韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2017.31.2.139
제 31집 제 2호, 2017. 5. 139-152

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 31, No. 2, May. 2017. 139-152

중등수학 교과서가 다루는 미적분 역사 서술의 비판과 대안
- 17세기까지의 미적분의 역사를 중심으로 -

김 상 훈 (인하대학교 대학원)
박 제 남 (인하대학교)†

본 논문에서 미적분을 다루는 중등교과서가 미적분 역사를 어떻게 소개하고 있는지를 알아보았다. 문제점을 파악하기 위하여 우리는 기원전 350~기원전 50년에 목성의 위치를 계산하기 위하여 이루어진 바빌로니아인의 사다리꼴을 사용한 구분구적법 그리고 1000년경 이집트에서 이루어진 이븐 알 하이탐(ibn al-Haytham)의 원판을 이용한 구분구적법 등을 고찰하였다. 이를 바탕으로 미적분 역사에 대한 건설적인 서술 방안을 제시하였다. 결론적으로 우리나라 중등수학 교과서는 뉴턴과 라이프니츠가 미적분을 창안한 것으로 설명하고 그 뿌리를 고대 그리스에 둔다. 미적분의 창안은 바빌로니아와 파티마 왕조(Fāṭimah Dynasty: 909-1171)(이집트)에 있으며 인도에서 멱급수의 발전이 이루어진 후 미적분이 유럽에서 발전된 것으로 교과서에 아시아·아프리카의 가치가 소개되는 것이 바람직하다.

I. 연구의 필요성 및 목적

2012년 교육과학기술부에서는 수학교육 선진화 방안을 발표하면서, 쉽고 재미있게 배우는 수학교과서를 ‘스토리텔링 교과서’라 명명하고 그 모델을 제작하고 보급할 것을 공언하였다(이재학 외, 2013). 교과서를 위한 스토리텔링을 위한 주된 대상 중의 하나로 수학사가 주목받고 있다. 수학교육에서 수학사의 활용은 오랫동안 강조되어 왔다. Poincare, Klein을 비롯한 학자들은 수학자들이 수학을 발전시켜온 방식대로 수학사를 활용할 것을 강조하였고, Freudenthal은 교사들의 적절한 안내에 의하여 학생들이 수학자들의 경험을 재현할 수 있도록 구성할 것을 강조하였다(권오남 외, 2013). 권오남 외(2013)는 국내외의 수학교육 연구에서 수학사의 도입을 통하여 수학의 역사적 발생과정을 현재의 학생들이 수학의 교수 학습에서 재현하여 학생들이 수학적 지식을 구성하는 과정을 이해하는데 도움이 되고, 수학의 필요성을 알게 하고 강조함으로써 수학수업에서 학습동기와 의욕을 높일 수 있으며, 학생의 정의적 발달을 도울 수 있다고 주장하고 있다. 장비트(Jankvist, 2009)는 수학의 교수・학습에서 수학사를 활용하는 이유와 활용하는 방식을 각각 범주화하였으며, 그 중 수학사를 활용하는 방식을 ‘계몽’, ‘학습 단위’, ‘역사·기반 접근’의 세 개의 방식으로 범주화하였다. 그루그네티(Grugnetti, 2010)는 수학의 교수학적 문제에 대한 수학사의 영향이 다양한 방식으로 나타남을 예를 들어 제시하고 있다. 즉 오래된 문제를 사용함으로써, 학생들이 자신들의 전략을 예전의 것과 비교할 수 있으며, 이를 통하여 수학이 고정되거나 결정된 것이 아님을 알게 되고, 수학적인 기술과 개념의 구성을 위하여 수학사가 활용되며 역사적이고 인식론적인 분석을 통하여 어떤 특정한 개념이 학생들에게 어려운지를 교사가 이해하게 된다는 것이다. 수(Siu, 2010)는 수학사를 이용하는 방법으로 수학사적 일화를 통하여 학습에 대한 관심과 흥미를 유발하도록 하거나 학습자의 동기유발과 새로운

* 접수일(2016년 12월 1일), 심사(수정)일(1차: 2017년 2월 4일, 2차: 2017년 3월 13일), 게재확정일(2017년 3월 14일)
* ZDM 분류 : I14, A34
* MSC2000 분류 : 97-01, 97-03, 97U20
* 주제어 : 수학사, 수학교육, 역사발생원리, 융복합교육
* 본 논문은 2017년도 인하대학교의 지원을 받아 수행된 연구임
† 교신저자: jnpark@inha.ac.kr

관점 계발 및 다른 지식과의 연결성을 파악할 수 있도록 전체적인 개관을 하거나 수학 수업의 내용구성의 소재로 사용하거나 학습자의 수학적 아이디어를 개발할 수 있도록 하는 방법을 제시하였다. 한경혜(2006)는 영재교육에서 미분개념의 이해를 중심으로 수학사를 활용한 수업의 깊이 있는 이론과 예를 제시하였고, 서보억(2013)은 중학교 기하영역 등분할 개념에 대한 수학사적 분석 및 확장에 대한 연구에서 수학사적 고찰을 통해 등분할 개념의 확장가능성에 대하여 탐색하였는데, 이를 통하여 수학사가 단순한 흥미 유발이나 현재의 수학내용의 발생 원리를 이해하는 수준을 넘어, 새로운 개념 형성을 위한 기초로 사용될 수 있는 가능성을 제공할 수 있다고 하였다.

한편, 정수용 외(2014)와 박호연(2015)은 현재 중등 교과서에 소개된 수학사 사용 현황을 조사하여 수학의 영역 별, 발생 지역별 사용 횟수에 대하여 분석하였다. 박호연(2015)은 2007 개정 교육과정과 2009 개정 교육과정의 중등수학 교과서 97종을 대상으로 중등수학 교과서 분석을 통한 수학사의 사용 현황을 조사하고 그 결과를 제시하였는데, 제시된 수학사 자료를 지역으로 분류하였을 때 서양이 91.1%, 동양 A가 16.0%, 한국이 6%에 해당한다고 하였다. 박제남・장동숙(2015)은 학교수학에서 미적분을 '뉴턴과 라이프니츠의 발견' 등으로 소개해온 것을 이슬람 수학을 배제하고 고대 그리스에서 유럽으로 수학문화의 전이를 소개하는 전형적인 예이며, 미적분과 관련된 인도와 이슬람 수학을 교과서에 소개하는 노력이 필요하다고 하였다.

그러나 최근 교과서에서 사용된 수학사에 대하여 연구된 논문들은 수학사에 대한 사용 빈도에 대한 통계가 주를 이루고 있으며, 교과서에 소개된 수학사적인 내용의 정확성과 인물에 대한 평가의 타당성에 대한 분석은 거의 이루어지고 있지 않는 등의 한계를 가지고 있다. 한편 유럽 이외의 지역에서 활동한 수학자나 수학사적 문헌 등에 대하여 알려진 내용이 많지 않은 것도 사실이다. 따라서 바빌로니아나, 이슬람, 인도, 중국 등의 수학을 교과서에 소개하기 위해서는 이 지역에서 활동한 수학자나 수학적인 문헌에 대한 연구가 활발하게 이루어질 필요가 있다.

이러한 연구의 필요성에 따라 본 연구에서는 현행 중등수학 교과서가 다루고 있는 미적분 역사 서술의 실태를 분석, 비판하고 중등수학 교과서에서 미적분의 역사 서술방향을 제시하고자 한다. 이를 위하여 먼저, 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 모든《미적분 I, II》교과서의 미적분 관련 수학사 기술 내용을 파악하고 바빌로니아(B.C. 350-B.C. 50)에서 17세기 뉴턴까지의 미적분 관련 수학사를 권위 있는 문헌을 통하여 개관한다.

Ⅱ. 미적분관련 교과서 내용분석 및 수학사 개관

본 연구는 현행 중등 수학교과서가 다루고 있는 미적분 역사 서술의 실태를 분석, 비판하고 중등수학 교과서에서 미적분의 역사 서술방안의 방향을 제시하기 위한 것이다. 이를 위하여 본 연구는 먼저 2009 개정 교육과정에 따라 제작된 9종의 《미적분 I》 교과서와 9종의 《미적분 II》 교과서 등 총 18권의 인정 교과서에서 미적분의 역사를 소개한 내용을 분석하였다.《미적분 I》교과서에서는 다항함수의 미분법 단원과 다항함수의 적분법 단원에 나타난 모든 미적분의 역사 관련 자료들을 수집하였고, 《미적분 II》 교과서에서는 미분법 단원과 적분법 단원의 미적분의 역사 관련 자료들을 수집하였다. 이를 통하여 교과서에 수록된 미적분 관련 수학사의 서술의 특징들을 정리・요약하고, 문제점을 분석하였다.

다음으로 2016년 오센드리버(Ossendrijver, 2016)의 연구 결과를 바탕으로 바빌로니아인들이 기원전 350년-기원전 50년 사이에 사다리꼴을 사용한 정적분으로 목성의 위치를 계산한 방법, 그리고 1000년 경 이집트에서 이루어진 이븐 알 하이탐의 구분구적법 연구 등 17세기까지의 아시아, 아프리카, 유럽 등지에서 연구된 미적분 관련 수학사를 권위 있는 문헌을 토대로 개관하였다.

1. 2009 개정 교육과정에 따른《미적분 I, II》교과서의 수학사의 주요 서술 내용 분석

박호연(2015)은 중등수학교과서 통계분석에 대한 결론 중의 하나로 동양수학사와 관련된 자료가 더 많이 제시될 필요가 있으며, 대부분의 자료가 서양지역에 관한 것이라고 하였다. 본 연구에서는 중등수학교과서의 미적분 영역에서도 이와 같은 경향이 나타나는지를 확인하기 위하여 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 모든《미적분 I, II》교과서들에 제시된 수학사 기술 내용을 살펴보았다. 2009 개정 교육과정에 따른 교과서에 제시된 미적분 관련 수학사의 내용을 살펴보면 다음과 같다.

우정호 외(2014a; 2014b)는 "고대 그리스 시대의 아르키메데스는 도형의 넓이와 부피를 구하기 위하여 적분의 아이디어를 고안했으며 그의 아이디어는 여러 수학자를 거쳐 17세기 뉴턴과 라이프니츠의 미적분학으로 정립되었다"고 소개하고 에세이 '이야기가 있는 수학'에서 다음과 같은 의미로 소개한다.

> 적분법은 고대 그리스 시대의 아르키메데스에 기원을 찾을 수 있다. 현대의 미적분은 카발리에리, 데카르트, 월리스, 배로를 거쳐 뉴턴과 라이프니츠에 이르러 독자적으로 개발되었다.

김창동 외(2014a; 2014b)는 "뉴턴을 영국의 수학자로 미분을 발견하였고, 라이프니츠는 독일의 수학자로 기호 $\frac{dy}{dx}$를 도입한 것"으로 소개한다. 또한 '적분이란 무엇인가?'라는 에세이에서 미적분의 선구자로 라이프니츠와 뉴턴을 소개하고, 카발리에리는 도형의 넓이나 부피를 구하는 적분 개념의 기초를 제공하였다고 기술하며, '미분법의 시작'이라는 에세이에서 아폴로니오스와 페르마, 배로 등의 수학자를 소개하고 있다. 황선욱 외(2014, p.132-133)는 '적분법의 기초를 제시한 카발리에리'라는 제목 하에서 1635년에 도형의 넓이와 부피를 구하는 방법을 소개하고 카발리에리의 원리는 본질적으로 정적분의 개념과 같은 것으로 피력한다. 또 '정적분을 엄밀하게 정의한 리만'이라는 에세이에서는 아르키메데스와 리만을 소개하고 있다. 김원경 외(2014a; 2014b)는 미분은 17세기 뉴턴과 라이프니츠에 발견되었는데, 뉴턴은 행성을 비롯한 여러 가지 물체의 운동을 수학적으로 설명하는 미분법을 고안하였고, 라이프니츠도 독립적으로 미분의 개념을 고안한 것으로 소개한다. 이강섭 외(2014)는 뉴턴과 라이프니츠가 "현대적인 의미의 미적분을 발견"했다고 소개한다. 신항균 외(2014)는 "적분은 넓이는 구하는 것에서 출발하여 부피를 구하는 것으로 발전하였으며 케플러가 포도주 통의 부피를 구하기 위하여 무수히 많은 원반으로 자르고 그 부피를 더하는 방법을 연구하였다"를 제시하면서 케플러를 소개한다.

따라서 이상의 내용을 종합하면《미적분 I, II》교과서들에서 언급되는 미적분학 관련 수학사의 논조는 크게 다음 세 가지로 분석 요약할 수 있다.

첫째, 고대 그리스의 아르키메데스는 적분의 아이디어를 고안했고,
둘째, 뉴턴과 라이프니츠는 미적분을 창안(invent)한 수학자이며,
셋째, 카발리에리와 케플러 등은 미적분의 기초를 제공했다.

한편《미적분 I, II》 교과서에 제시된 모든 수학사 관련 자료들이 서양지역에 관한 것들이다. 이와 같은 서술은 바빌로니아, 파티마 왕조(이집트), 그리고 인도수학 등을 제외한 기술태도로 보인다. 학생들이 접하는 자료가 대부분 서양지역의 수학사임으로 무의식중에 아시아, 아프리카 수학의 가치가 간과될 수도 있다. 장혜원(2006)은 동양수학에서도 주목할 만한 수학의 발전이 이루어졌으며, 서양에서 원리로 확립되기 이전에 동양 지역에서 이미 실생활에서 사용하고 있었던 역사적 사실이 계속 밝혀지고 있다고 하였다. 다음 절에서 미적분에 있어 아시아·아프리카적 가치를 살펴보고자 한다.

2. 17세기까지의 미적분관련 수학사 개관

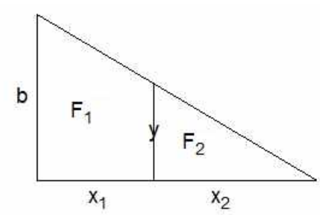
가. 바빌로니아인(B.C. 350-B.C. 50)의 사다리꼴을 이용한 구분구적법

2016년 오센드리버(Ossendrijver, 2016)는 기원전 350년에서 기원전 50년 사이에 만들어진 것으로 추정되는 5개의 고대 바빌로니아의 쐐기문자 서판을 해석함으로써 이 시대의 바빌로니아인들이 구분구적법을 사용하였음을 주장하였다. 고대 바빌로니아의 천문학자들은 시간-속도계에서 사다리꼴의 넓이를 이용하여 목성이 등장한 때로부터 처음 120일 간 황도를 따라 움직였을 때의 목성의 위치(각)를 추정하였으며, 더 나아가 목성이 60일 간 움직인 거리의 절반을 움직이는데 걸린 시간을 넓이가 같은 두 개의 분할된 사다리꼴을 사용하여 구하였다[1].

바빌로니아인의 적분법을 알아보기 전에 먼저, 구분구적법(trapezoidal rule)의 기본 도형인 사다리꼴을 고 아카디안들이 어떻게 다루었는지 이에 대하여 자세히 알아보고. 특히 바빌로니아인들의 측정은 각도(degree)를 기반으로 각속도를 측정한 것이므로 각도의 역사를 살펴보았다.

(1) 고 아카디안(Old Akkadian, B.C. 2340-B.C. 2200)의 사각띠의 응용

점토판 VAT 8512는 [그림 Ⅱ-1]과 같이 높이가 b인 직각삼각형이 선분 y에 의하여 밑변의 길이가 각각 x_1, x_2인 두 도형으로 나누어지고, 나누어진 두 도형의 넓이를 각각 F_1, F_2라 할 때 연립방정식



[그림 Ⅱ-1] 노이게바우어의 해석

$$\begin{cases} b = 30 \\ F_1 - F_2 = \Delta = 7,0 \\ x_2 - x_1 = \delta = 20 \end{cases} \tag{1}$$

의 미지수 y, x_1, x_2, F_1, F_2를 차례로 구하는 문제이다.

노이게바우어는 1930년대에 점토판의 해석을 바탕으로 고 바빌로니아인들이 미지수들을 결정한 방법을 제시하였다. 그는 닮음비 $x_1 : x_2 = (b-y) : y$ 와 주어진 연립방정식으로부터 이차방정식

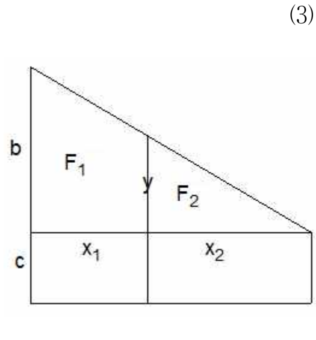
$$y^2 + 2\frac{\Delta}{\delta}y = \frac{\Delta}{\delta}b + \frac{b^2}{2} \tag{2}$$

의 근

$$y = \sqrt{1/2\{(\Delta/\delta + b)^2 + (\Delta/\delta)^2\}} - \Delta/\delta \tag{3}$$

을 고 바빌로니아인이 구한 것으로 제시한다(Gandz, 1937, p.446-447). 이는 대수적 방법으로 근을 구한 것으로 식(2)는 간즈의 고 바빌로니안 방정식의 분류 AI에 해당된다(Gandz, 1937, p.405).

한편, 후버(Huber, 1955)는 점토판 VAT 8512에 대하여 대수적 방법이 아닌 기하학적 해법의 가능성을 제시하였다. 이를 알아보자. 먼저, 점토판 VAT 8512 앞면에 적힌 3개의 문장 8-10(Høyrup, 2002, p.235)을 바탕으로 노이게바우어와 다른 방식으로 바빌로니아인들의 풀이를 해석하는데, [그림 Ⅱ-1]을 [그림 Ⅱ-2]처럼 직각삼각형 아래에 높이가 c인 직사각형을 붙여 사다리꼴을 만들면 연립방정식(1)로부터



[그림 Ⅱ-2] 후버의 해석

$$(F_1 - F_2) - c(x_2 - x_1) = \Delta - c\delta$$

---

1) 현대적 용어로 이는 '적분의 평균값정리(the mean value theorem for integrals)'이다.

이고 특히, 이를 0으로 하려면 $c=\Delta/\delta(=21)$로 택하면 된다.

바빌로니아인들은 [그림 Ⅱ-3]처럼 한 변의 길이가 $a=b+c$이고 나머지 대응변의 길이가 c인 사다리꼴의 넓이를 이등분하는 선분의 길이

$$z=\sqrt{(a^2+c^2)/2} \tag{4}$$

을 구하고 $y=z-c$ 로부터

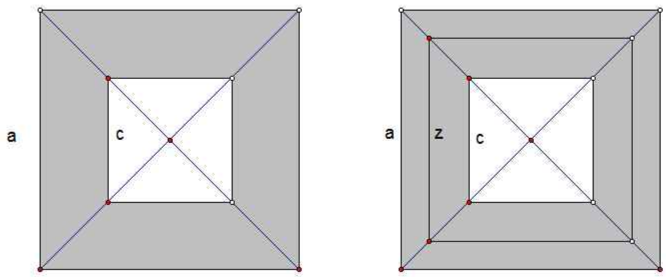
$$y=\sqrt{(a^2+c^2)/2}-c$$

인 식(3)을 설명하는 기하적 해를 얻는다.

식(4)를 고 아카디안들은 이미 기원전 2340년경에 사용하였다(Friberg, 2007a, 2007b; Robson, 2008; van der Waerden, 1988). 이를 추정하여 보자(참고: Rudman, 2010). [그림 Ⅱ-3]과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 중앙에 c를 한 변의 길이로 하는 정사각형을 그림과 같이 놓이게 하면 a에서 c까지 사다리꼴의 넓이는 $T_{ac}=(a^2-c^2)/4$이고 이 사다리꼴의 넓이를 2등분하는 변의 길이를 z라 하면 $T_{az}=(a^2-z^2)/4$이다. 따라서 $T_{az}=T_{ac}/2$인 z를 구하면 $(a^2-z^2)/4=(a^2-c^2)/8$에서 식(4)

$$z=\sqrt{(a^2+c^2)/2}$$

을 얻는다. 물론 그림 상으로는 a와 c의 길이에 제약이 있는 것처럼 보이지만 결과적으로 제약 없이도 식이 성립한다. 이제 세 선분의 길이 a, z, c를 왼쪽부터 차례대로 기호 $[a, z, c]$로 나타내자.



[그림 Ⅱ-3] 고 아카디안 사각띠의 등분할

또한, 바빌로니안(B.C. 350-B.C. 50)들은 식(4)를 얻기 위하여 다른 경로를 사용한 것으로 확인되는데 오센드리버(Ossendrijver, 2016)가 번역 제시한 Text B를 참고하면 새로운 변수 u를 $u^2=(a^2-c^2)/2$로 도입하고 이로부터 $a^2-u^2=z^2$을 얻는다.

식(4)가 소개된 점토판 IM 58045의 제작 시기는 북 바빌로니아를 통치한 살곤(Sargon)왕(대략 B.C. 2340)의 시기까지 거슬러 올라간다(Robson, 2008). [그림 Ⅱ-2]에서 제시한 후버의 기하적 해석에서 보면 점토판 VAT 8512는 고 아카디안 시기의 수학이 고 바빌로니안(B.C. 2000-B.C. 1600) 시대에 전이되었음을 보여주는 중요한 예이다(Friberg, 2007a, p.410). 참고로 [그림 Ⅱ-1]에서처럼 삼각형의 분할에서 얻는 사다리꼴의 넓이와 길이에 관한 문제는 고대 이집트 아메넴하트 3세(B.C. 1859-B.C. 1814)때에도 사용되고 있었음을 알 수 있다(참고: Chace, 1979, 문제 53번).

[그림 Ⅱ-3]에서 $a^2+c^2=2z^2$이고 이로부터 $((a+c)/2)^2+((a-c)/2)^2=z^2$ 즉, 직각삼각형의 각 변의 길이를 나타내는 짝[2](Egyptian triple 또는 Pythagorean triple) $((a-c)/2, (a+c)/2, z)$을 얻는다. 역으로 직각삼각형에서 만들어진 피타고리안 짝 (s, u, d)로부터 $a=u+s$, $z=d$, $c=u-s$인 사다리꼴의 이등분을 나타내는 짝

$[u+s, d, u-s]$를 얻는다. 프라이베르그(Friberg, 2007b)에 따르면 고 바빌로니아인들이 많이 사용한 사다리꼴의 이등분을 나타내는 짝은 $[17, 13, 7]$이며 이는 직각삼각형을 나타내는 짝 $(5, 12, 13)$을 만든다. 특히, [그림 Ⅱ-2]에서 해 $[51, 39, 21]$은 $[3\times 17, 3\times 13, 3\times 7]$로 나타낼 수 있다.

한편, 노이게바우어(Midonick, 1965)는 VAT8512 문제와 연관하여 고 바빌로니아인들이 [그림 Ⅱ-1]에서 $F_1 = 320, x_1 = 20$과 $x_2 = 30$이 주어질 때, b와 y를 구하는 문제를 다루었다고 보고 있다. 문제 해결의 핵심은 $\frac{1}{2}(b+y)$와 $\frac{1}{2}(b-y)$를 차례로 구하는데 있다. 이를 살펴보면 $F_1 = 320 = \frac{1}{2}(b+y)x_1$에서 $\frac{1}{2}(b+y) = \frac{F_1}{x_1} = 16$이고 삼각비로부터 $\frac{b}{x_1+x_2} = \frac{y}{x_2} = \frac{b-y}{x_1}$이고 $b = \frac{x_1+x_2}{x_1}(b-y)$, $y = \frac{x_2}{x_1}(b-y)$를 얻고, 두 식을 더하면 $b+y = \frac{x_1+2x_2}{x_1}(b-y)$ 즉, $\frac{1}{2}(b-y) = \frac{1}{2}(b+y)\frac{x_1}{x_1+2x_2} = \frac{F_1}{x_1+2x_2} = 4$이다. 따라서 $b=20$, $y=12$를 얻는다.

(2) 각의 기원

노이게바우어(1957)에 따르면 바빌로니아(Assyrian Empire)에서 천체현상의 체계적인 관측 자료는 기원전 700년 경 부터 나타나며 기원전 5세기(Persian Empire)에는 황도 12궁이 발견되어 천체 위치를 계산하는데 하나의 좌표 역할을 하였다. 12개의 별자리들을 이용하여 원을 동일한 간격으로 나누고 다시 각 등분을 30조각으로 세분하여 360° 가 정의되었다. 여기서 30등분을 사용한 이유는 바빌로니아인들이 사용하고 있는 60진법에서 30을 차용한 것으로 추측하기도 한다. 따라서 현재 우리가 사용하고 있는 360° 기반의 각도(degree)는 기원전 5세기에 바빌로니아인들이 도입한 것이다(Brummelen, 2009; Neugebauer, 1957). 1799년 나폴레옹의 이집트 원정에서 비방 드농 등은 이집트 덴데라 대신전 천장에 그려진 12궁도를 발견한다(Solé, 2013). 현재 루브르박물관에 전시되어 있는 덴데라 12궁도의 제작은 기원전 50년 경으로 샹폴리옹은 추정했다.

[그림 Ⅱ-4] 덴데라 12궁도(루브르 박물관)(촬영: 박제남)

참고로 초등학교 수학 4-1(교육부, 2016) 『이야기 마당』에서 각도의 도입을 다음과 같이 한다.

> 360일이 지나면 태양이 같은 자리에 뜨고 360일이 지나고나니 땅에서 싹이 트네! 360일이 해마다 되풀이 되고 있어. 그럼 태양처럼 생긴 원을 그리고 똑 같이 360으로 나누어 볼까? 1년이 360일 이니까 원은 360° 가 되는군!

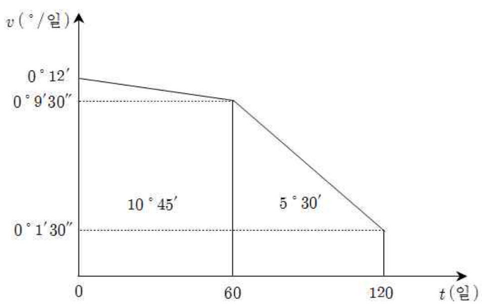
이는 타당하지 않으므로 수정되어야한다.

(3) 바빌로니아인의 목성 궤도 계산: $s = \int_0^{120} v\,dt$.

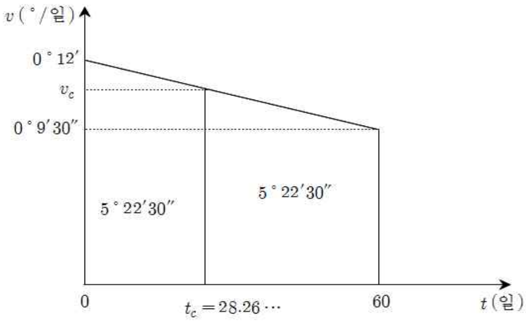
오센드리버는 최근 네 개의 추가적인 점토판(Text B, C, D, E)과 이후에 발견된 점토판(Text A)의 해석을

2) 2009 개정교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 ‘피타고라스 수’라 부른다. 그러나 정수론에서 피타고리안 수(Pythagorean number)는 피타고리안 짝(Pythagorean triple)으로 이루어진 직각삼각형의 넓이를 말한다.

통하여 바빌로니아인들이 기원전 350년에서 기원전 50년 전 사이에 목성의 위치를 사다리꼴을 이용한 적분방법으로 계산하였다고 발표하였다(Ossendrijver, 2016). Text A에서 황도를 따른 목성의 움직임은 각속도(단위: degree/day)로 표현되고 이를 적분한 목성의 전체이동은 각으로 계산된다. 정의역은 60일을 단위로 0일부터 120일로 한다.



[그림 II-5] 목성의 운동에 대한 시간 속도 그래프



[그림 II-6] 처음 60일에 대한 사다리꼴의 등분할

한편, Text B, D, E에서 바빌로니아인들은 첫 구간 $[0,60]$에서 목성이 중간에 위치하는 시간(day) t_c를 계산하는데 [그림 II-6]에서처럼 사다리꼴을 이등분하는 직선의 길이 v_c를 먼저 구하고 이로부터 t_c를 구한다. 오센드리버(Ossendrijver, 2016)는 [그림 II-6]에서 v_c를 $S_1=S_2$로부터 얻은 식

$$S_1=t_c(v_0+v_c)/2=S_2=t_2(v_c+v_{60})/2$$

과 $t_2=60-t_c$와 삼각비로부터 얻은 식

$$t_c=60\,(v_0-v_c)/(v_0-v_{60}) \tag{5}$$

로부터 $v_c=\sqrt{(v_0^2+v_{60}^2)/2}$ 을 얻고 t_c와 t_2를 연이어 구할 수 있는 것으로 현대적 계산을 빌어 설명하였다. 그러나 오센드리버(Ossendrijver, 2016)가 점토판 VAT8512를 직접 언급하지는 않았지만, 고 바빌로니아 시기(B.C. 2000-B.C. 1600)에 잘 알려진 사다리꼴의 넓이를 이등분하는 알고리즘인 $v_c=\sqrt{(v_0^2+v_{60}^2)/2}$ (식 (4) 참고)를 공식으로 직접 사용하여 v_c를 구하고, 이를 삼각비에서 얻은 식 (5)에 대입하여 t_c 와 $t_2(=60-t_c)$를 구한 것으로 보인다. 한편 Text B에서 도입한 변수 $u^2=(v_0^2-v_{60}^2)/2$는 아마도 v_c를 구하는 또 다른 공식으로 볼 수 있다. 그 이유는 $v_0^2-u^2=v_c^2$이기 때문이다. 따라서 고대 바빌로니아인들이 두 개의 공식 $v_c=\sqrt{(v_0^2+v_{60}^2)/2}$ 와 $u^2=(v_0^2-v_{60}^2)/2$을 사용하여 t_c와 t_2를 구했을 것으로 추정된다.

결론적으로 바빌로니아인들의 적분([그림 II-5])은 사다리꼴을 이용하여 넓이를 구하는 것(trapezoidal approximation)으로 현대적 기호를 사용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} s=\int_0^{120} v\,dt &\fallingdotseq \frac{\Delta t}{2}(v_0+2v_{60}+v_{120}),\ \Delta t=\frac{120-0}{2} \\ &=\frac{60}{2}(0^\circ 12'+2\times(0^\circ 9'30'')+0^\circ 1'30'') \\ &=\frac{60}{2}(0^\circ 32'30'')=60(0^\circ 16'15'') \\ &=16^\circ 15' \end{aligned}$$

오센드리버(Ossendrijver, 2016)가 해석한 점토판이 만들어진 시기에 해당되는 셀레우코스(Seleucid) 왕조(B.C.

330-B.C. 125)[3]때, 천문학의 발달로 인하여 바빌로니아인들은 순환소수를 포함한 17×10^{12}까지의 역수를 사용하였다. 1/7의 경우, 60진법으로, $0;8,34,16,59 < 1/7$, 그리고 $0;8,34,18 > 1/7$로 언급되는데 1/7은 $8,34,17$이 순환한다(Neugerbauer, 1957). 특히, 바빌로니아인들이 목성에 관심을 갖는 이유는 네부카드네자르 1세(Nebuchadrezzar, 재위기간: B.C. 1124-B.C. 1103)가 마르두크(Marduk)를 바빌론의 수호신일 뿐 아니라 바빌로니아를 다스리는 모든 신 가운데 최고신으로 선포했으며(Cotterell, 2013), 바빌론의 수호신인 마르두크는 목성과 동일시되었기 때문인 것으로 추정할 수 있다. 따라서 고대의 바빌로니아 천문학자들은 하늘을 가로지르는 이 행성의 궤도를 주의 깊게 도표화하였다(Cowen, 2016).

나. 이븐 알 하이탐((ibn al-Haytham, 965-1039)의 원판을 이용한 구분구적법

이븐 알 하이탐은 파티마 왕조 6대 칼리프 알 하킴(al-Hākim, 재위기간: 996-1022)의 요청으로 카이로에 머물렀던 수학자이다(Corbin, 1997). 이븐 알 하이탐을 이해하기 위해서는 그가 살던 시기의 이슬람 과학을 이해할 필요가 있다. 8세기 압바스 왕조의 칼리프 알 마문은 832년 바그다드에 지혜의 전당(The House of Wisdom)을 건립하였는데(Corbin, 1997), 알 칼릴리(al-Khalili, 2011)에 따르면, 이는 단순히 책을 번역하는 곳이 아닌, 알렉산드리아 도서관과 같은 성격의 진정한 의미의 학술원에 가까웠다[4]. 지혜의 전당에 관한 현존하는 자료는 비록 적지만 지혜의 전당과 그곳에서 활동한 알 콰리즈미 등의 학자들이 얻은 명성은 완전히 정당하며, 지혜의 전당은 동쪽으로는 우즈베키스탄에서부터 서쪽으로는 스페인까지 후대의 이슬람 과학의 황금시대의 모든 업적의 씨앗이 되었다. 한편, 코르방(Corbin, 1997)은 세계에서 제일 오래된 대학인 알-아즈하르의 역사가 982년부터 시작되어 수학과 천문학 등의 발전을 가져왔다고 주장한다.

이븐 알 하이탐은 대략 1000년에 회전체의 부피를 정칙분할(regular partition)로 구하는 구분구적법을 창안하였다(Katz, 1995). 이를 위하여 거듭제곱수의 합을 구하는 식을 처음으로 유도하는데 그가 사용한 식을 일반적으로 쓰면

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} + \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} i^k\right) \tag{6}$$

이고, 그는 $n=4$와 $k=1,2,3$을 사용하였다. 그러나 각 k에 대하여 n에 관한 수학적 귀납법을 적용하면 일반화할 수 있으며 $k=3$과 $n=4$에 관하여 제곱과 세제곱을 다음과 같이 보였다.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(\frac{n}{3}+\frac{1}{3}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6},\quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n}{4}+\frac{1}{4}\right)n(n+1)n = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4} \tag{7}$$

또한, 이븐 알 하이탐은 $n=4$를 보이면서 임의의 n에 대하여 보일 수 있다고 했으며 (7)의 두 식과 (6)으로부터 다음을 얻는다.

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[(n+1)n-\frac{1}{3}\right] \tag{8}$$

식 (8)을 바탕으로 이븐 알 하이탐은 $x=ky^2$을 축 $x=kb^2$으로 한 구간 $[0,b]$에서 회전체의 체적을 구분구적법을 사용하여 구한다. 현대적 기호를 사용하면

$$\int_0^b \pi(kb^2-ky^2)^2\,dy = \frac{8}{15}\pi k^2 b^5$$

이븐 알 하이탐이 처음으로 사용한 식 (6)은 15세기에 모로코와 우즈베키스탄에서도 사용되었다(Katz, 1995).

---

3) 랍슨(E. Robson, 2008)이 제시한 연대를 따랐다.

4) 한편, 구타스(D. Gutas, 2012)는 "지혜의 전당은 도서관이었으며 알 만수르 치세에 사산왕조의 행정부를 모델로 삼은 압바스 왕조 행정부의 일부로, 하나의 부서로서 설립되었을 가능성이 높은 것"으로 주장한다.

다. 16세기 인도의 수학자들

정수의 거듭제곱의 합의 공식이 16세기의 인도에서 사용되었으며 이는 사인, 코사인, 아크탄젠트에 대한 멱급수 표현을 발전시키기 위하여 사용되었다. 이러한 멱급수들은 1530년경의 문헌에 나타나 있다(Katz, 1995). 인도에는 기원전 5세기부터 천문학 연구에 대한 전통이 있었으며 기원전 327년의 알렉산드로스의 북인도 정복 이후에 그리스의 천문학과 수학을 흡수했기 때문에 그리스의 삼각법에 익숙했다.

인도인들의 진술을 공식으로 쉽게 나타내면 다음과 같은 형태가 된다(여기서 s와 ρ는 부채꼴에서 각각 호의 길이와 부채꼴의 반지름의 길이를 뜻한다).

$$x = \cos s = \rho - \frac{s^2}{2!\rho} + \frac{s^4}{4!\rho^3} - \cdots + (-1)^n \frac{s^{2n}}{(2n)!\rho^{2n-1}} + \cdots,$$

$$y = \sin s = s - \frac{s^3}{3!\rho^2} + \frac{s^5}{5!\rho^4} - \cdots + (-1)^n \frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!\rho^{2n}} + \cdots$$

인도인들은 이 결과를 작은 호에 대한 코사인과 사인의 근삿값을 구하는 것으로 시작하였고, 이 값을 바탕으로 좀 더 정확한 근삿값을 구하는 작업을 하였다(Katz, 2009).

라. 뉴턴(I. Newton, 1642-1727)

한편, 뉴턴은 1665년에서 1670년에 미적분을 도입한다. 그의 중심 사상 중에 하나는, 그가 처음 발견한 것으로 생각한, 함수를 십진법의 전개 $a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 + \cdots$와 맥을 같이하는 급수(power series)로 표현하는 것이다. 그러나 뉴턴의 넓이의 식 $\int_0^b x^n dx = b^{n+1}/(n+1)$(여기서 $n \neq -1$인 유리수)은 1629년이 좀 지나서 페르마(P. Fermat, 1601-1665)에 의하여 완성되었는데 이 결과는 로버벌(G. Roberval, 1602-1675), 토리첼리(E. Torricelli, 1608-1647) 그리고 카발리에리(B. Cavalieri, 1598-1647)에 의하여 독립적으로 연구되었다(Kline, 1972). 카발리에리는 이 식을 1635년과 1647년에 출간한다. 페르마는 구간에서 오른쪽과 왼쪽 끝 점을 사용하고 식

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k > \frac{n^{k+1}}{k+1} > 1^k + 2^k + \cdots (n-1)^k \quad (k\text{는 양의 정수})$$

을 처음으로 이용한 것으로 추정된다(Merzbach·Boyer, 2011). 역으로, 뉴턴은 넓이의 식을 이용하여 급수를 구하는 방법을 고안했는데 예를 들어, 이항정리(Binomial theorem)를 이용하여 $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots$를 구하고 이로부터 $y = \sin^{-1}x = 2\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dx - x\sqrt{1-x^2} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$, 즉 $x = \sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 - \frac{1}{5040}y^7 + \cdots$을 얻었다(Katz, 1995).

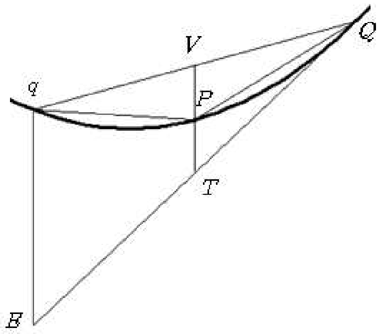
Ⅲ. 결론 및 제언

1. 결론

우리가 분석한 수학교과서의 미적분 관련 수학사의 기술 태도를 보면 ① 적분의 기원을 아르키메데스에서 찾고, ② 뉴턴과 라이프니츠를 미적분을 창안(invent)한 수학자로 소개하며, 그리고 ③ 카발리에리와 케플러 등은 미적분의 기초를 제공한 것으로 기술하고 있다. 그러나 ①과 ②는 오해이며 ③에서는 인도수학자들의 업적이 같이 소개되는 것이 바람직하다고 본다. 적분의 기원을 언급한 ①을 자세히 알아보자.

미적분의 발달과 관련하여 현재까지 우리나라 중등수학교과서에 소개되어온 자료 중에서 가장 오래된 것은 고대 그리스의 수학자인 아르키메데스(Archimedes, B.C. 287-B.C. 212)에 관한 것이다. 내용에 있어 어떤 문제점을 가지고 있는지 살펴보자.

아르키메데스는 그의 저서 “포물선이 만든 넓이(Quadrature of the parabola)”에서 [그림 Ⅲ-1] 과 같이 포물선과 높이가 같은 삼각형($\triangle qPQ$)의 넓이를 T로 할 때, 포물선 qPQ로 이루어진 넓이 $(4/3)T$를 구하였다([Heath, 2002, Proposition 16, Proposition 17]). 이를 현대적으로 표현하면 포물선 내를 삼각형으로 계속 분할하여 구한 넓이는



[그림 Ⅲ-1] 아르키메데스의 방법

$$T\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right) = T\left[\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

의 극한값 $(4/3)T$이다. 아르키메데스는 극한을 사용한 것이 아니라 극한과 관계가 없는 명제 14번과 명제 15번을 거듭 사용하여 포물선으로 이루어진 넓이가 $(4/3)T$보다 크지 않고 또한, $(4/3)T$보다 작지 않다는 방법으로 넓이 $(4/3)T$를 구한 것이다(Heath, 2002). 이와 같이 아르키메데스가 매우 창의적인 방법을 사용하여 넓이나 부피 등을 구하지만 불톤(Burton, 2007, p.209)이 주장하듯이 “아르키메데스의 아이디어를 미적분과 연결시키는 것은 매우 주의해야” 하는데, 그 이유는 미적분의 핵심에 놓여 있는 극한 개념은 아르키메데스의 논거와는 완전히 동떨어져 있기 때문이다. 따라서 교과서가 언급하는 ‘아르키메데스로부터 시작한 적분의 아이디어는 적절하지 못한 표현으로 판단된다.

우리가 Ⅱ장 2절 가, 나에서 살펴본 데로 적분의 기원과 창안 모두는 바빌로니아인(B.C. 350-B.C. 50)과 이븐 알 하이탐(1000년 경)으로 보는 것이 타당하다(Ossendrijver, 2016; Katz, 1995). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서《미적분 I》에서 정적분의 활용으로 거리에 대한 문제를 다룰 때, 바빌로니아인들의 구분구적법은 매우 훌륭한 교수·학습자료이다. 한편, 우리가 알아본 이븐 알 하이탐의 정적분 방법은 뉴턴보다 600년 이상 앞선다. 우리가 적분법 단원에서 회전체를 포함한 구분구적법을 교실에서 지도할 때, $\sum k$, $\sum k^2$, $\sum k^3$ 등을 사용하고 이로부터 극한을 구하는데, 이는 이븐 알 하이탐이 처음으로 고안한 방법 그대로이다. 카즈는 미적분의 발견(invent)을 뉴턴과 라이프니츠로 하는 것은 잘못된 역사이므로 수정되어야 한다고 주장한다(Katz, 1995).

> (...) 따라서 위험성은 없는데, 우리는 미적분학을 뉴턴과 라이프니츠가 창안했다는 서술을 역사책에서 제거하고 다시 써야 한다.

세 번째 분석 ③에서와 같이 카발리에리, 케플러 등을 언급할 때는 인도수학자들의 멱급수전개를 함께 언급하는 것이 좋다고 본다.

한편 우리는 “미분과 적분의 발견”과 “미분과 적분의 상호 역관계의 발견”을 분명히 구분해야한다. 뉴턴과 라이프니츠는 기울기와 넓이 사이의 역관계를 개척할 수 있었기 때문에 그런 입장에서 메르츠바흐와 보이어(Merzbach and Boyer, 2011, p.363)는 “뉴턴은 미적분의 효율적인 창안자로 불릴 수 있다”고 창안자 대신에 효율적인 창안자라는 수식어를 사용하는 것에 우리는 주목해야 한다. 뉴턴과 라이프니츠는 미분과 적분의 주제를 통합하고 그 둘 사이의 관계를 보였으며 이후 1700년대에 이루어진 미적분의 발전으로 역학과 천문학 전체를 심층 연구할 수 있는 가능성이 새로 열렸다. 이 가능성은 라그랑주의《해석적 역학론》과 라플라스의《천체역학론》에서 정점을 이룬다(Klein, 2012).

결론적으로 2009개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 모든《미적분 I, II》교과서의 수학사 콘텐츠를 모

두 검토한 결과 현재 학교수학은 미적분의 수학사를 “아르키메데스의 아이디어”, “카발리에리, 케플러 등의 원리 제공”, 그리고 “뉴턴과 라이프니츠의 발견” 등으로 기술함으로써 미적분과 관련된 바빌로니아, 이슬람, 그리고 인도의 수학을 배제하고 고대 그리스에서 유럽으로 수학문화의 전이를 소개하고 있음을 확인할 수 있다.

2. 제언

오센드리버(Ossendrijver, 2016)의 논문 출간을 계기로 수학교과서에, 우리가 ‘II장 2’에서 언급한. 바빌로니아, 이집트, 그리고 인도로 이어지는 수학문화의 전이가 건설적으로 도입되어야한다. 특히《미적분 I》의 ‘정적분’ 단원이나 ‘속도와 거리’ 단원 등에서 바빌로니아인의 목성궤도의 계산과 관련된 사다리꼴을 이용한 구분구적법이 소개되고 회전체의 체적을 구하는 구분구적법에서는 이집트에서 이루어진 이븐 알 하이탐의 방법이 수학사 입장에서 소개되는 것이 바람직하다.

이와 같은 교과서의 소개는 향후 적분이 역사발생 원리에 따른 수학교수·학습의 구체적인 예로서 사용될 수 있다. 그 이유는 적분을 발생한 것으로 파악하고 그 발생과정을 학습과정에서 재현할 수 있기 때문이다. 한경혜(2006)가 제시한 수학사 활용의 기준을 고려할 때, 적분은 역사적으로 성장해 왔고, 자연과학(천문학)과의 상호관계에 대하여 탐색할 수 있으며, 그리고 이를 통하여 교사의 교수방법론의 확대를 꾀할 수 있다. 한편, 주미경 외(2012)가 지적한 교육과정 총론에서 강조하는 ‘문화의 다양성 이해’를 다루는데 적분은 적합한 주제이며 아시아·아프리카적 가치를 학생들이 접할 수 있는 수학, 자연과학, 그리고 세계사의 융복합 교육의 예로 사용될 수 있다고 본다.

참 고 문 헌

권오남 외 (2013). ‘수학사탐구형’ 고등학교 스토리텔링 모델 교과서 개발 사례. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 27(3), 221-248.

Kwon, O. *et al.* (2013). Development of the model textbook based on storytelling : the case of 'Inquiry into History of Mathematics' type, *J. Korean Soc. Math Ed Ser. E: Communications of Mathematical Education,* 27(3), 221-248.

김원경 외 (2014a). 고등학교 미적분Ⅰ. 서울: 비상교육.

Kim, W. *et al.* (2014a). *High school calculus I*, Seoul: Visang Edu.

김원경 외 (2014b). 고등학교 미적분Ⅱ. 서울: 비상교육.

Kim, W. *et al.* (2014b). *High school calculus II*, Seoul: Visang Edu.

김창동 외 (2014a). 고등학교 미적분Ⅰ. 서울: 교학사.

Kim, C. *et al.* (2014a). *High school calculus I*, Seoul: Kyohak-Sa.

김창동 외 (2014b). 고등학교 미적분Ⅱ. 서울: 교학사.

Kim, C. *et al.* (2014b). *High school calculus II*, Seoul: Kyohak-Sa.

교육부 (2016). 수학 4-1, 서울: ㈜천재교육.

The Ministry of Education. (2016). *Elementary school mathematics 4-1*, Seoul: Chunjae Edu.

박제남・장동숙 (2015). 중등 수학교과서가 다루는 수학사의 비판과 대안. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 29(2), 157-196.

Park, J. and Jang, D. (2015). Study on criticism and alternative on the history of mathematics described in the secondary school mathematics textbooks, *J. Korean Soc. Math Ed Ser. E: Communications of Mathematical Education,* 29(2), 157-196.

박호연 (2015). 중등 수학 교과서 분석을 통한 수학사 사용 현황 조사 및 자료 제시. 이화여자대학교 석사학위논문.

Park, H. (2015). *Research on the uses of the history of mathematics through the analysis of secondary school mathematics textbooks and the supporting data*, The Graduate school of Education Ewha Womans Univ..

서보억 (2013). 중학교 기하영역 등분할 개념에 대한 수학사적 분석 및 확장에 대한 연구. 한국수학사학회지, 26(1), 33-56.

Suh, B. (2013). A historical process analysis and extension of division into equal parts in middle school geometry, *Korean J. for History of Mathematics*, 26(1), 33-56.

신항균 외 (2014). 고등학교 미적분 II. 서울: ㈜지학사.

Shin, H. *et al.* (2014). *High school calculus II,* Seoul: Jihak Pub. Com.

우정호 외 (2014a). 고등학교 미적분 I. 서울: 두산동아.

Woo, J. *et al.* (2014a). *High school calculus I*, Seoul: Doosan Dongah.

우정호 외 (2014b). 고등학교 미적분 II. 서울: 두산동아.

Woo, J. *et al.* (2014b). *High school calculus II*, Seoul: Doosan Dongah.

이강섭 외 (2014). 고등학교 미적분 I. 서울: ㈜ 미래엔.

Lee, K. *et al.* (2014). *High school calculus I*, Seoul: Mirae N Com.

이재학 외 (2013). 중학교 스토리텔링 모델교과서 개발(한국과학창의재단 2013-17). 한국과학창의재단.

Lee, J. *et al.* (2013). *Development of textbook model for middle school mathematics based on storytelling*, Korea Foundation for the Advancement Science & Creativity.

장혜원 (2006). 청소년을 위한 동양수학사. 서울: 두리미디어.

Jang, H. (2006). *Oriental history of mathematics for youth*, Seoul: Dooree Medea.

정수용 · 주미경 · 송륜진 (2014). 수학교과서 속 수학자들에 대한 비판적 분석 -융합적 협업으로서 다문화교육 관점에서-. 교과교육학연구, 18(2), 441-470.

Jeong, S., Ju, M. and Song, R. (2014). A critical analysis of the didactic use of historical mathematicians in seventh grade mathematics textbooks : from the perspective of multicultural education as inclusive cooperation, *J. Research in Curriculum Instruction*, 18(2), 441-470.

주미경 · 문종은 · 송륜진 (2012). 수학교과와 융복합교육: 담론과 과제. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 14(1), 165-190.

Ju, K., Moon, J. and Song, R. (2012). Convergence education in mathematics: Issues and tasks, *J. Kprea Soc. of Ed. Studies in Math, School Mathematics*, 14(1), 165-190.

한경혜 (2006). 수학과 교수 · 학습에서 수학사 활용의 교육적 함의. 한국수학사학회지, 19(4), 31-62.

Han, K. (2006). Didactical meaning of using history of mathematics in teaching and learning mathematics, *Korean J. for History of Mathematics*, 19(4), 31-62.

황선욱 외 (2014). 고등학교 미적분II. 서울: 좋은책 신사고.

Hwang, S. *et al.* (2014). *High school calculus II*, Seoul: Sinsago.

Brummelen, G. V. (2009). *The mathematics of the heavens and the earth*, Princeton: Princeton Univ. Press.

Burton, D. (2007). *The history of mathematics*, 6th ed., Boston: McGraw-Hill.

Chace, A. (1979). *The Rind mathematical papyrus*, Ohio: NCTM.

Corbin, H. (1997). 이슬람 철학사(김정위 옮김). 서울: 서광사.

Corbin, H. (1964). *Histoire de la philosopbie Islamique*, Paris: Gallimard.

Cotterell, A. (2013). 아시아 역사(김수림 옮김). 서울: 지와 사랑.

Cotterell, A. (2011). *Asia: A concise history*, New York: Wiley.

Cowen, R. (2016). Ancient Babylonians took first steps to calculus, *Science,* **351**, 435.

Friberg, J. (2007a). *A remarkable collection of Babylonian mathematical texts*, New York: Springer.

Friberg, J. (2007b). *Amazing traces of a Babylonian origin in Greek mathematics*, New Jersey: World Scientific.

Gandz, S. (1937). The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek, and early Arabic algebra, *Osiris,* **3**, 405-557.

Grugnetti, L. (2010). The history of mathematics and its influence on pedagogical problems. *MAA Notes,* **51**, 29-35.

Gutas, D. (2012). 그리스 사상과 아랍문명(정영목 옮김). 경기도: 글항아리.

Gutas, D. (1998). *Greek thought, Arabic culture*, London: Routledge.

Heath, T(Edited). (2002). *The works of Archimedes*, New York: Dover.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, widths, surfaces: A portrait of Old Babylonian algebra and its kin*, New York: Springer.

Huber, P. (1955). Zu einem mathematischen Keilschrirttext (VAT 8512), *Isis,* **46**, 104-106.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using History in Mathematics *Education. Educational Studies in Mathematics*, **71**, 235-261.

Katz, V. (1995). Ideas of calculus in Islam and India. *Math. Mag,* **68**, 163-174.

Katz, V. (2009). *A history of mathematics: An introduction*. 3rd ed. New York: Addison-Wesley.

al-Khalili, J. (2011). *The house of wisdom*, London: Penguin Books.

Klein, F. (2012). 19세기 수학의 발전에 대한 강의(한경혜 옮김). 경기도: 나남.

Klein, F. (1926). *Vorlesungen über die entwicklung der mathematik Im 19. Jahrhundert*, Berlin: Springer.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times, Vol. 1*, New York: Oxford Univ. Press.

Merzbach, U. and Boyer, C. (2011). *A history of mathematics*, 3rd ed., New Jersey: Wiley.

Midonick, H.(editor). (1965). *The treasury of mathematics*, New York: Philosophical Library.

Neugerbauer, O. (1957). *The exact sciences in antiquity*, New York: Dover..

Ossendrijver, M. (2016). Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter's position from the area under a time-velocity graph, *Science* **351**, 482-484.

Robson, E. (2008). *Mathematics in ancient Iraq*, New Jersey: Princeton University.

Rudman, P. (2010). *The Babylonian theorem,* New York: Prometheus Books.

Siu. M. K. (2010). The ABCD of Using history in the (Undergraduate) Classroom. *MAA Notes,* **51**, 3-9.

Solė, R. (2013). 나폴레옹 이집트 원정기(이상빈 옮김). 경기도: 아테네.

Solė, R. (1998). *Les savants de Bonaparte*, Paris: Editions du Seuil.

Van der Waerden, B. L. (1988). *Science awakening I*, 4th ed., New Jersey: Kluwer Academic Publishers.

Criticism and alternatives of calculus history described by secondary school mathematics textbooks
- Focusing on the history of calculus until the 17th century -

Kim, Sang Hoon
Department of mathematics, Inha University, Incheon Korea
E-mail: kshbear@sen.go.kr

Park, Jeanam†
Department of mathematics education, Inha University, Incheon Korea
E-mail: jnpark@inha.ac.kr

In this paper, we examine how secondary school mathematics textbooks on calculus introduce the history of calculus. In order to identify the problem, we consider the Babylonian integration by trapezoidal rule, which was made to calculate the location of Jupiter in 350-50 B.C., and the integration by the method of the rotating plate of ibn al-Haytham in Egypt, about 1000 years. In conclusion, our secondary school mathematics textbooks describe Newton and Leibniz as inventing calculus and place their roots in ancient Greece. The origin of the calculus is in Babylonia and the Fāṭimah Dynasty (909-1171) (Egypt) and it is desirable that the calculus is developed in Europe after the development of the power series in India, and that the value of Asia Africa is introduced in the textbooks.

* ZDM Classification : I14, A34
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97-01, 97-03, 97U20
* Key Words : History of Mathematics, Learning Mathematics, historico-genetic principal, convergence education
† Corresponding author