)	30 (1.00)	
하	2 (.07)	4 (.13)	3 (.10)	6 (.20)	2 (.07)	13 (.43)	30 (1.00)	
전체	46 (.38)	11 (.09)	14 (.12)	12 (.10)	2 (.02)	35 (.29)	120 (1.00)	

*T: 변형적 , P: 지각적 인식, I1: 귀납적(예), I2: 귀납적(측정), A:권위적, N: 해석불가 및 무응답

차지했다. 변형적 증명스키마를 사용한 학생은 6명(20%)으로 중상위권에서보다 비율이 낮아졌지만, 중하위권에서 증명을 시도한 학생이 사용한 증명스키마 중 가장 높은 비율을 차지하였다. 그 다음으로는 귀납적(예) 증명스키마, 귀납적(측정) 증명스키마, 지각적 인식 증명스키마 순으로 나타났다. 한편 권위적 증명스키마를 사용한 학생은 없었다.

하위권에서는 중하위권에서와 마찬가지로 관련 없는 내용을 적거나 무응답을 한 학생이 13명(43%)으로 가장 높은 비율을 차지하였다. 그 다음으로는 귀납적(측정) 증명스키마, 지각적 인식 증명스키마, 귀납적(예) 증명스키마, 변형적 증명스키마 순으로 나타났다. 다른 집단과는 달리, 권위적 증명스키마를 사용한 학생이 2명(7%) 있었다.

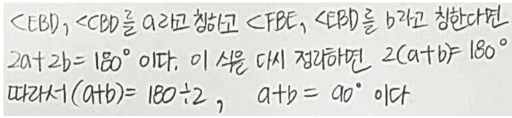
요약하면 변형적 증명스키마를 사용한 학생의 비율은 하위권에서 상위권으로 갈수록 증가하였다. 학업성취도는 여러 가지 요인이 복합적으로 작용하는 지표이다. 따라서 문제해결능력, 개인이 가지고 있는 수학 지식의 양, 수학적 추론능력, 수학에 대한 태도 등이 학생이 가지고 있는 증명스키마와 어떤 상관관계가 있음을 추측할 수 있다.

한편 상위권에서 하위권으로 갈수록 귀납적(측정) 증명스키마를 사용한 학생들의 비율은 증가하였는데, 이는 하위권에 속하는 학생들일수록 초등학교 과정에서 도구를 활용한 경험적 정당화 수준에 머물러 있을 확률이 높음을 시사한다. 또한 권위적 증명스키마를 사용한 학생이 하위권에서만 나타났다는 점과 하위권으로 갈수록 무응답의 비율이 증가했다는 사실은, 학업성취도가 낮을수록 증명의 기초적인 내용에 대한 인식이 낮다는 것뿐만 아니라 증명의 필요성을 인지하지 못하고 있음을 시사한다.

2. 각 증명스키마에서 나타나는 특징

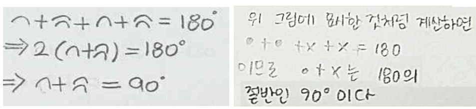
가. 변형적 증명스키마에서 관찰된 특징

변형적 증명스키마를 사용한 학생들의 풀이는 대부분 다음 [그림 IV-1]과 같이 문자를 사용하여 주어진 식을 표현하고 식의 변형을 통해 결론을 이끌어내는 과정이었다.



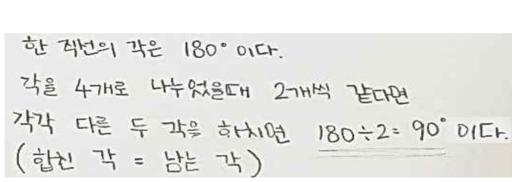
[그림 IV-1] 변형적 증명스키마(T)를 사용한 풀이

학생들의 풀이를 관찰한 결과, 많은 학생들이 a, b 혹은 x, y와 같은 문자뿐만 아니라 o, x 등의 비형식적인 부호를 사용한 것을 관찰할 수 있었다. 중학교 1학년 1학기 때 ‘문자와 식’ 단원에서 처음으로 문자를 배운다는 점을 감안할 때, 아직 문자사용에 익숙하지 않을 시기이므로 이와 같은 현상이 있음을 추측할 수 있다.



[그림 IV-2] 비형식적인 부호를 사용한 풀이

또한 [그림 IV-3]과 같이 문자를 사용하지 않고 구문으로 설명한 학생도 3명 있었다.



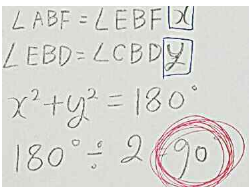
[그림 IV-3] 변형적 증명스키마(T) 중 구문 형태의 사례

<표 IV-2>는 변형적 증명스키마를 사용한 학생들의 문자사용 형태를 정리한 것이다. 초등학생들은 수학적 기호보다는 언어를 사용하여 정당화를 하는 반면(김정하, 2010), 본 연구에서는 변형적 증명스키마를 사용한 학생들 중 3명을 제외하고는 문자를 사용하여 증명을 시도했다. 이는 문자 학습이 학생들의 증명 양식에 영향을 끼쳤다고 볼 수 있는 부분이다.

<표 IV-2> 변형적 증명스키마(T)를 사용한 학생들의 문자사용 형태

반응 유형	학생수(명)	비율(%)
비형식적인 부호	15	32.61
a, b또는 x, y	17	36.96
$\angle FBE$, $\angle EBD$	11	23.91
문자사용 안함	3	6.52

간혹 식을 쓰고 변형을 하는 과정에서 오류를 보인 학생도 있었다. 비록 식을 조작하는 과정에서 오류가 나타났지만 인터뷰 결과 증명 상황의 본질을 알고 식의 변형을 통하여 결론에 도달하였다는 점에서 이와 같은 풀이를 비참조적 기호 증명스키마로 분류하지 않고 변형적 증명스키마로 분류하였다.



[그림 IV-4] 변형적 증명스키마(T)에서 나타난 오류

나. 지각적 인식 증명스키마에서 관찰된 특징

앞서 이론적 배경에서 언급했듯이 지각적 인식 증명스키마는 어떤 명제의 참, 거짓을 판단할 때 그 명제의 내용에 해당하는 이미지를 형성하지만, 그것을 변형하는 능력이나 변형된 결과를 예측하는 능력이 부족한 경우를 이르는 증명스키마이다.

본 연구에서는 문항에서 명제와 관련된 이미지가 제공되었기 때문인지 조건을 만족하는 다른 그림을 그려보는 학생들은 없었다. 하지만 이미지의 변형 과정 없이 특수한 하나의 그림에만 의존하여 명제의 참을 보였다는 점에서 학생들의 풀이는 일반성이 결여되어 있으며, 본질적으로 이는 <표 II-1> (Harel, & Sowder, 1998, p. 257)의 Melissa가 사용한 증명스키마와 같았다. 지각적 인식 증명스키마를 사용한 학생들의 대답은 <표 IV-3>과 같이 크게 3가지로 분류할 수 있었다.

<표 IV-3> 지각적 인식 증명스키마(P)의 유형

반응 유형	학생 수(명)	비율(%)
$\angle ABF : \angle FBE : \angle EBC$ =1:1:1 와 같다고 인식	4	36.36
$\angle FBD$가 직각으로 인식	6	54.55
$2\angle EBD = \angle FBE$로 인식	1	9.09

특이하게도 지각적 인식 증명스키마를 사용한 11명의 학생들 중 5명은 $\angle FBD$의 각도가 아닌, 주어진 그림의 특수한 각들 사이의 비를 짐작하여 증명을 시도했다. 이는 학생들에게 문제에서 주어진 그림 이외에 명제의 가정을 만족하는 극단적인 그림을 그려보게 하는 것이 그들의 증명스키마를 개선하는데 도움이 될 수 있음을 시사한다.

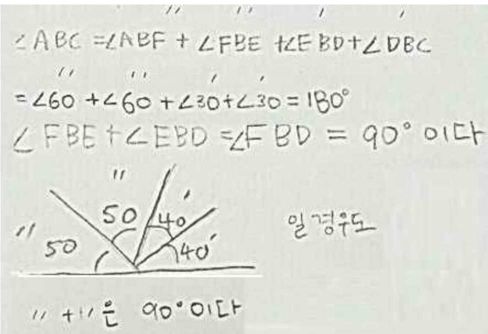
다. 귀납적 증명스키마에서 나타난 특징

본 연구자는 귀납적 증명스키마의 유형을 수치적 예를 사용한 귀납적 증명스키마와 도구의

측정을 활용한 귀납적 증명스키마로 나누었다. 두 경우 모두 하나 이상의 특정한 경우에서 정량적인 측정으로 명제의 참을 판단했다는 점에서 귀납적 증명스키마이지만, 본 연구자는 구체적인 수치를 예로 들어서 한 경우와 물리적인 도구를 활용한 경우를 구분하고자 했다.

귀납적(측정) 증명스키마를 사용한 학생들은 1명을 제외하고 모두 각도기를 활용하여 결론을 이끌어냈다. 1명은 자의 직각부분을 활용하여 $\angle FBE + \angle EBD$가 직각임을 보였다.

귀납적(예) 증명스키마를 사용한 학생들은 주어진 조건을 만족하는 구체적인 각의 값을 직접 더해봄으로써 명제가 참임을 보였다. 특이한 점은 이 증명스키마를 사용한 12명의 학생 중 한명을 제외하고는 모두 '$\angle FBE = 60^{\circ}, \angle EBD = 30^{\circ}$'와 같이 하나의 예만 들었다는 것이다. 이를 통해 명제를 증명하는데 있어서 하나의 예로도 충분하다는 학생들의 생각을 엿볼 수 있으며, 이는 조건을 만족하는 모든 경우에 대하여 명제의 참이 성립함을 보여야 한다는 증명의 일반성을 인지하지 못하고 있음을 보여주는 것이다. 참고로 나머지 1명의 학생은 2개의 예를 들어 명제가 참임을 보였다.



[그림 IV-5] 귀납적(예) 증명스키마(I1) 사례

라. 기타 증명스키마 유형에서 관찰된 특징

권위적 증명스키마를 가지고 있는 학생들은 하위권에서 2명이 있었는데, 간단한 인터뷰에 의해 그들이 권위적 증명스키마를 가지고 있음을 확인할 수 있었다. 한 명은 교과서에서 비슷한 정리를 봤다고 답했고, 나머지 한 명은 선생님이 출제한 문제이므로 이 명제는 참일 수밖에 없다고 답했다.

관련 없는 내용을 적거나 무응답을 한 학생은 전체 학생의 29%로 높은 비율을 차지했다. 특히 무응답을 한 학생은 18명으로 전체에서 15% 정도였다. 활동지에 아무것도 적지 못한 학생들은 교사가 문제의 뜻을 설명을 다시 해주었음에도 불구하고, 답이 나와 있는데 무엇을 더 해야 할지 모르겠다고 답하는 등 문제의 의도를 전혀 파악하지 못했다. 이를 통해 활동지에 관련 없는 내용을 적거나 무응답을 한 학생들은 증명 활동에 대한 동기가 결여되어 있으며 증명의 필요성을 인지하지 못하고 있으리라 생각된다. 나귀수(1998)는 위와 같은 유형의 학생들을 대상으로 완전한 형태의 명제를 증명하는 과제보다는 명제의 가정만을 제시하고 결론을 추측하는 문제를 먼저 제시할 것을 권장하고 있다.

V. 결 론

추론과 증명은 초등 과정부터 고등 과정을 이수하는 학생들에게 일관성 있는 수학적 경험이 되어야 하고 다양한 상황 속에서 일상적으로 사용하여 발전되어야 한다(NCTM, 2000). 학생들의 인지수준을 고려하여 초등학교에서는 다양한 경험적 증명이 다루어져야 하고, 궁극적으로 고등 과정에서는 형식적, 연역적 증명을 할 수 있어야 한다. 중학교 1학년은 형식적인 대수가 도입되고 추상적인 수학을 다루면서 급진적인 수학적 전환이 일어나는 과도기적인 단계라 할 수 있는데,

이에 본 연구는 Harel, & Sowder의 증명스키마를 사용하여 학업성취도를 기준으로 중학교 1학년 학생들의 증명스키마유형을 알아보고 그 특징을 분석하였다. 그 결과는 다음과 같다.

첫째, 동일한 교사의 지도 아래 같은 교육과정을 이수하고 있는 학년이라도 학생들이 사용하는 증명스키마 유형이 다양했다. 이는 중학교 1학년 안에 초등학교의 경험적 방법에 머무르고 있는 학생들, 문자를 학습한 후 형식적 증명을 시도하는 학생들, 아직 증명 자체에 낯선 학생들이 다양하게 분포하고 있다는 것을 의미한다. 선행 연구에서도(권성룡, 2003) 이와 유사한 결과가 나온 바, 이는 곧 교실 수업에서 각 증명스키마 유형의 학생들을 고려하여 증명 지도가 이루어져야 할 필요가 있음을 시사한다.

둘째, 학업성취도에 따라서 학생들이 사용하는 증명스키마 유형에 차이가 있었다. 상위권에 속한 학생들은 연역적인 추론을 통한 변형적 증명스키마를 많이 사용하였다. 중위권에서는 변형적 증명스키마를 사용한 학생의 비율이 줄어들고, 나머지 증명스키마 유형의 비율이 증가했다. 하위권의 경우, 관련 없는 내용을 적거나 무응답을 한 학생들의 비율이 가장 높았다. 이와 같은 결과는 학업성취도에 따라 학생들의 증명 유형에 차이가 있었다는 김정하(2010, 2011) 연구 결과와 일관되는 부분이다.

셋째, 변형적 증명스키마를 사용한 학생들의 풀이를 관찰한 결과 대부분 주어진 명제의 가정을 문자식으로 표현하고 식의 변형을 통하여 결론을 이끌어내었다. 이는 일반적 논증을 시도한 학생들 중 대수적 기호를 사용한 학생들이 거의 없었다는 Knuth et al.(2009)의 연구 결과와 상반되는데 그 요인은 중학교 1학년 교육과정 내용의 차이라고 판단된다. 우리나라에서는 중학교 1학년 때 문자를 도입하고 기호 조작하는 내용을 학습하는 반면 미국의 경우 7학년에서 변수 개념 이외의 대수를 그 다음 학년에서 배우기 때문에 다소 다른 결과가 나타났으리라 생각된다.

넷째, 귀납적 증명스키마를 사용한 학생들의 풀이를 검토한 결과, 도구의 측정을 활용한 풀이와 수치적 예를 사용한 풀이로 분류되었다. 학생들이 각도기, 자 등을 활용하여 증명을 한 것은 초등학교에서 물리적 도구를 이용해 경험적인 방법으로 명제를 정당화 하는 방식을 계속해서 사용하고 있는 것으로 판단된다. 한편, 수치적 예를 사용한 풀이에서는 1명을 제외하고 모든 학생들이 오직 하나의 예만 들어서 명제의 참을 보이고자 했다. 학생들이 2개 이상의 예조차도 들지 않았다는 점을 감안할 때, 학생들이 가정을 만족하는 모든 경우에 대하여 명제의 참이 성립함을 보여야 한다는 사실을 인지하지 못했다고 생각되어진다. 마찬가지로, 지각적 인식 증명스키마를 사용한 학생들도 문제에서 주어진 특수한 그림에 의존하여 명제의 참을 판단했다는 점에서 이와 같은 인식이 결여되었다고 볼 수 있다.

본 연구자는 위와 같은 연구 결과를 토대로 증명 교수·학습 개선을 위해 다음 시사점을 얻을 수 있었다.

첫째, 학생들의 수학적 능력과 이해수준으로부터 증명지도가 시작되어야 한다. 특히 본 연구에서 각 증명스키마 유형별로 증명과정에서 몇 가지 특징이 도출되었는데 이는 증명 교수·학습에서 훌륭한 소재가 될 수 있다. 예를 들어 다음과 같은 지도가 이루어질 수 있다. 변형적 증명스키마 유형으로 분류된 많은 학생들이 수학적 기호가 아닌 비형식적 부호를 사용하였는데 형식적 수학 기호에 대한 적절한 지도를 통해 학생들의 증명 수행 발달을 도모할 수 있을 것이다. 각도기나 자와 같은 물리적인 도구의 측정으로 증명을 시도한 학생들의 경우 측정의 오차 가능성에 대해 인식하게 함으로써 연역적 증명의 필요성을 깨닫게 할 수 있을 것이다(권오남,

2010). 또한 학생들에게 증명해야할 명제의 조건을 만족하는 그림을 그려보게 하거나, 더 극단적인 상황을 고려하게 함으로써 지각적 인식 증명 스키마가 가진 한계를 극복하는데 도움을 줄 수 있을 것이다.

둘째, 학업성취도에 따라 학생들의 증명스키마 유형에 차이가 있다는 결과를 바탕으로 교실 수업에서 증명을 주제로 모둠 활동을 할 때, 학업성취도가 다른 이질적인 집단으로 그룹을 구성할 것을 제안한다. 선행연구들에서 증명 교수·학습 활동으로 토의 학습, 소규모 협력 학습 등을 권장한 바(나귀수, 1998; 류희찬, 조완영, 1999), 다양한 유형의 증명스키마를 가지고 있는 학생들이 한 명제에 관한 자신의 증명을 주제로 의사소통하는 토론활동은 개인이 가지고 있는 증명스키마의 유용성, 가치, 한계점, 증명에 대한 의의나 인식 등을 공유하고 비판할 수 있는 기회를 제공할 것이다. 더 나아가 이러한 기회는 보다 높은 수준의 증명으로 올라갈 수 있는 발판을 마련해 줄 수 있을 것이다.

셋째, 학생들에게 증명의 본질을 인식할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다. 본 연구에서 사용했던 문제를 해결할 때 필요한 수학적 내용을 이미 학습했음에도 불구하고 많은 학생들은 경험적 증명스키마만을 사용하였다. 사실 이는 매우 자연스러운 현상인데(Harel, & Sowder, 2007), 중요한 문제는 어떻게 학생들을 경험적 증명스키마에서 분석적 증명스키마로 도약시키는지에 관한 것이다. 현재 학생들이 가지고 있는 경험적 스키마에서 분석적 증명스키마로 도약하기 위한 중요한 요인 중 하나는 증명의 본질을 인지하는 것이다(류희찬, 조완영, 1999). 다시 말하면 경험적 증명이 수학적 증명이 될 수 없는 이유를 아는 것, 경험적 증명과 수학적 증명의 차이를 아는 것 등이다. 사실 위의 내용은 교과서나 교육과정에 명시적으로 나와 있는 내용이 아니기 때문에 이와 같은 활동은 하는 것은 교사의 역량에 달려 있다. 예를 들어, 교사는 경험적 증명스키마를 사용한 풀이를 놓고 학생들과 '이것은 증명이 될 수 있는가?', '증명이 될 수 없다면, 그 이유는 무엇인가?'와 같은 주제에 대하여 대화를 이끌어냄으로써 학생들이 증명의 본질에 점진적으로 다가갈 수 있는 기회를 마련해 줄 수 있을 것이다.

참고문헌

강정기, 노은환. (2013). 증명에서 연역 체계 이해에 관한 연구. **A-수학교육, 52**(4), 549-565.

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부

권성룡. (2003). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. **C-초등수학교육, 7**(2), 85-99.

김은미. (2010). **일차함수 문제 해결에서 나타난 일반화 행동과 정당화 유형**. 이화여자대학교 석사학위 논문.

김정하, & 강문봉. (2009). 초등학교 교사들의 수학적 정당화에 대한 연구. **수학교육학연구, 19**(3), 371-392.

김정하. (2010). **초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구**. 이화여자대학교 박사학위논문.

김정하. (2011). 초등학생과 중학생들의 수학적 정당화에 대한 인식과 단계에 관한 실태 연구. **한국초등수학교육학회지, 15**(2), 417-435.

나귀수. (1998). **증명의 본질과 지도 실제의 분석 -중학교 기하단원을 중심으로-**. 서울대학교 박사학위논문.

나귀수. (1998). 증명의 수리철학적 분석과 지도 방향 탐색. **대한수학교육학회지, 8**(1), 351-364.

류희찬, & 조완영. (1999). 증명의 필요성 이해와 탐구형 기하 소프트웨어 활용. **대한수학교육학회지. 수학교육학연구, 9**(2).

박귀희, 윤현경, 조지영, 정재훈, & 권오남. (2010). 중학생의 경험적 증명과 연역적 증명에 대한 선호 요인 분석. **E-수학교육 논문집, 24**(2), 325-344.

박은조, & 방정숙. (2005). 수학 교사들의 증명에 대한 인식. **한국학교수학회논문집, 8**(1), 101-116.

서지수, 류성림. (2012). 수와 연산, 도형 영역에서 초등 3 학년 학생들의 수학적 정당화 유형에 관한 연구. **한국수학교육학회 학술발표 논문집, 2012**(1), 135-149.

이경언. (2014). Harel 과 Sowder 의 증명스키마에 따른 영재학생들의 수학적 정당화 유형 분석. **교육과학연구, 16**(1), 57-80.

최남광. (2008). **중등수학영재아들이 공간기하과제 해결과정에서 보여주는 정당화 유형과 수학적 표현에 관한 연구**. 한국교원대학교 석사학위 논문.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics 24*(4), 359-387

Dictionary, M. W. (2006). The Merriam-Webster Dictionary. Merriam-Webster, Incorporated

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in collegiate mathematics education III*, 234-283.

Harel, G. (2002). The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction'23. Learning and teaching number theory: *Research in cognition and instruction, 2*, 185.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2*, 805-842.

Heinze, A., & Reiss, K. (2009). Developing argumentation and proof competencies in the mathematics classroom. T*eaching and learning proof across the grades: AK-16 Perspective, 203*, 191-203.

Healy, L, & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education 31*, 396-428

Herbst, P. G. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, 176-203.

Housman, D., & Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. *Educational Studies in Mathematics, 53*(2), 139-158.

Knuth, E., Choppin, J., & Bieda, K. (2009). Middle school students' production of mathematical justifications.

Maher, C. A. (2005). How students structure their investigations and learn mathematics: Insights from a long-term study. *The Journal of Mathematical Behavior, 24*(1), 1-14.

NCTM, P. (2000). Standards for school Mathematics. *Reston, VA, Author.*

Rodríguez, A. V. R. (2006, November). Ways of reasoning and types of proofs that mathematics teachers show in technology-enhanced instruction. In *Psychology of Mathematics Education* (p. 891).

Sowder, L., & Harel, G. (2003). Case studies of mathematics majors' proof understanding, production, and appreciation. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 3*(2), 251-267.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher, 91*(8), 670.

Seventh Graders' Proof Schemes and Their Characteristics in Geometric Tasks

Byun, Gyu Mi (Graduate School, Konkuk University)
Chang, Kyung Yoon (Konkuk University)

The purpose of this study is to investigate the types and characteristics of the Seventh Graders' proofs. Harel, & Sowder's proof schemes were used to analyze the subjects' responses. As a result of the study, there was a difference in the type of proof schemes used by the students depending on the academic achievement level. While the proportion of students using a transformative proof scheme decreased from the top to the bottom, the proportion of students using inductive (measure) proof scheme increased. In addition, features of each type of proof schemes were shown, such as using informal codes in the proof process, and dividing a given picture into a specific ratio in the problem. Based on this, we extracted four meaningful conclusions and discussed implications for proof teaching and learning.

* Key Words : proof(증명), proof scheme(증명스키마), proof teaching and learning(증명교수학습)

논문접수 : 2017. 4. 5
논문수정 : 2017. 5. 3
심사완료 : 2017. 5. 8