韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學教育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2017.31.2.103
제 31집 제 2호, 2017. 5. 103-121

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 31, No. 2, May. 2017. 103-121

택시기하에서 이차곡선의 정의 방법에 따른 그래프의 개형 탐구

허 남 구 (대전송촌고등학교)

택시기하는 수학 영재를 위한 기하 영역의 학습 자료를 개발함에 있어 사용되는 대표적인 비유클리드 기하학이다. 택시기하에서 이차곡선과 관련된 수학 영재 프로그램은 기하대수적 정의에 따른 이차곡선의 탐구만 이루어져 있었다. 이에 본 연구에서는 유클리드 기하의 3가지 정의 방법(기하대수적 정의, 이심률 정의, 원뿔곡선의 정의)을 택시기하에서 적용시켜 나타난 이차곡선 그래프의 개형을 살펴보았다.

Ⅰ. 서론

중고등학교 평준화교육이 실시됨과 동시에 수월성 교육을 위한 영재교육에 대한 관심이 고조되고 있으며 현재 우리나라의 영재교육은 과학고등학교, 영재학교, 교육청 부설 영재교육원과 대학교 부설 영재교육원, 학교 단위 영재 학급에서 이루어지고 있다. 다양한 교육 기관에서 다양한 수준의 영재 교육이 효과적으로 이루어지기 위해서는 영재 학생이 지닌 수학적 잠재력을 발휘할 수 있는 적절한 교수 학습 자료를 제공해주는 것이 중요하다(이경화, 2003). 즉, 수학 영재를 위한 교수 학습 자료는 영재 학생의 수준, 교육 기관, 학년, 수업 주제, 수업 목적에 따라 다양하게 개발되어 제공되어야 한다. 하지만 수학 영재 교육을 담당하고 있는 다수의 교사들은 교수 학습 자료를 한국교육개발원에서 개발한 자료에 의존하고 있으며 영재 학생에게 적합한 교수 학습 자료를 개발하는 것에 대해 어려움을 느끼고 있다(배수경, 2006; 김대현, 2011).

수학 영재를 위한 교수 학습 자료 개발에 있어 기하 영역은 다양한 장점을 지니고 있다. 기하 영역은 실생활과 관련된 소재가 많아 수학적 모델링을 학습하는데 도움을 줄 수 있으며 교구의 활용을 통해 학생들이 수학적 탐구를 할 수 있도록 개발할 수 있다(허남구, 류희찬, 2015a; 허남구, 류희찬, 2015b). 또한 학생들은 수학적 추론을 통해 수학적 원리와 법칙을 발견할 수 있으며 이를 일반화하고 정당화할 수 있다(에르든예프, 한인기, 2005; 이경화, 2009). 이러한 점을 바탕으로 기하 영역과 관련된 수학 영재를 위한 교수 학습 자료가 다수 개발되었으나(전선미, 유원석, 2011), 기하 영역에서 개발된 교수 학습 자료는 대부분 유클리드 기하에만 치우쳐있다는 문제점이 있다(김성식, 2013).

학생들은 비유클리드 기하의 학습을 통해 유클리드 기하와의 차이점을 인식하고 유클리드 기하 특유의 불변성을 찾음으로써 유클리드 기하에 대해 보다 깊은 이해를 할 수 있다(Kullberg, 2010; Lo, 2012; Marton & Booth, 1997). 따라서 학생들이 유클리드 기하에 대해 의미있게 학습하기 위해 비유클리드 기하를 학습할 필요가 있다(Krause, 1986; 장경윤, 1994). 하지만 대표적인 비유클리드 기하인 타원기하와 쌍곡기하는 학생들이 이해하기에 어렵고 유클리드 기하와 너무 많은 부분에서 차이가 나 교수 학습 자료의 소재로 활용하기 힘들다. 반면 택시기하는 유클리드 기하와 공리 구조가 매우 유사하고 실생활에서 유의미하게 활용될 수 있으며 유클리드 기하의 기초만 알면 이해할 수 있다는 점에서 수학 영재 학생을 위한 교수 학습 자료의 소재로 활용될 수 있다

* 접수일(2016년 11월 28일), 심사(수정)일(2017년 2월 24일), 게재확정일(2017년 4월 26일)
* ZDM분류 : G94
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 택시기하, 이차곡선, 기하대수적 정의, 이심률 정의, 원추곡선 정의

(Krause, 1986; 곽경민 외, 2010; 장경윤, 1994).

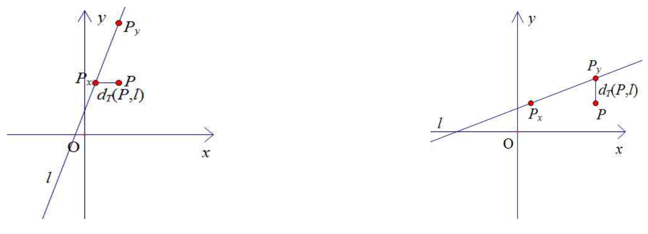
택시기하는 수학 영재를 위한 교수 학습 자료의 개발은 아직 부족하지만 최근 지속적으로 관심을 받고 있는 분야이다(곽경민 외, 2010; 김성식, 2013; 김애리, 2014; 김향숙 외, 2013; 안지은, 2012; 양희석 외, 2013; 이승우 외, 2013; 허수진, 2010). 곽경민 외(2010)는 유클리드 기하에서 성립하는 기하학적 성질들이 택시기하에서 보존되는지를 연구하였으며, 양희석 외(2013)는 택시기하에서 램니스케이트와 아폴로니우스의 원의 그래프의 개형을 알아보았다. 김애리(2014)는 학생들의 학습 동기 유발을 위한 교수학습자료로서 택시기하에서의 택시원과 수직이등분선을 탐구하였으며, 이승우 외(2013)는 택시기하에서 삼각형의 외심에 대하여 연구하였다. 또한 김성식(2013), 김향숙 외(2013), 안지은(2012), 허수진(2010)의 연구에서는 학생들이 기하대수적으로 정의된 이차곡선을 탐구할 수 있도록 교수학습자료를 개발하였다. 최근의 연구에서 알 수 있듯이, 택시기하를 소재로 한 연구는 유클리드 기하에서의 성질을 택시기하에서 탐구하는 연구와 택시기하에서의 이차곡선에 대한 연구로 나눌 수 있다. 특히, 택시기하에서 이차곡선을 탐구하는 교수 학습 자료는 수학 영재 학생들이 유클리드 기하와 택시기하에서 기하대수적 정의에 의해 작도한 이차곡선의 그래프가 서로 다르게 표현된다는 사실을 탐구할 수 있도록 도와주고 있다. 하지만 학생들이 유클리드 기하에서 서로 다른 세 가지 정의(기하대수적 정의, 이심률의 정의, 원뿔곡선의 정의)에 의해 표현되는 이차곡선이 동일하다는 성질이 택시기하에서도 성립하는지를 탐구할 기회를 제공받지 못하고 있다. 따라서 수학 영재 학생들이 택시기하에서 세 가지 정의 방법에 따른 이차곡선의 그래프를 탐구하고, 이들 사이의 관계를 탐구하기 위한 교수학습자료를 개발할 필요가 있다(천희영, 2008). 이에 본 연구에서는 택시기하에서 세 가지 정의 방법에 따른 이차곡선의 그래프의 개형을 알아보고자 한다.

Ⅱ. 택시거리와 택시기하

평면상의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,y_1),\mathrm{B}(x_2,y_2)$에 대하여 유클리드 거리는 $D_E=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$로 정의되며 택시거리는 $D_T=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$로 정의된다. 유클리드 거리와 택시거리는 모두 거리함수를 만족하게 되며, 유클리드 거리와 택시거리를 이용한 기하를 각각 유클리드 기하와 택시기하라 한다(Krause, 1986; 장경윤, 1994). 본 연구에서 사용되는 택시기하의 기본 개념은 다음과 같다.

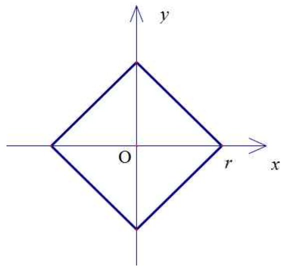
1) 점과 직선 사이의 거리 : 한 점 P와 직선 l의 택시거리는 $d_T(\mathrm{P},l)=\min_{\mathrm{X}\in l}d_T(\mathrm{P},\mathrm{X})$로 정의된다. 한 점 P를 지나면서 x축에 평행한 직선을 l_2, y축에 평행한 직선을 l_3라 하고, 직선 l과 두 직선 l_2, l_3의 교점을 각각 P_x, P_y라 하면 $d_T(\mathrm{P},l)=\min_{\mathrm{X}\in l}d_T(\mathrm{P},\mathrm{X})$은 직선 l의 기울기에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있으며 이를 시각적으로 표현하면 [그림 Ⅱ-1]과 같다.

$$d_T(\mathrm{P},l)=\begin{cases} d_T(\mathrm{P},\mathrm{P}_x) & |l\text{의 기울기}|\geq 1 \\ d_T(\mathrm{P},\mathrm{P}_y) & |l\text{의 기울기}|<1 \end{cases}$$



[그림 Ⅱ-1] 직선의 기울기에 따른 점과 직선사이의 택시거리(기울기≥1, 기울기<1)

2) 택시원 : 택시원은 평면상의 한 점에서 일정한 택시거리를 갖는 점들의 집합이다. 즉, 중심이 P이고 반지름의 길이가 r인 택시원은 $\{X|d_T(P,X)=r\}$이고, 택시원의 그래프는 [그림 Ⅱ-2]와 같이 표현된다.



[그림 Ⅱ-2] 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 택시원

Ⅲ. 택시기하에서 기하대수적 정의에 따른 이차곡선의 그래프

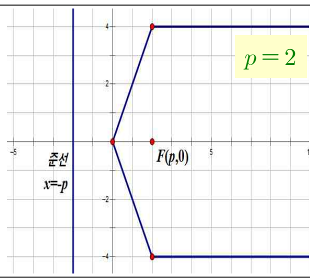
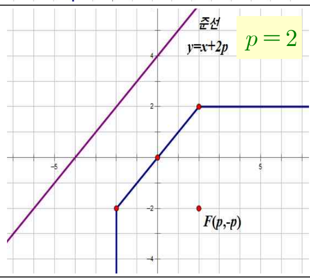
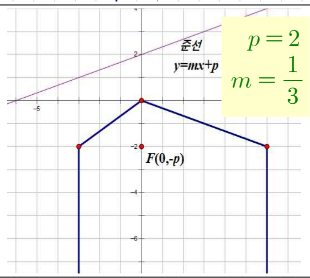
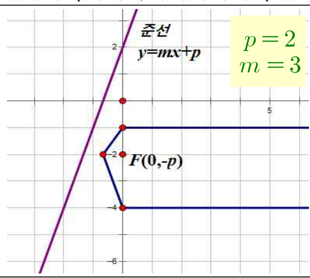
1. 기하대수적 정의에 따른 이차곡선의 분류

택시기하에서 이차곡선의 기하대수적 정의는 다음과 같다. 포물선은 '초점 F와 준선 l에 대하여 같은 택시거리에 있는 점 P의 자취', 타원은 '서로 다른 두 초점 F, F′에 대하여 초점으로부터 택시거리의 합이 일정한 점들의 자취', 쌍곡선은 '서로 다른 두 초점 F, F′에 대하여 초점으로부터 택시거리의 차가 일정한 점들의 자취'로 정의된다. 본 장에서는 택시기하에서 두 점 사이의 거리가 평행이동과 y축 대칭의 변환에 대한 불변성을 바탕으로 포물선은 준선의 기울기가 0 또는 양수인 경우만 다룰 것이며, 타원과 쌍곡선은 두 초점 F와 F′이 원점에 의해 대칭인 경우만 다룰 것이다. 이는 Krause(1986)의 연구 결과로부터 알려져 있으며 택시기하에서 이차곡선과 관련된 교수학습자료의 개발 연구(김성식, 2013; 김향숙 외, 2013; 안지은, 2012; 허수진, 2010)에서도 과제로 제시되어 있다.

2. 포물선의 그래프

기하대수적 정의에 따른 포물선의 정의를 살펴보면 '초점 F와 준선 l에 대하여 점 P와 직선 l 사이의 택시거리를 d라 할 때, $d_T(P,F)=d$를 만족하는 점 P의 자취'로 나타낼 수 있다. 유클리드 기하에서와 달리 택시기하에서는 준선의 기울기에 따라 포물선의 개형이 다르게 나타난다. 준선의 기울기에 따라 주어진 초점과 준선에 대한 포물선의 방정식을 구하고 이를 구간별로 영역을 나누어 그래프로 나타내면 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 III-1> 포물선의 그래프

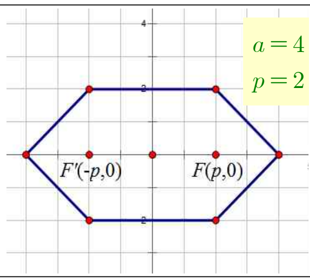
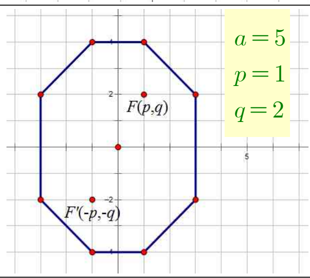
준선의 기울기	초점	준선	도형의 방정식	그래프의 개형
0	$(p,0)$	$x=-p$	$\lvert x-p\rvert+\lvert y\rvert=\lvert x+p\rvert$	
1	$(p,-p)$	$y=x+2p$	$\lvert x-p\rvert+\lvert y+p\rvert=\lvert x-y+2p\rvert$	
$0<$ 기울기 <1	$(0,-p)$	$y=mx+p$ $(0<m<1)$	$\lvert x\rvert+\lvert y+p\rvert=\lvert mx-y+p\rvert$	
기울기 >1	$(0,-p)$	$y=mx+p$ $(m>1)$	$\lvert x\rvert+\lvert y+p\rvert=\frac{1}{m}\times\lvert mx-y+p\rvert$	

3. 타원의 그래프

기하대수적 정의에 따른 타원의 정의를 살펴보면 '서로 다른 두 초점 F와 F′에 대하여 초점으로부터 택시거리의 합이 일정한 점 P의 자취'로 나타낼 수 있다. 유클리드 기하에서와 달리 두 초점의 위치에 따라 타원의 개

형이 다르게 나타난다. 두 초점의 위치에 따라 타원의 방정식을 구하고 이를 구간별로 영역을 나누어 그래프로 나타내면 <표 Ⅲ-2>와 같다.

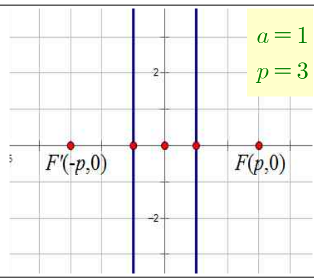
<표 Ⅲ-2> 거리의 합이 $2a$인 타원의 그래프

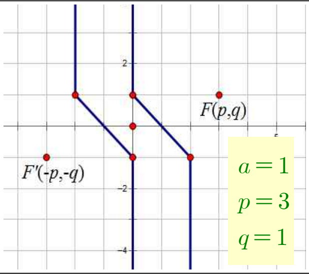
초점의 좌표	도형의 방정식	그래프의 개형
$(p,0)$, $(-p,0)$	$\|x-p\|+\|x+p\|+2\|y\|=2a$	
(p,q), $(-p,-q)$	$\|x-p\|+\|x+p\|+\|y-q\|+\|y+q\|=2a$	

4. 쌍곡선의 그래프

기하대수적 정의에 따른 쌍곡선의 정의를 살펴보면 '서로 다른 두 초점 F와 F′에 대하여 초점으로부터 택시거리의 차가 일정한 점 P의 자취'로 나타낼 수 있다. 유클리드 기하에서와 달리 두 초점의 위치에 따라 쌍곡선의 개형이 다르게 나타난다. 두 초점의 위치에 따라 쌍곡선의 방정식을 구하고 이를 구간별로 영역을 나누어 그래프로 나타내면 <표 Ⅲ-3>과 같다.

<표 Ⅲ-3> 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 그래프

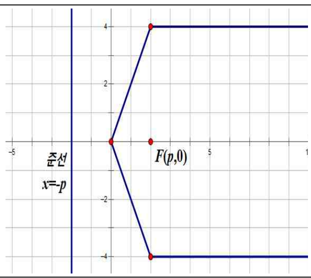
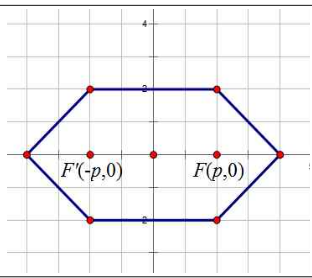
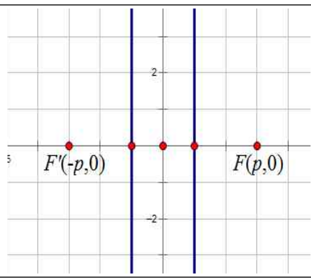
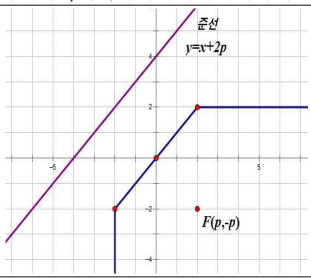
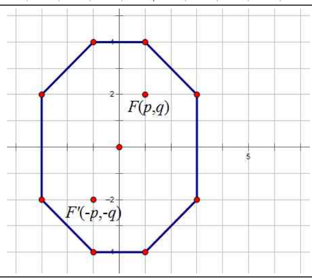
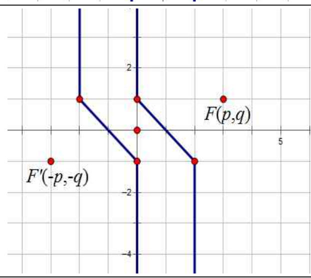
초점의 좌표	도형의 방정식	그래프의 개형
$(p,0)$, $(-p,0)$	$\|\|x-p\|-\|x+p\|\|=2a$	

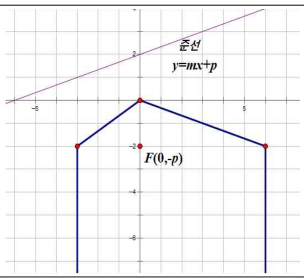
초점의 좌표	도형의 방정식	그래프의 개형
(p,q), $(-p,-q)$	$\lvert(\lvert x-p\rvert+\lvert y-q\rvert)-(\lvert x+p\rvert+\lvert y+q\rvert)\rvert=2a$	

5. 정리

평면상의 두 점 사이의 택시거리가 평행이동과 y축 대칭의 두 변환에 대해 불변성을 바탕으로 포물선은 직선 l의 기울기가 0 또는 양수인 경우에서만 다루었으며, 타원과 쌍곡선은 두 초점 F와 F′이 원점에 의해 대칭인 경우만 다루었다. 또한 포물선의 경우, 평면상의 두 점 사이의 택시거리가 $y=x$의 대칭 변환에 대해 불변성을 갖는다는 성질을 이용하면 준선의 기울기가 $a(>1)$인 경우와 준선의 기울기가 $\frac{1}{a}$인 경우의 그래프의 개형이 같다. 이를 바탕으로 기하대수적 정의에 의한 이차곡선의 그래프의 개형은 <표 Ⅲ-4>와 같이 분류할 수 있다.

<표 Ⅲ-4> 기하대수적 정의에 따른 이차곡선의 그래프

	포물선	타원	쌍곡선
1			
2			

	포물선	타원	쌍곡선
3		–	–

Ⅳ. 택시기하에서 이심률의 정의에 따른 이차곡선의 그래프

1. 이심률의 정의에 따른 이차곡선의 분류

초점 F와 준선 l에 대하여 점 P와 직선 l 사이의 택시거리를 d라 할 때, $e=\dfrac{d_T(\mathrm{P},\mathrm{F})}{d}$를 이심률이라 한다. 이 때, $0<e<1$이면 타원, $e=1$이면 포물선, $e>1$이면 쌍곡선이라 한다. 본 장에서는 택시기하에서 두 점 사이의 거리가 평행이동과 y축 대칭의 변환에 대한 불변성을 바탕으로 준선의 기울기가 0 또는 양수인 경우만 다루어 탐구할 것이다.

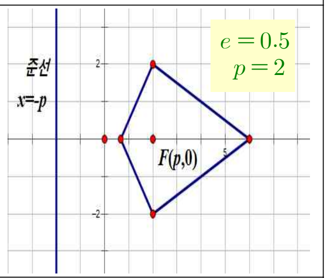
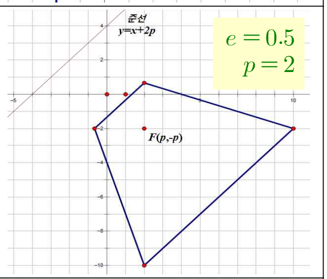
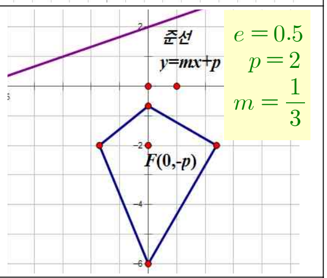
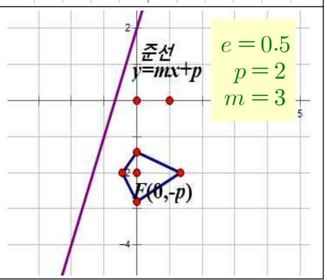
2. 포물선의 그래프

이심률에 따른 포물선의 정의를 살펴보면 '초점 F와 준선 l에 대하여 점 P와 직선 l 사이의 택시거리를 d라 할 때, $d_T(\mathrm{P},\mathrm{F})=d$를 만족하는 점 P의 자취'로 나타낼 수 있다. 이는 포물선의 기하대수적 정의와 동치이므로 준선의 기울기에 따른 포물선의 그래프는 <표 Ⅲ-1>과 같다.

3. 타원의 그래프

이심률에 따른 타원의 정의는 '초점 F와 준선 l에 대하여 점 P와 직선 l 사이의 거리를 d라 할 때, $e=\dfrac{d_T(\mathrm{P},\mathrm{F})}{d}$의 값이 1보다 작은 상수를 갖도록 하는 점 P의 자취'이다. 유클리드 기하에서와 달리 택시기하에서는 준선의 기울기에 따라 타원의 개형이 다르게 나타난다. 준선의 기울기에 따라 주어진 초점과 준선에 대한 타원의 방정식을 구하고 이를 구간별로 영역을 나누어 그래프로 나타내면 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 타원의 그래프

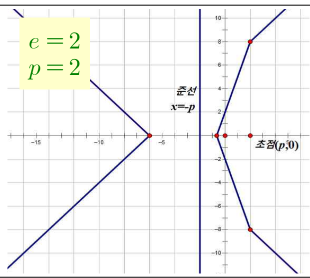
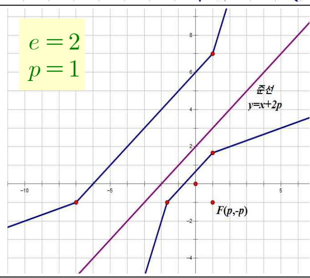
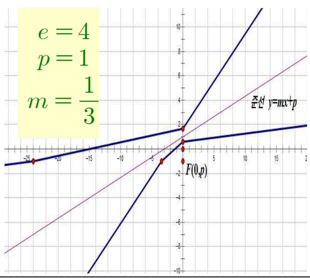
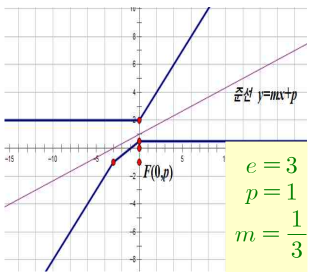
준선의 기울기	초점	준선	도형의 방정식	그래프의 개형
0	$(p,0)$	$x=-p$	$\lvert x-p\rvert+\lvert y\rvert=e\lvert x+p\rvert$	
1	$(p,-p)$	$y=x+2p$	$\lvert x-p\rvert+\lvert y+p\rvert=e\lvert x-y+2p\rvert$	
$0<$기울기 <1	$(0,-p)$	$y=mx+p$ $(0<m<1)$	$\lvert x\rvert+\lvert y+p\rvert=e\lvert mx-y+p\rvert$	
기울기>1	$(0,-p)$	$y=mx+p$ $(m>1)$	$\lvert x\rvert+\lvert y+p\rvert=\frac{e}{m}\times\lvert mx-y+p\rvert$	

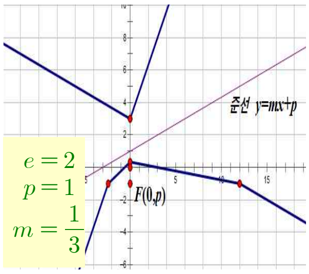
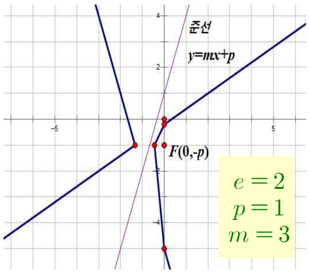
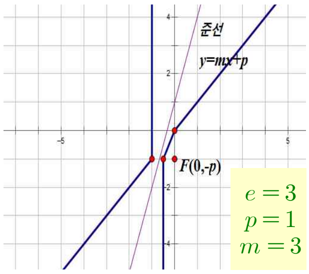
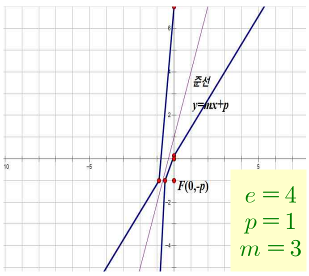
4. 쌍곡선

이심률에 따른 쌍곡선의 정의는 ‘초점 F와 준선 l에 대하여 점 P와 직선 l 사이의 거리를 d라 할 때, $e=\dfrac{d_T(\mathrm{P},\mathrm{F})}{d}$의 값이 1보다 큰 상수를 갖도록 하는 점 P의 자취’이다. 유클리드 기하에서와 달리 택시기하에

서는 준선의 기울기에 따라 쌍곡선의 개형이 다르게 나타난다. 준선의 기울기에 따라 주어진 초점과 준선에 대한 쌍곡선의 방정식을 구하고 이를 구간별로 영역을 나누어 그래프로 나타내면 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 쌍곡선의 그래프

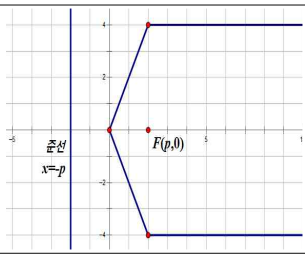
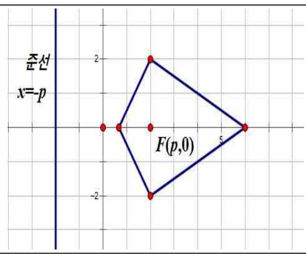
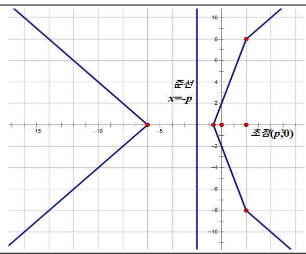
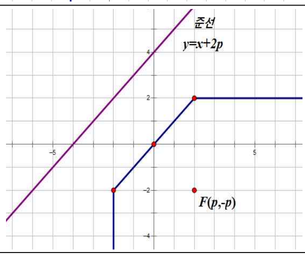
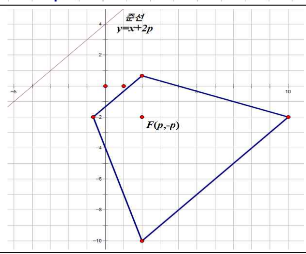
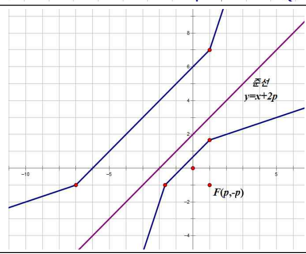
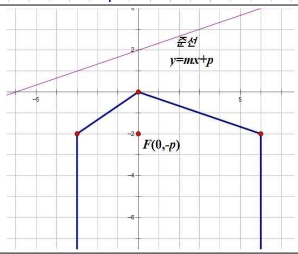
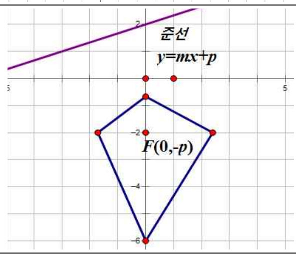
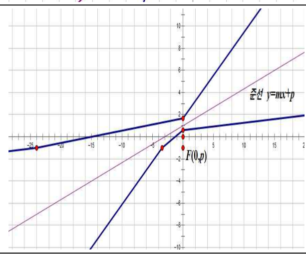
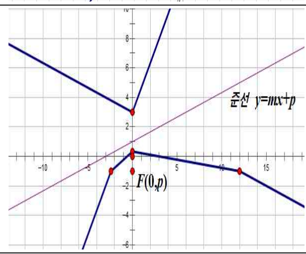
준선의 기울기	초점	준선	도형의 방정식	그래프의 개형
0	$(p,0)$	$x=-p$	$e(\|x-p\|+\|y\|)=\|x+p\|$	
1	$(p,-p)$	$y=x+2p$	$e(\|x-p\|+\|y+p\|)=\|x-y+2p\|$	
$0<$기울기<1	$(0,-p)$	$y=mx+p$ $(0<m<1)$	$e(\|x\|+\|y+p\|)=\|mx-y+p\|$	Case 1 : $me>1$  Case 2 : $me=1$ 

<table>
<tr><th>준선의 기울기</th><th>초점</th><th>준선</th><th>도형의 방정식</th><th>그래프의 개형</th></tr>
<tr><td>$0 <$ 기울기 < 1</td><td>$(0,-p)$</td><td>$y = mx + p$
$(0 < m < 1)$</td><td>$e(|x| + |y+p|) = |mx - y + p|$</td><td>Case 3 : $0 < me < 1$
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">기울기 > 1</td><td rowspan="3">$(0,-p)$</td><td rowspan="3">$y = mx + p$
$(m > 1)$</td><td rowspan="3">$e(|x| + |y+p|)$
$= \frac{1}{m} \times |mx - y + p|$</td><td>Case 1 : $m > e$
</td></tr>
<tr><td>Case 2 : $m = e$
</td></tr>
<tr><td>Case 3 : $m < e$
</td></tr>
</table>

5. 정리

평면상의 두 점 사이의 택시거리가 평행이동과 y축 대칭의 두 변환에 대해 불변성을 바탕으로 직선 l의 기울기가 0 또는 양수인 경우에서만 다루었다. 이심률의 정의로부터 도형의 방정식을 도출하는 과정에서 직선 l의 기울기에 따라 점과 직선 사이의 택시거리를 이용하였으며 구간별로 영역을 나누어 식을 계산하였다. 하지만 그래프의 개형을 살펴보는 과정에서는 평면상의 두 점 사이의 택시거리가 $y=x$의 대칭 변환에 대해 불변성을 갖는다는 성질을 이용하면 보다 쉽게 구할 수 있다. 이를 바탕으로 이심률의 정의에 의한 이차곡선의 그래프의 개형은 <표 Ⅳ-3>과 같이 분류할 수 있다.

<표 Ⅳ-3> 이심률 정의에 따른 이차곡선의 그래프

<table>
<tr><th></th><th>포물선</th><th>타원</th><th>쌍곡선</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>-</td><td>-</td><td>
</td></tr>
</table>

Ⅴ. 택시기하에서 원뿔곡선의 정의에 따른 이차곡선의 그래프

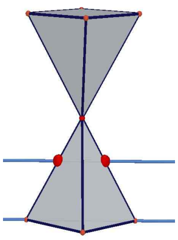
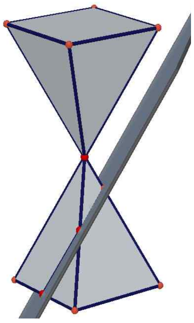
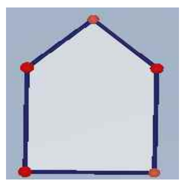
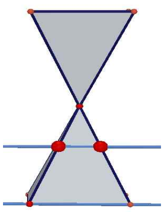
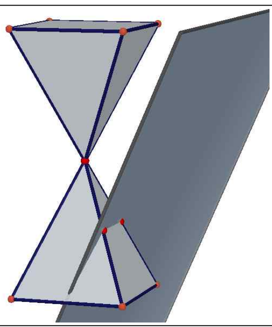
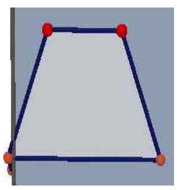
1. 택시원뿔의 절단면으로서 이차곡선의 분류

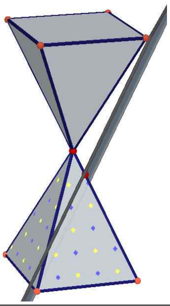
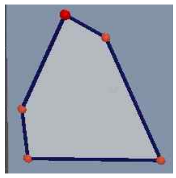
택시기하에서 택시원뿔은 밑면이 택시원인 뿔을 의미한다. 이는 유클리드기하에서 밑면이 정사각형인 사각뿔과 같다. 따라서 택시원뿔의 절단면으로서 이차곡선을 분류하는 것은 유클리드 기하에서 밑면이 정사각형인 사각뿔의 절단면으로서 분류하는 것과 같다. 택시원뿔의 정의에 따른 이차곡선은 옆면과 절단의 기준이 되는 평면이 밑면과 이루는 각을 기준으로 분류된다. 택시원뿔의 옆면과 밑면이 이루는 이면각의 크기를 θ라 하고, 절단의 기준이 되는 평면과 밑면이 이루는 이면각의 크기를 α라 할 때, $\theta=\alpha$이면 포물선, $\theta>\alpha$이면 타원, $\theta<\alpha<\frac{\pi}{2}$이면 쌍곡선이 나타난다. 본 장에서는 입체도형의 절단면을 관찰하기 위하여 Cabri 3D를 사용하였다.

2. 포물선의 그래프

원뿔곡선의 절단면으로서 포물선의 정의는 택시원뿔의 옆면과 밑면이 이루는 이면각의 크기와 절단의 기준이 되는 평면과 밑면이 이루는 이면각의 크기가 같은 경우 나타나는 절단면의 모양을 의미한다. 포물선의 그래프의 모양을 평면 위의 두 점의 위치 관계에 따라 그 결과는 <표 Ⅴ-1>과 같다.

<표 Ⅴ-1> 포물선의 그래프

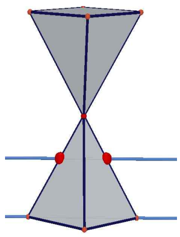
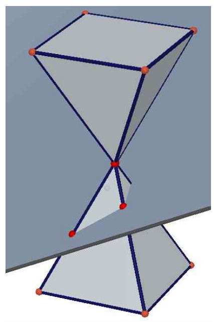
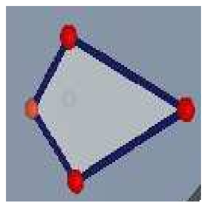
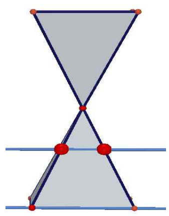
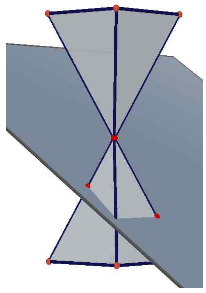
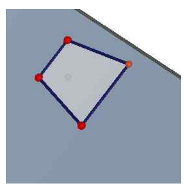
평면 위의 두 점의 선정 기준	택시원뿔과 평면	절단면의 모양
밑면의 대각선과 평행하도록 서로 다른 두 옆면의 모서리 위의 점을 선택할 경우 		
밑면의 모서리와 평행하도록 한 옆면의 모서리 위의 두 점을 선택할 경우 		

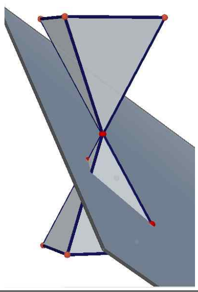
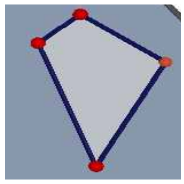
평면 위의 두 점의 선정 기준	택시원뿔과 평면	절단면의 모양
위의 두 경우가 아닐 때		

3. 타원의 그래프

원뿔곡선의 절단면으로서 타원의 정의는 택시원뿔의 옆면과 밑면이 이루는 이면각의 크기가 절단의 기준이 되는 평면과 밑면이 이루는 이면각의 크기보다 클 때 나타나는 절단면의 모양을 의미한다. 타원의 그래프의 모양을 평면 위의 두 점을 어떻게 선정하는 지에 따라 결정되며 그 결과는 <표 Ⅴ-2>와 같다.

<표 Ⅴ-2> 타원의 그래프

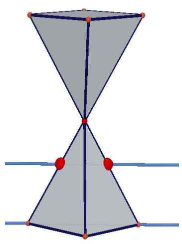
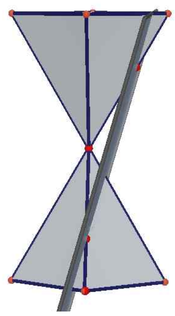
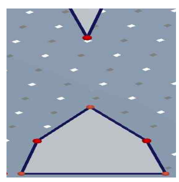
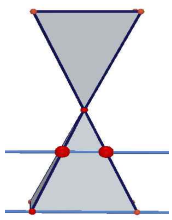
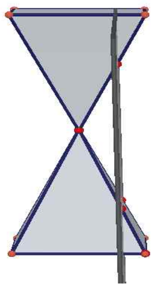
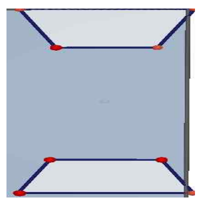
평면 위의 두 점의 선정 기준	택시원뿔과 평면	절단면의 모양
밑면의 대각선과 평행하도록 서로 다른 두 옆면의 모서리 위의 점을 선택할 경우 		
밑면의 모서리와 평행하도록 한 옆면의 모서리 위의 두 점을 선택할 경우 		

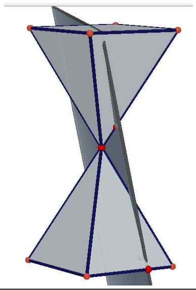
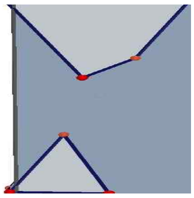
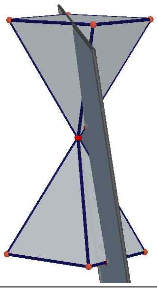
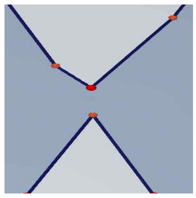
평면 위의 두 점의 선정 기준	택시원뿔과 평면	절단면의 모양
위의 두 경우가 아닐 때		

4. **쌍곡선의 그래프**

원뿔곡선의 절단면으로서 쌍곡선의 정의는 택시원뿔의 옆면과 밑면이 이루는 이면각의 크기가 절단의 기준이 되는 평면과 밑면이 이루는 이면각의 크기보다 작을 때 나타나는 절단면의 모양을 의미한다. 쌍곡선의 그래프의 모양을 평면 위의 두 점을 어떻게 선정하는 지에 따라 결정되며 그 결과는 <표 V-3>과 같다.

<표 V-3> 쌍곡선의 그래프

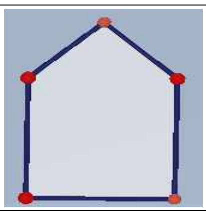
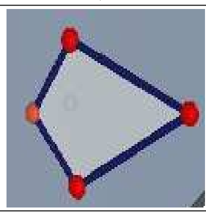
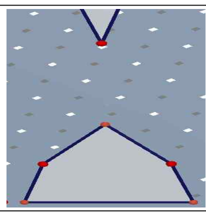
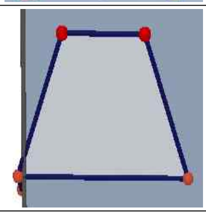
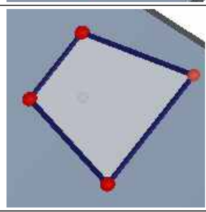
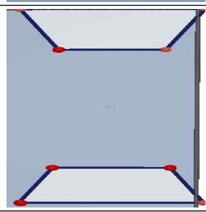
평면 위의 두 점의 선정 기준	택시원뿔과 평면	절단면의 모양
밑면의 대각선과 평행하도록 서로 다른 두 옆면의 모서리 위의 점을 선택할 경우 		
밑면의 모서리와 평행하도록 한 옆면의 모서리 위의 두 점을 선택할 경우 		

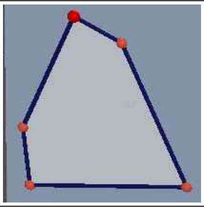
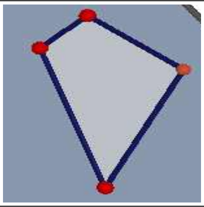
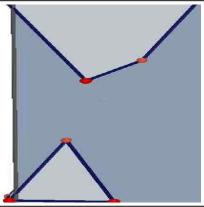
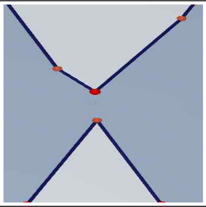
평면 위의 두 점의 선정 기준	택시원뿔과 평면	절단면의 모양
1번과 2번의 경우가 아니면서 윗변의 서로 마주보는 두 변이 절단될 때		
1번과 2번의 경우가 아니면서 윗변의 이웃하는 두 변이 절단될 때		

5. 정리

택시원뿔곡선의 절단면으로서 이차곡선은 택시원뿔의 옆면과 밑면이 이루는 이면각의 크기와 절단의 기준이 되는 평면과 밑면이 이루는 이면각의 크기의 대소 관계에 따라 이차곡선을 분류하였다. 이때, 평면과 택시원뿔의 모서리의 교점들 사이의 관계를 기준으로 이차곡선의 개형을 분류할 수 있었다. 택시원뿔곡선의 절단면으로서 정의된 이차곡선의 그래프의 개형은 <표 Ⅴ-4>와 같이 분류할 수 있다.

<표 Ⅴ-4> 택시원뿔곡선의 절단면으로서 정의된 이차곡선의 그래프

	포물선	타원	쌍곡선
1			
2			

	포물선	타원	쌍곡선
3			
4			

Ⅵ. 결론

학생들은 택시기하를 학습함으로써 다양한 교육적 효과를 얻을 수 있다. 학생들은 논리적인 사고의 본질을 이해할 수 있으며 내적 동기가 유발되고 지적 호기심이 자극될 수 있다(장경윤, 1994). 또한 학생들은 인지 수준이 향상 될 수 있으며 새로운 기하를 경험함으로써 수학의 본질을 이해할 수 있다(안지은, 2012). 특히 학생들은 유클리드 기하에서 성립하는 정리를 택시기하에 적용시켜봄으로써 유클리드 기하와 택시기하의 차이를 알고 유클리드 기하에 대해 더욱 깊게 이해할 수 있다(Krause, 1986; 장경윤, 1994). 이러한 점에서 택시기하는 영재교육과 R&E에서 다루어 질 수 있는 좋은 수학적 소재이다(곽경민 외, 2010).

이차곡선도 영재교육에서 자주 사용되는 기하학적 소재이다. GSP와 같은 동적기하환경을 통해 이차곡선을 작도하거나 주어진 조건을 만족하는 이차곡선의 접선을 작도하는 활동을 제공할 수 있으며(허남구, 2014) 이차곡선을 실생활에서 활용하는 방안을 탐구할 수 있다. 또한 유클리드 기하에서 이차곡선의 세 가지 정의(원뿔곡선의 절단면으로서 정의, 이심률에 의한 정의, 기하대수적 정의)에 의해 나타나는 곡선이 동일하다는 것을 대수적인 계산이나 단델린 공을 이용하여 탐구할 수 있다.

본 연구에서 택시기하에서 세 가지 정의 방법에 따른 이차곡선의 그래프를 살펴본 결과는 다음과 같다. 첫째, 택시기하에서는 기하대수적 정의에 의해 나타나는 이차곡선의 그래프와 이심률에 의해 정의된 이차곡선의 그래프가 다르게 나타난다. 이러한 결과는 유클리드 기하와 달라 영재학생들에게 정의 방법에 따른 도형의 성질을 탐구할 수 있는 과제로 제시할 수 있다. 둘째, 택시기하에서는 기하대수적 정의에 의해 나타나는 이차곡선의 그래프와 원뿔곡선의 절단면으로서 정의되는 이차곡선의 그래프가 다르게 나타난다. 이러한 결과는 유클리드 기하와 달라 영재학생들에게 정의 방법에 따른 도형의 성질을 탐구할 수 있는 과제로 제시할 수 있다. 셋째, 택시기하에서는 이심률에 의해 정의된 이차곡선의 그래프와 원뿔곡선의 절단면으로서 정의되는 이차곡선의 그래프가 동일하게 나타난다.

본 연구에서는 택시기하에서의 세 가지 정의 방법에 의해 표현되는 이차곡선의 그래프를 살펴보았다. 향후 택시기하에서 세 가지 정의 방법에 따른 이차곡선의 성질을 탐구하고, 이심률의 정의에 따른 이차곡선의 그래프와 원뿔곡선의 정의를 따른 이차곡선의 그래프가 동일하게 표현되는 것에 대해 영재 학생들의 수학적인 탐구가 진행될 필요가 있다.

참 고 문 헌

곽경민・백승민・최우석・최준범・고일석・김병학 (2010). 택시거리함수를 이용한 평면기하에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 24(3), 659-689.

Kwak, K. M., Baik, S. M., Choi, W. S., Choi, J. B., Ko, I. S., & Kim, B. H. (2010). On the plane geometry using taxicab geometry function, *Communications of Mathematical Education*, 24(3), 659-689.

김대현 (2011). 수학영재 지도교사를 위한 교수・학습 자료 개발에 관한 연구 : Renzulli 3부 심화 학습 모형을 중심으로. 경남대학교 박사학위논문.

Kim, D. H. (2011). *A Study on the Development of Teachers' Teaching Materials for the Mathematically Gifted : Based on Renzulli's Enrichment Triad Model*. Doctorate Thesis, Kyungnam University

김성식 (2013). 비유클리드 거리함수를 활용한 수학 영재 교수・학습 자료의 개발 및 적용. 한국교원대학교 석사학위논문.

Kim, S. S. (2013). *Development and application of Teaching and Learning Materials for mathematics gifted students by using a Non-Euclidean Metric*. Master's Thesis, Korea National University of Education.

김애리 (2014). 학습동기 유발을 위한 택시기하 영역의 교수학습자료 개발. 단국대학교 석사학위논문.

Kim, A. R. (2014). *Development of Teaching and Learning Materials in Taxicab Geometry for Motivation*. Master's Thesis, Dankook University.

김향숙・박진석・정승달・고연순・문동주 (2013). 기하학 다시보기. 서울: 경문사.

Kim, H. S., Park, J. S., Jeong, S. D., Ko, Y. S., & Moon, D. J. (2013). *Re-exploration of Geometry*. Seoul: Kyongmoonsa.

배수경 (2006). 영재교육에서 이산수학의 수업 실태와 프로그램 개발 및 현장 적용. 이화여자대학교 석사학위논문.

Bae, S.-K. (2006). *A Study on the Current Status of Discrete Mathematics Teaching & Teaching-Learning Program Development and its Application to the Field (in the Specific Education for Gifted Students*. Master's Thesis, Ewha University.

안지은 (2012). 택시 기하를 활용한 수학 영재 교수 학습 자료의 개발 및 적용 : 택시 원추 곡선을 중심으로. 한국교원대학교 석사학위논문.

An, J. E. (2012). *Education material development and application for mathematically gifted students : Conic sections with the taxicab geometry*. Master's Thesis, Korea National University of Education.

양희석・박도연・김병학・박재희 (2013). 택시기하에서 이차곡선에 관한 연구. 수학교육 학술지, 2013(1), 319-324.

Yang, H. S., Park, D. Y., Kim, B. H., & Park, J. H. (2013). Study on quadratic curves on taxicab geometry. *Studies in Mathematical Education*, 2013(1), 319-324.

에르든예프・한인기 (2005). 유추를 통한 수학탐구. 서울: 승산.

Erdniev, P. M. & Han, I. G. (2005). *Exploration of mathematics with analogical reasoning*. Seoul: Seungsan.

이경화 (2003). 수학 영재교육 자료의 개발과 적용 사례 연구. 수학교육학연구. 13(3), 365-382.

Lee, K. H. (2003). Development and application of mathematical activities for gifted students. *The journal of educational research in mathematics*, 13(3), 365-382.

이경화 (2009). 수학적 지식의 구성에서 유추적 사고의 역할. 수학교육학연구, 19(3), 355-369.

Lee, K. H. (2009). The Role of Analogical Reasoning in Mathematical Knowledge Construction. *The journal of educational research in mathematics*, 19(3), 355-369.

이승우・김병학・박재희 (2013). 택시기하에서의 삼각형의 외심에 관한 연구. 수학교육 학술지, 2013(1),

325-328.

Lee, S. W., Kim, B. H., & Park, J. H. (2013). Study on circumcenter of triangles on on taxicab geometry. *Studies in Mathematical Education*, 2013(1), 325-328.

장경윤 (1994). 택시기하 : 교사와 학생을 위한 비유클리드 기하학. 수학교육학연구, 4(1), 109-116.

Chang, K. Y. (1994). Taxicab geometry : a non-Euclidean geometry for high school students and teachers. *The journal of educational research in mathematics*, 4(1), 109-116.

전선미・유원석 (2011). 중등 수학영재 교수・학습자료 개발 동향 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 25(1), 79-97.

Jun, S. M. & Yoo, W. S. (2011). An Analysis on the Development Tendency of Teaching and Learning Materials for the Gifted Students in the Middle School. *Communications of Mathematical Education*, 25(1), 79-97.

천희영 (2008). 택시캡 포물선의 그래프. 단국대학교 석사학위논문.

Cheon, H. Y. (2008). *Graphs of Taxicab Parabolas*. Master's Thesis, Dankook University.

허남구 (2014). 기하학적 방법을 통한 이차곡선 접선의 작도에 관한 연구. 과학영재교육, 6(3), 125-133.

Heo, N. G. (2014). A Study on Construction of Tangent Line of Quadratic Curves Through Geometric Method. *Journal of Science Education for the Gifted*, 6(3), 125-133

허남구・류희찬 (2015a). 활동 중심 수학과 디지털교과서의 개발 및 적용. 수학교육학연구, 25(2), 241-261.

Heo, N. G. & Lew, H. C. (2015a). Development and Application of Action Based Mathematics Digital Textbook. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 25(2), 241-261.

허남구・류희찬 (2015b). 테크놀로지를 활용한 수학 중심 STEAM 프로그램 개발. 청람수학교육연구, 7(2), 79-100.

Heo, N. G. & Lew, H. C. (2015b). Development of Mathematics-Centered STEAM Program Using Technology. *KNUE Journal of Mathematics Education*, 7(2), 79-100.

허수진 (2010). 택시 기하를 활용한 수학 영재 교수 학습 자료의 개발 및 적용. 이화여자대학교 석사학위논문.

Hur, S. (2010). *Development and Application of Teaching-Learning Materials for Mathematically-Gifted Students by Using Taxicab Geometry*. Master's Thesis, Ewha University.

Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned*. Gothenburg studies in educational science 293. Gothenberg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Lo, M. L. (2012). *Variation Theory and the Improvement of Teaching and Learning*. Gothenburg studies in educational science 323. Gothenberg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah N.J.: Lawrence Erlbaum.

Krause, E. F. (1986). *Taxicab Geometry:An adventure in non-Euclidean Geometry*. NY: Dover Publication.

Inquiry of Quadratic Curves According to Definition on Taxicab Geometry

Heo, Nam Gu
Daejeon Songchon Highschool
E-mail : mimirul@nate.com

Taxicab geometry was a typical non-Euclid geometry for mathematically gifted. Most educational material related quadratic curves on taxicab geometry for mathematically gifted served them to inquire the graph of the curves defined by focis and constant. In this study, we provide a shape of quadratic curves on taxicab geometry by applying three definitions(geometric algebraic definition, eccentricity definition, conic section definition).

* ZDM Classification : G94
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key words : taxicab geometry, quadratic curves, geometric algebraic definition, eccentricity definition, conic section definition