

자코비안 및 2단 선형화 기법과 부분 상태궤환을 이용한 볼-빔 시스템의 스위칭 제어

Switching Control of Ball and Beam System using Partial State Feedback: Jacobian and Two-Step Linearization Methods

이 경 태* · 최 호 림†
(Kyung-Tae Lee · Ho-Lim Choi)

Abstract - We propose a new switching control scheme for a ball and beam system by utilizing two linearization methods. First, the Jacobian linearization is applied and state observer is developed afterward. Then, motivated [6], the approximate input-output linearization is carried out, and after that, the Jacobian linearization is applied along with the design of state observer. Since the second approach requires two linearizations, it is called a two-step linearization method. The state observer is needed for the estimation of the velocities of ball and motor movement. Since the Jacobian linearization based controller tends to provide faster response at the initial time, and after that, the two-step linearization based controller tends to provide better response in terms of output overshoot and convergence to the origin, it is natural to give a switching control scheme to provide the best overall control response. The validity of our control scheme is shown in both simulation and experimental results.

Key Words : Ball and beam system, Jacobian linearization, Input-output feedback linearization, Two-step linearization, State Observer, Switching control

1. 서 론

볼-빔 시스템(ball and beam system)은 모터의 제어를 통해 빔을 따라 움직이는 쇠공의 위치를 제어하는 시스템이다. 볼-빔 시스템은 비선형 성분이 포함된 대표적인 불안정한 시스템으로써 로봇의 균형 문제, 2 자유도 구륜 이동 로봇 등과 같이 자세 제어가 필요한 시스템과, 우주 항공 분야에서 로켓과 같은 비행체의 위치 제어가 필요한 시스템과 관련해서 안정화가 필요한 다양한 분야에서 응용이 가능하다[10]. 볼-빔 시스템은 비선형적인 특성을 포함하고 있기 때문에 제어하기 까다로워 정밀한 제어가 필요한 시스템이다. 볼-빔 시스템의 제어기 설계법에 대해서 많은 연구가 진행되어 왔으며[5],[6],[8],[9], 성능을 개선하기 위해 두 가지 이상의 제어기를 설계하고 스위칭 제어 기법을 적용한 연구도 진행되었다[9]. 한편, [9]에서는 볼-빔 시스템에 자코비안 및 입-출력 궤환 선형화 기법을 통해 상태궤환 제어기를 설계하고 스위칭 제어 기법을 적용하여 성능을 더욱 개선시켰다. 하지만, [9]에서는 전체 시스템 상태의 측정이 가능함을 가정하여 실제로는 쇠공과 모터의 속도를 측정하지 않고 적분기를 사용하여 근사화하는 방법으로 접근하여 시스템 분석의 측면에서 다

소 부족한 부분이 있었다. 그러기에 실제로 이러한 속도를 추정할 필요가 있고 이를 위해 적절한 상태 관측기를 설계하고 제어기에 접목시킬 필요가 있다.

한편 [6]에서는 근사적 입-출력 궤환 선형화 기법을 적용하여 근사화된 볼-빔 시스템에 대해서 설계한 제어기는 일반적으로 전체 영역에서 자코비안 선형화 기법을 적용한 제어기보다 오차가 작아 성능이 우수하다는 것이 보고 되었다. 이러한 점을 근거로 하여 본 논문에서는 두 가지 선형화 접근법을 적용하였다. 먼저 널리 알려지고 특정한 국소 영역에서 빠른 동작을 보이는 자코비안 선형화 기법과 이를 기반한 상태 관측기를 설계하였다. 그 다음 [6]에 근거하여 먼저 근사적 입-출력 선형화를 수행하고 이렇게 선형화된 시스템에 다시 자코비안 선형화 기법을 수행하고 이에 상태 관측기를 설계하는 방법을 적용하였다. 즉, 관측기를 설계하는 과정에서 비선형 성분의 영향을 줄이기 위해 2단 선형화를 적용하였고, 2단 선형화 기법과 자코비안 선형화 기법을 통해 제어기와 관측기를 설계한 다음 극점 구간을 설정하여 모의 실험을 통해 시스템의 특성, 오버슈트, 상승시간을 확인하고 [2], 실제 실험을 통해 시스템의 출력과 모터의 입력전압을 비교하였다. 자코비안 선형화 기반 제어기는 초기 응답은 빠르다는 장점과 오버슈트와 정상상태 응답은 느리다는 단점이 있었으며 2단 선형화 기반 제어기는 초기 응답은 느린 단점과 오버슈트는 없었고 정상상태 응답은 빠르다는 장점이 확인되었다. 또한, [9]를 참고하여 자코비안 선형화 기반 제어기는 초기 응답이 빠르고 모터의 입력 전압은 작기 때문에 입력 에너지를 절약하고 빠른

† Corresponding Author : Dept. of Electrical Engineering, Dong-A University, Korea.

E-mail : hlchoi@dau.ac.kr

* Dept. of Electrical Engineering, Dong-A University, Korea.

Received : December 28, 2016; Accepted : March 29, 2017

초기 반응 속도를 얻기 위해 자코비안 선형화 기법에 기반한 제어기를 구동시키고, 그 이후에 전체 영역에서는 특이점 문제가 발생하지 않은 2단 선형화 기반 제어기를 작동시키는 스위칭 제어 기법을 통해 성능을 최대한 이끌어낸 개선된 성능의 제어기를 제안하였고, 실험을 통해 초기 응답과 정상상태 응답은 빠르면서 오버슈트는 거의없는 향상된 성능을 입증하였다. 또한, 쇄공의 질량 변화에 따른 스위칭 제어 기법의 강인성에 대해서도 성능을 입증하였다.

2. 볼-빔 시스템 모델링 및 두 가지 선형화 기반 상태관측기를 이용한 제어기 설계

2.1 볼-빔 시스템 모델링

식 (1)은 볼-빔 시스템의 동역학 방정식이며, Fig. 1, 2는 Quanser사의 볼-빔 시스템 장비 구성과 개략도를 나타낸 것이다 [9].

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= K_{bb} \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= -\frac{1}{\tau} \dot{\theta} + \frac{K}{\tau} V_m \end{aligned} \quad (1)$$

식 (1)의 동역학 방정식에서 K_{bb} 는 시스템의 모델 이득값, K 는 정상상태 이득값, τ 는 시정수, x 는 쇄공의 위치, θ 는 모터의 각도, V_m 은 입력전압이다 [9]. Fig. 1에서 시스템의 전원이 켜지면 전압이 모터(i)로 입력되어 설계된 제어기에 의해 모터가 작동하게 되고 Lever arm(ii)이 위·아래로 움직임에 따라 Encoder(iii)에서 모터의 각도가 측정되며, 이에 따라 Ball(iv)이 BB01 steel rod(v)를 따라 움직이게 되어 Position sensor(vi)에서 쇄공이 목표하는 지점까지 위치할 때까지 쇄공의 움직임이 시간에 따라 측정이 되게 된다.

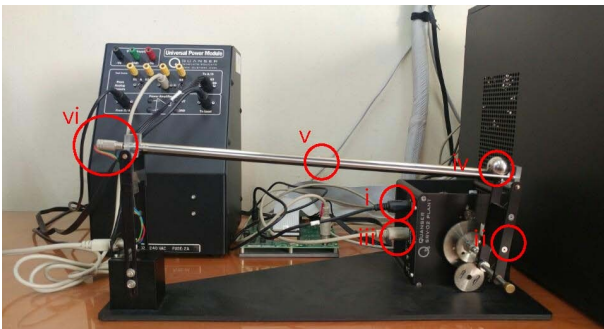


그림 1 볼-빔 시스템의 장비 구성
Fig. 1 Equipment configuration of ball and beam system

Table 1은 Quanser사의 볼-빔 시스템의 사양을 나타낸 것이다. 상태변수와 입력변수를 식 (2)와 같이 설정하면 식 (1)을 상태방정식으로 나타낼 수 있다 [9].

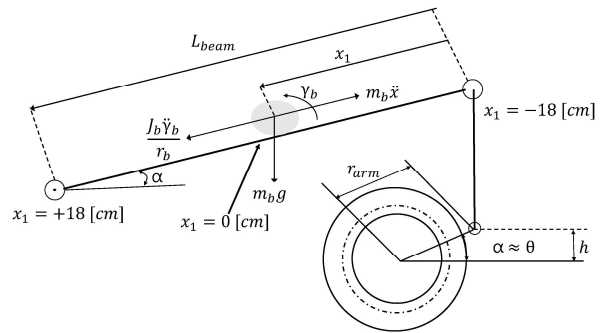


그림 2 볼-빔 시스템의 개략도
Fig. 2 Schematic of ball and beam system

표 1 볼-빔 시스템의 사양

Table 1 Specifications of ball and beam system

Parameter	Description	Value
L_{beam}	Beam length	42.55 cm
r_{arm}	Distance between SRV02 output gear shaft and coupled joint	2.54 cm
r_b	Radius of ball	1.27 cm
m_b	Mass of ball	0.064 Kg

$$\begin{aligned} x &= x_1, \dot{x} = \dot{x}_1 = x_2, \ddot{x} = \dot{x}_2 \\ \theta &= x_3, \dot{\theta} = \dot{x}_3 = x_4, \ddot{\theta} = \dot{x}_4 \\ V_m &= u \end{aligned} \quad (2)$$

식 (1)과 식 (2)를 통해 상태방정식은 식 (3)과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= K_{bb} \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{1}{\tau} x_4 + \frac{K}{\tau} u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (3)$$

[11]을 참고하여 $K_{bb} = 41.83 [cm/rad \cdot s^2]$, $\tau = 0.0248 [s]$, $K = 1.5286 [rad/V \cdot s]$ 이고, 쇄공의 반경과 빔의 길이를 통해 쇄공의 초기위치와 기어를 통해 모터의 초기각을 설정했다.

따라서, 초기조건은 $x_1(0) = -18 [cm]$, $x_2(0) = 0 [cm/s]$, $x_3(0) = -0.611 [rad]$, $x_4(0) = 0 [rad/s]$ 이며, 시스템의 안정성을 고려하여 제어 목표인 $x_{b0} = r = 0$ 으로 설정하였다.

2.2 자코비안 선형화 기반 제어기

자코비안 선형화(Jacobian linearization)는 시스템을 근사화하고자 할 때 많이 사용되며, 식을 편미분하기 때문에 함수의 변화를 자체가 미소해야 근사값의 신뢰도가 높아지는 선형화 기법

이다[1].

$y = x_1$ 을 만족하는 평형점 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})$ 과 정상상태 입력 u_0 를 구하면 $x_{10} = r, x_{20} = 0, x_{30} = 0, x_{40} = 0, u_0 = 0$ 이다. 상태방정식 (3)을 위 평형점에서 자코비안 선형화로 근사시키면 식 (4)를 구할 수 있다.

$$\dot{\delta x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}}_A \delta x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix}}_B \delta u \quad (4)$$

여기서, $\delta x = [x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}, x_3 - x_{30}, x_4 - x_{40}]^T$, $\delta u = u - u_0$, $\delta y = \delta x_1 = x_1 - x_{10}$ 이다.

2.2.1 자코비안 선형화 기반 상태관측기를 이용한 제어기 설계

식 (3)의 시스템에서 쇄공의 위치(x_1)와 모터의 각(x_3)은 위치 센서와 회전속도계로 측정 된다. 하지만 쇄공의 속도(x_2)와 모터의 각속도(x_4)는 측정할 수 없어 보다 정밀한 제어가 이루어지기 위해서는 측정되지 않는 변수들에 대해서 관측기가 필요하다 [3],[4].

관측기 설계를 위해, 식 (4)의 A 와 식 (3)의 $y = Cx$ 를 이용하여 A_L 즉, $A_L = A + LC$ ($L = [l_1, l_2, l_3, l_4]^T$)가 Hurwitz가 되는 관측기의 이득값을 구한다.

$$A_L = A + LC = \begin{bmatrix} l_1 & 1 & 0 & 0 \\ l_2 & 0 & K_{bb} & 0 \\ l_3 & 0 & 0 & 1 \\ l_4 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \quad (5)$$

[1]을 통해 관측기는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\delta \hat{x}} &= A\delta \hat{x} + B\delta u - L(\delta y - C\hat{x}) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \delta \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix} \delta u - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} (\delta x_1 - \delta \hat{x}_1) \end{aligned} \quad (6)$$

제어기 설계를 위해, 식 (4)의 A 와 B 를 이용하여 A_K 즉, $A_K = A + BK$ 가 Hurwitz가 되는 제어기의 이득값을 구한다.

$$A_K = A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{Kk_1}{\tau} & \frac{Kk_2}{\tau} & \frac{Kk_3}{\tau} & \frac{Kk_4}{\tau} - \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \quad (7)$$

2.2.2 관측기를 포함한 전체 폐루프 시스템의 안정성 분석

안정성은 제어시스템을 설계할 때 가장 중요하며, 시스템이 안정하더라도 극점에 따라 출력이 서로 다르기 때문에 목표로 하는 성능의 제어기 설계를 위해 본 논문에서 다루고 있는 관측기를 포함한 전체 폐루프 시스템의 안정성 분석을 정리한다.

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} - \delta \dot{\hat{x}} &= A\delta x + B\delta u - A\delta \hat{x} - B\delta u + L(y - C\delta \hat{x}) \\ &= A\delta x - A\delta \hat{x} + L(C\delta x - C\delta \hat{x}) \\ &= (A + LC)(\delta x - \delta \hat{x}) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\delta e = \delta x - \delta \hat{x}$ 으로 정의하고, 실제값과 추정값의 차이가 없으면 즉, $\delta e = 0$ 이면 $\delta x = \delta \hat{x}$ 이므로 오차가 0인 시스템이 되고, 식 (8)은 다음과 같이 정리 된다.

$$\delta \dot{e} = (A + LC)\delta e \quad (9)$$

그리고, 식 (4)의 $\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u$ 에서 δu 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta u &= K\delta \hat{x} \\ &= K(\delta \hat{x} + \delta x - \delta x) \\ &= K\delta x + K(\delta \hat{x} - \delta x) \\ &= K\delta x - K\delta e \end{aligned} \quad (10)$$

그러나, 쇄공의 위치(x_1)와 모터의 각(x_3)은 측정할 수 있지만, 쇄공의 속도(\dot{x}_2)와 모터의 각속도(\dot{x}_4)는 측정할 수 없기 때문에 식 (10)을 다음과 같이 정리할 수 있으며, 여기서 $\bar{K} = [0, k_2, 0, k_4]^T$ 이다.

$$\delta u = K\delta x - \bar{K}\delta e \quad (11)$$

식 (11)을 식 (4)의 $\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u$ 에 대입하여 정리하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= A\delta x + B(K\delta x - \bar{K}\delta e) \\ &= (A + BK)\delta x - BK\delta e \end{aligned} \quad (12)$$

이제, 식 (9)와 식 (12)를 합쳐서 최종적으로 전체 폐루프 시스템을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta e \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서, 제어기($A + BK$), 관측기($A + LC$) 설계를 위해 각각의 $Re[\lambda(A + BK)] < 0, Re[\lambda(A + LC)] < 0$ 을 만족하는 극점을 설정하면 관측기를 포함한 전체 폐루프 시스템이 안정화된다[7].

식 (4)에 의해 자코비안 선형화를 기반한 전체 시스템의 비선형 제어기는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$u = k_1(x_1 - r) + k_2\hat{\delta}x_2 + k_3x_3 + k_4\hat{\delta}x_4 + u_0 \quad (14)$$

2.3 2단 선형화 기반 제어기

입-출력 궤환 선형화(Input-output feedback linearization)는 비선형 시스템에 상태 궤환을 가하여 궤환 시스템이 선형의 특성을 갖도록 하는 선형화 기법이다[1].

$y = x_1 = z_1$, $z_2 = \dot{x}_1 = x_2$, $z_3 = \dot{x}_2 = K_{bb}\sin x_3$, $z_4 = K_{bb}x_4\cos x_3$ 라고 하면, 상태방정식 (3)을 입-출력 궤환 선형화를 통해 다음과 같이 변환식을 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -x_4^2\sin x_3K_{bb} - \frac{1}{\tau}x_4K_{bb}\cos x_3 + \frac{K}{\tau}K_{bb}\cos x_3u \\ &= -x_4^2\sin x_3K_{bb} - \frac{\cos x_3}{\tau}(x_4K_{bb} - KK_{bb}u) \end{aligned} \quad (15)$$

2.3.1 2단 선형화 기반 상태관측기를 이용한 제어기 설계

출력을 $y = x_1 = z_1$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -x_4^2\sin x_3K_{bb} - \frac{1}{\tau}x_4K_{bb}\cos x_3 + \frac{K}{\tau}K_{bb}\cos x_3u \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)에서 $\alpha(x)$ 는 쇄공의 위치(z_1)와 모터의 각(z_3)과 같이 측정할 수 있는 부분 $\alpha_1(x)$ 과 쇄공의 속도(z_2)와 모터의 각속도(z_4)와 같이 측정할 수 없는 부분 $\alpha_2(x)$ 로 구분할 수 있다. 즉, $\alpha_1(x) = 0$, $\alpha_2(x) = -x_4^2\sin x_3K_{bb} - \frac{1}{\tau}x_4K_{bb}\cos x_3$ 이며, $\alpha_2(x)$ 는 관측기를 통해 측정이 가능하기 때문에 제외하면 $\alpha(x)$ 와 $\beta(x)$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= 0 \\ \beta(x) &= \frac{K}{\tau}K_{bb}\cos x_3 \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)을 통해 u 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\beta(x)}(-\alpha(x) + v) \\ &= \frac{\tau}{KK_{bb}\cos x_3}v \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18)을 식 (16)의 u 에 대입하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} -x_4^2\sin x_3K_{bb} - \frac{1}{\tau}x_4K_{bb}\cos x_3 + \frac{K}{\tau}K_{bb}\cos x_3\left(\frac{\tau}{KK_{bb}\cos x_3}v\right) \\ = -x_4^2\sin x_3K_{bb} - x_4K_{bb}\cos x_3 + v \end{aligned} \quad (19)$$

식 (15)에서 $x_4 = \frac{z_4}{K_{bb}\cos x_3}$, $x_3 = \sin^{-1}\left(\frac{z_3}{K_{bb}}\right)$ 로 정리할 수 있으므로 식 (19)를 z 에 관한 식으로 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -x_4^2z_3 - \frac{z_4}{\tau} + v \\ &= -\frac{z_3z_4^2}{K_{bb}^2\cos^2\left(\sin^{-1}\left(\frac{z_3}{K_{bb}}\right)\right)} - \frac{z_4}{\tau} + v \end{aligned} \quad (20)$$

[6]에서 근사적 입-출력 궤환 선형화 기법을 통해 선형화된 볼-빔 시스템에 비선형 성분을 무시한 근사적 입-출력 궤환 선형화 기법이 자코비안 선형화 기법을 적용한 제어기보다 오차가 작아 성능이 우수하다는 것이 증명되어 있다. 이에 따라 [6]을 근거로 하여 식 (20)에서 볼 수 있듯이 입-출력 궤환 선형화 기법을 적용했음에도 여전히 비선형 성분이 존재하여 오히려 이를 무시하지 않고 근사화를 한번 더 하면 더욱 우수한 성능을 얻을 수 있을 것으로 예상되어, 비선형 성분의 영향을 줄이기 위해 이미 한 번의 근사화를 통해 선형화된 볼-빔 시스템에 자코비안 선형화 기법을 적용하였다. 즉, 다음과 같이 [자코비안 선형화 \leq 근사적 입-출력 궤환 선형화 \leq 입-출력 궤환 선형화 + 자코비안 선형화]로 요약할 수 있다. 상태방정식 (20)에서 $y = z_1 = r$ 을 만족하는 평형점 ($z_{10}, z_{20}, z_{30}, z_{40}$)과 정상상태 입력 v_0 를 구하면 $z_{10} = r, z_{20} = 0, z_{30} = 0, z_{40} = 0, v_0 = 0$ 이다. 상태방정식 (20)을 위 평형점에서 자코비안 선형화로 근사시키면 식 (21)을 구할 수 있다.

$$\dot{\delta z} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \end{bmatrix}}_A \delta z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \delta v \quad (21)$$

여기서 $\delta z = [z_1 - z_{10}, z_2 - z_{20}, z_3 - z_{30}, z_4 - z_{40}]^T$, $\delta v = v - v_0$, $\delta y = \delta z_1 = z_1 - z_{10}$ 이다. 식 (15)의 시스템에서 쇄공의 위치(z_1)와 모터의 각(z_3)은 위치센서와 회전속도계로 측정된다. 하지만 쇄공의 속도(z_2)와 모터의 각속도(z_4)는 측정할 수 없어 보다 정밀한 제어가 이루어지기 위해서는 측정되지 않는 변수들에 대해서 관측기가 필요하다[3],[4].

관측기 설계를 위해 식(21)의 A 와 식 (15)을 $y = Cz$ 를 이용하여 A_L 즉, $A_L = A + LC$ 가 Hurwitz가 되는 관측기의 이득값을 구한다.

$$A_L = A + LC = \begin{bmatrix} l_1 & 1 & 0 & 0 \\ l_2 & 0 & 1 & 0 \\ l_3 & 0 & 0 & 1 \\ l_4 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \quad (22)$$

앞에서와 마찬가지로 [1]을 통해 관측기는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\delta z} &= A\delta z + B\delta v - L(\delta z_1 - C\delta z) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \delta z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta v - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} (\delta z_1 - \delta z_1) \end{aligned} \quad (23)$$

식 (21)에서 $\delta v = v - v_0$ 이므로 $v = \delta v + v_0 = K\delta z + v_0$ 이고, z_1 과 z_3 는 측정할 수 있으므로 보조 제어기는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$v = k_1(z_1 - r) + k_2\delta z_2 + k_3z_3 + k_4\delta z_4 + v_0 \quad (24)$$

여기서 $\delta z = [\delta z_1, \delta z_2, \delta z_3, \delta z_4]^T$, $K = [k_1, k_2, k_3, k_4]$ 이다.

제어기 설계를 위해 식 (21)의 A 와 B 를 이용하여 A_K 즉, $A_K = A + BK$ 가 Hurwitz가 되는 제어기의 이득값을 구한다.

$$A_K = A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 - \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \quad (25)$$

2.3.2 관측기를 포함한 전체 폐루프 시스템의 안정성 분석

앞에서와 마찬가지로 관측기를 포함한 전체 폐루프 시스템의 안정성 분석을 동일하게 정리하면, 최종적으로 전체 폐루프 시스템을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta z} \\ \dot{\delta e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z \\ \delta e \end{bmatrix} \quad (26)$$

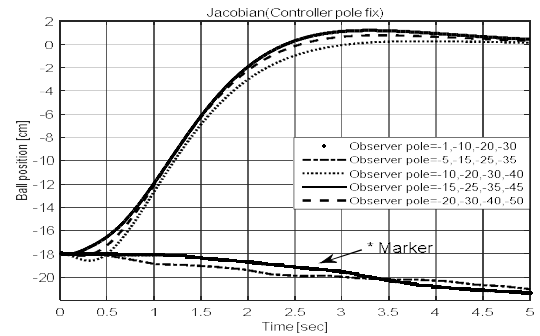
여기서, 제어기($A + BK$), 관측기($A + LC$)설계를 위해 각각의 $Re[\lambda(A + BK)] < 0, Re[\lambda(A + LC)] < 0$ 을 만족하는 극점을 설정하면 관측기를 포함한 전체 폐루프 시스템이 안정화 된다[7].

식 (18)과 식 (24)에 의해 2단 선형화를 기반한 전체 시스템의 비선형 제어기는 다음과 같이 정리할 수 있다.

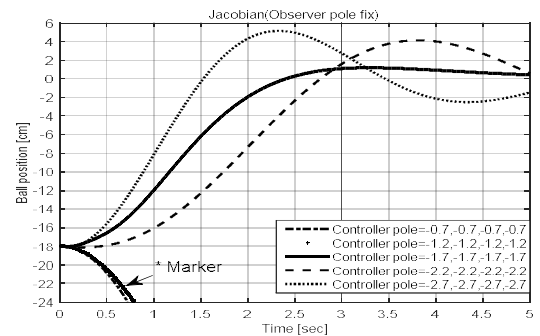
$$u = \frac{\tau}{KK_{bb} \cos x_3} (k_1(z_1 - r) + k_2\delta z_2 + k_3z_3 + k_4\delta z_4 + v_0) \quad (27)$$

2.4 볼-빔 시스템의 제어기와 관측기의 극점 설정을 위한 모의 실험

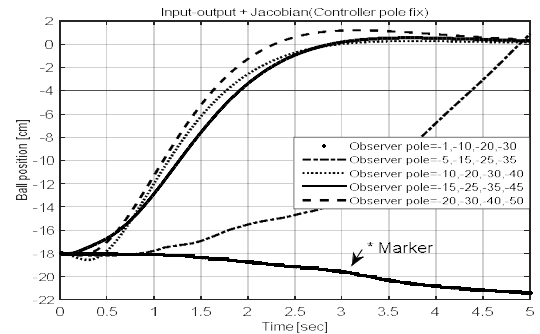
극점의 위치에 따라 시스템의 성능이 달라질 수 있으며, 관측기가 실제 상태에 빨리 도달하도록 하기 위한 극점은 좌반평면에서 허수축으로부터 멀리 떨어져 있도록 잡아야 한다. 그러나 이때, 멀리 떨어질수록 시스템의 외부에서 알 수 없는 시간에 발생



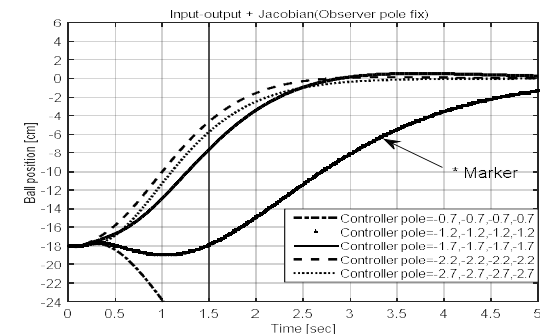
(a) 제어기의 극점 고정 = -1.7, -1.7, -1.7, -1.7



(b) 관측기의 극점 고정 = -15, -25, -35, -45



(c) 제어기의 극점 고정 = -1.7, -1.7, -1.7, -1.7



(d) 관측기의 극점 고정 = -15, -25, -35, -45

그림 3 극점 변화에 따른 시스템의 성능 비교

Fig. 3 Comparison of system performance according to changes in pole

하여 입력이나 출력에 나쁜 영향을 미치는 크기를 알 수 없는 신호인 외란과 제어를 위하여 출력을 측정할 때 생기는 측정잡음의 영향을 더 받기 때문에 제어기와 관측기의 극점을 절충하여 설정해야 한다.

Fig. 3은 제어기의 극점 범위를 (-0.7~-2.7)로 정하고 관측기의 범위를 (-1~-50)으로 설정하여 구간 내에서 제어기와 관측기의 극점 변화에 따라 시스템의 성능과 오버슈트 그리고 응답속도를 나타내었고, Table 2~4로 정리하였다[2].

표 2 극점 변화에 따른 시스템의 특성 비교 결과

Table 2 Comparison of characteristics of system according to change of pole

	관측기 극점	특성
자코비안 (제어기 극점 고정) (-1.7, -1.7, -1.7, -1.7) 관측기 극점 범위 (-1~-50)	-1, -10, -20, -30	NMP, 발산
	-5, -15, -25, -35	NMP, 발산
	-10, -20, -30, -40	sNMP
	-15, -25, -35, -45	Not NMP
	-20, -30, -40, -50	sNMP
	제어기 극점	특성
자코비안 (관측기 극점 고정) (-15, -25, -35, -45) 제어기 극점 범위 (-0.7~-2.7)	-0.7, -0.7, -0.7, -0.7	NMP, 발산
	-1.2, -1.2, -1.2, -1.2	NMP
	-1.7, -1.7, -1.7, -1.7	Not NMP
	-2.2, -2.2, -2.2, -2.2	Not NMP
	-2.7, -2.7, -2.7, -2.7	Not NMP
	관측기 극점	특성
임-출력+자코비안 (제어기 극점 고정) (-1.7, -1.7, -1.7, -1.7) 관측기 극점 범위 (-1~-50)	-1, -10, -20, -30	NMP, 발산
	-5, -15, -25, -35	NMP, 발산
	-10, -20, -30, -40	sNMP
	-15, -25, -35, -45	Not NMP
	-20, -30, -40, -50	sNMP
	제어기 극점	특성
임-출력+자코비안 (관측기 극점 고정) (-15, -25, -35, -45) 제어기 극점 범위 (-0.7~-2.7)	-0.7, -0.7, -0.7, -0.7	NMP, 발산
	-1.2, -1.2, -1.2, -1.2	NMP
	-1.7, -1.7, -1.7, -1.7	Not NMP
	-2.2, -2.2, -2.2, -2.2	Not NMP
	-2.7, -2.7, -2.7, -2.7	Not NMP

여기서 NMP=비 최소위상, sNMP=약한 비 최소위상이다.

관찰 1: 제어기의 극점을 고정 시킨 후 관측기의 극점을 변화시켰을 때와 관측기의 극점을 고정 시킨 후 제어기의 극점을 변화시켰을 경우 시뮬레이션 결과를 관찰하면 오버슈트와 응답속도 그리고 비 최소 위상현상이 극점의 변화에 따라 민감한 결과를 보였다.

자코비안 선형화 기반 제어기(a)와 2단 선형화 기반 제어기(c)에서 관측기의 극점 -15, -25, -35, -45를 제외한 관측기의 극점은 모두 비 최소 위상현상을 보였으며, 자코비안 선형화 기반 제어기(b)에서 제어기의 극점 (-1.7, -1.7, -1.7, -1.7), (-2.7, -2.7, -2.7, -2.7) 2가지 경우가 비 최소 위상현상이 나타나지 않았고, 2단 선형화 기반 제어기(d)에서는 제어기의 극점 (-1.7, -1.7, -1.7, -1.7), (-2.2, -2.2, -2.2, -2.2), (-2.7, -2.7, -2.7, -2.7) 3가지 경우가 비 최소 위상현상이 나타나지 않았다.

표 3 극점 변화에 따른 시스템의 상승시간 비교 결과

Table 3 Comparison of rising time of system according to change of pole

	관측기 극점	상승시간
자코비안 (제어기 극점 고정) (-1.7, -1.7, -1.7, -1.7) 관측기 극점 범위 (-1~-50)	-1, -10, -20, -30	발산
	-5, -15, -25, -35	발산
	-10, -20, -30, -40	1.54s
	-15, -25, -35, -45	1.464s
	-20, -30, -40, -50	1.44s
	제어기 극점	상승시간
자코비안 (관측기 극점 고정) (-15, -25, -35, -45) 제어기 극점 범위 (-0.7~-2.7)	-0.7, -0.7, -0.7, -0.7	발산
	-1.2, -1.2, -1.2, -1.2	발산
	-1.7, -1.7, -1.7, -1.7	1.464s
	-2.2, -2.2, -2.2, -2.2	1.583s
	-2.7, -2.7, -2.7, -2.7	0.956s
	관측기 극점	상승시간
임-출력+자코비안 (제어기 극점 고정) (-1.7, -1.7, -1.7, -1.7) 관측기 극점 범위 (-1~-50)	-1, -10, -20, -30	발산
	-5, -15, -25, -35	발산
	-10, -20, -30, -40	1.499s
	-15, -25, -35, -45	1.687s
	-20, -30, -40, -50	1.317s
	제어기 극점	상승시간
임-출력+자코비안 (관측기 극점 고정) (-15, -25, -35, -45) 제어기 극점 범위 (-0.7~-2.7)	-0.7, -0.7, -0.7, -0.7	발산
	-1.2, -1.2, -1.2, -1.2	발산
	-1.7, -1.7, -1.7, -1.7	1.687s
	-2.2, -2.2, -2.2, -2.2	1.491s
	-2.7, -2.7, -2.7, -2.7	1.594s

표 4 극점 변화에 따른 시스템의 오버슈트 비교 결과

Table 4 Comparison of overshoot of system according to change of pole

	관측기 극점	오버슈트
자코비안 (제어기 극점 고정) (-1.7, -1.7, -1.7, -1.7) 관측기 극점 범위 (-1~-50)	-1, -10, -20, -30	발산
	-5, -15, -25, -35	발산
	-10, -20, -30, -40	1.52%
	-15, -25, -35, -45	6.66%
	-20, -30, -40, -50	4.39%
	제어기 극점	오버슈트
자코비안 (관측기 극점 고정) (-15, -25, -35, -45) 제어기 극점 범위 (-0.7~-2.7)	-0.7, -0.7, -0.7, -0.7	발산
	-1.2, -1.2, -1.2, -1.2	발산
	-1.7, -1.7, -1.7, -1.7	6.66%
	-2.2, -2.2, -2.2, -2.2	23.1%
	-2.7, -2.7, -2.7, -2.7	28.7%
	관측기 극점	오버슈트
임-출력+자코비안 (제어기 극점 고정) (-1.7, -1.7, -1.7, -1.7) 관측기 극점 범위 (-1~-50)	-1, -10, -20, -30	발산
	-5, -15, -25, -35	발산
	-10, -20, -30, -40	1.47%
	-15, -25, -35, -45	3%
	-20, -30, -40, -50	6.63%
	제어기 극점	오버슈트
임-출력+자코비안 (관측기 극점 고정) (-15, -25, -35, -45) 제어기 극점 범위 (-0.7~-2.7)	-0.7, -0.7, -0.7, -0.7	발산
	-1.2, -1.2, -1.2, -1.2	발산
	-1.7, -1.7, -1.7, -1.7	3%
	-2.2, -2.2, -2.2, -2.2	0.82%
	-2.7, -2.7, -2.7, -2.7	0%

관측기의 극점을 $-15, -25, -35, -45$ 로 고정시키고 제어기의 극점 $(-2.2, -2.2, -2.2, -2.2)$ 는 자코비안 선형화 기반 제어기에서 비 최소 위상 현상이 나타났으므로 제외시키면 2가지 극점 $(-1.7, -1.7, -1.7, -1.7), (-2.7, -2.7, -2.7, -2.7)$ 이 가능하였고, 각각 비교했을 때 2단 선형화 기반 제어기가 오버슈트도 작고, 정상상태 응답이 빠른 더 좋은 성능을 보였다. 즉, 설정한 구간에서는 2단 선형화 기반 제어기가 자코비안 선형화 기반 제어기보다 더 좋은 결과를 보였다.

따라서, Fig. 3과 Table 2~4의 결과와 함께 외란과 측정잡음의 영향을 최소화 하기 위해 제어기와 관측기의 극점을 절충시켜 제어기의 극점은 $-1.7, -1.7, -1.7, -1.7$ 관측기의 극점은 $-15, -25, -35, -45$ 로 설정하였다.

2.4.1 자코비안 선형화 기반 상태관측기를 이용한 제어기의 모의 실험

Fig. 4는 자코비안 선형화 기반 제어기의 모의 실험에서 쇄공의 위치(x_1), 쇄공의 속도 추정값(\hat{x}_2), 모터의 각(x_3), 모터의 각속도 추정값(\hat{x}_4), 모터의 입력전압(u)을 나타낸 것이다.

본 논문에서 다루는 모든 제어기의 모의실험은 과도응답 비교를 위해 쇄공의 위치(x_1 또는 z_1)는 응답시간을 7초, 쇄공의 속도(\hat{x}_2 또는 \hat{z}_2)와 모터의 각(x_3 또는 z_3)은 응답시간을 4초, 모터의 각속도(\hat{x}_4 또는 \hat{z}_4)와 모터의 입력전압(u)은 응답시간을 2초로 설정하였으며, 실제 실험은 쇄공의 위치(x_1 또는 \hat{z}_2)는 응답시간을 11초, 쇄공의 속도(\hat{x}_2 또는 \hat{z}_2)와 모터의 각(x_3 또는

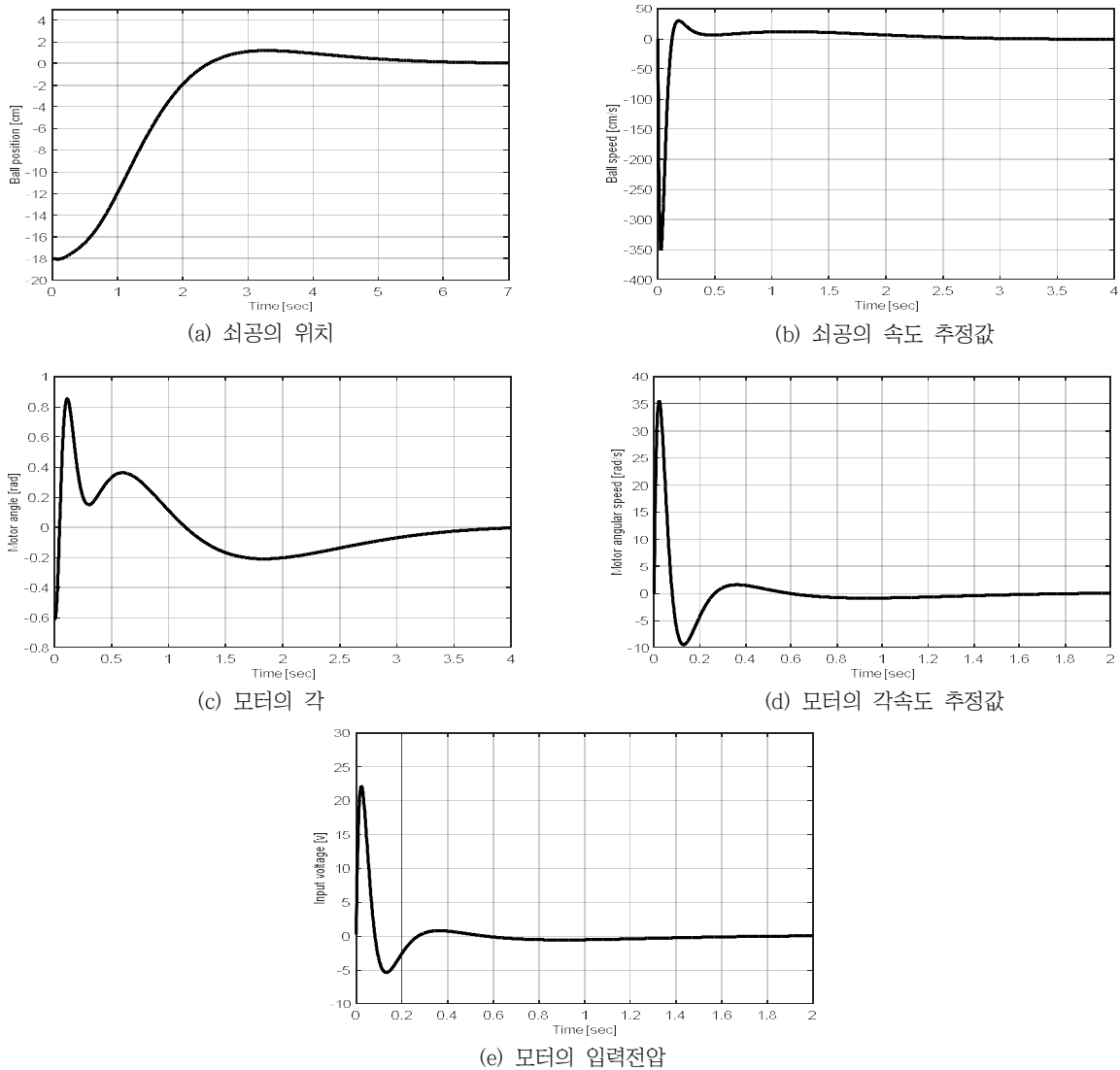


그림 4 자코비안 선형화 기반 상태관측기를 이용한 제어기의 모의 실험 결과
Fig. 4 Simulation results of controller using Jacobian linearization based state observer

z_3) 그리고 모터의 각속도(\hat{x}_4 또는 \hat{z}_4)는 응답시간을 8초 모터의 입력전압(u)은 응답시간을 3초로 설정하였다.

2.4.2 자코비안 선형화 기반 상태관측기를 이용한 제어기의 실제 실험

Fig. 5는 자코비안 선형화 기반 제어기의 실제 실험에서 쇠공의 위치(x_1), 쇠공의 속도 추정값(\hat{x}_2), 모터의 각(x_3), 모터의 각속도 추정값(\hat{x}_4), 모터의 입력전압(u)을 나타낸 것이며, 실제 실험에서도 모의 실험에서 설정한 극점을 동일하게 적용하였다.

관찰 2: 식 (14)를 보면 자코비안 선형화를 기반한 전체 시스템의 비선형 제어기는 분모에 상태변수가 없기 때문에 모든 상태

에 대해서 특이점 문제가 없어 전체 영역에서 작동되었다. 이에 따라 실제 실험 결과를 관찰하면 쇠공의 위치(x_1)는 오버슈트가 발생하였고 제어 목표인 0[cm]로 수렴하였으나, 정상상태 응답은 느린 것을 확인할 수 있다. 그리고 모터의 입력전압(u)이 짧은 시간 내에 안정화가 되어 이로 인해 쇠공의 속도 추정값(\hat{x}_2)과 모터의 각속도 추정값(\hat{x}_4)의 변화량은 큰 것을 확인할 수 있다. 또한 모의 실험의 결과와 실제 실험의 결과가 유사하다는 것도 확인할 수 있다.

2.4.3 2단 선형화 기반 상태관측기를 이용한 제어기의 모의 실험

Fig. 6은 2단 선형화 기반 제어기의 모의 실험에서 쇠공의 위

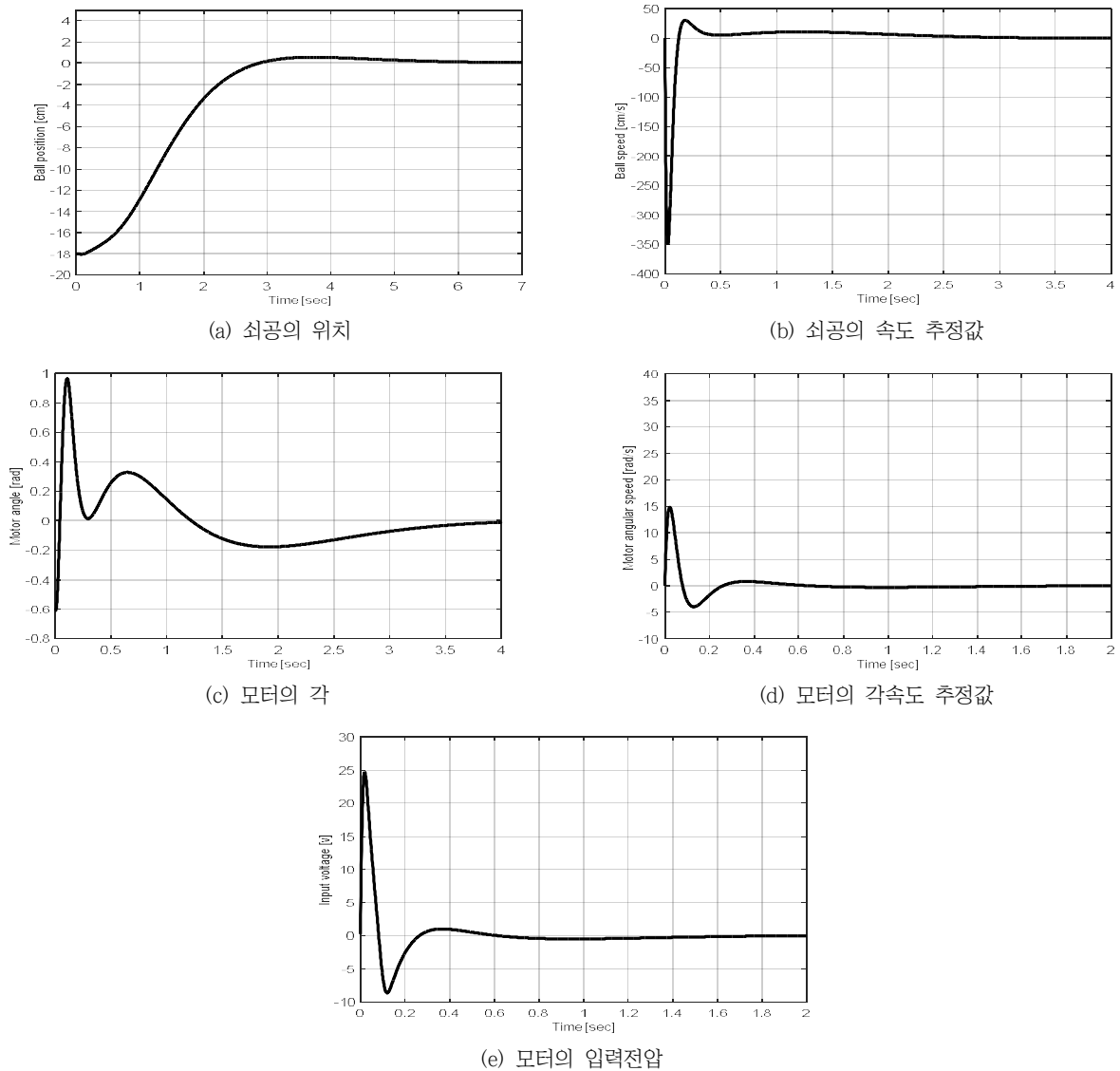


그림 6 2단 선형화 기반 상태관측기를 이용한 제어기의 모의 실험 결과

Fig. 6 Simulation results of controller using two-step linearization based state observer

치(z_1), 쇠공의 속도 추정값(\hat{z}_2), 모터의 각(z_3), 모터의 각속도 추정값(\hat{z}_4), 모터의 입력전압(u)을 나타낸 것이며, 앞에서와 마찬가지로 동일한 조건에서 비교를 위해 제어기의 극점과 관측기의 극점을 각각 일치시켰다.

2.4.4 2단 선형화 기반 상태관측기를 이용한 제어기의 실제 실험

Fig. 7은 2단 선형화 기반 제어기의 실제 실험에서 쇠공의 위치(z_1), 쇠공의 속도 추정값(\hat{z}_2), 모터의 각(z_3), 모터의 각속도 추정값(\hat{z}_4), 모터의 입력전압(u)을 나타낸 것이며, 실제 실험에서도 모의 실험에서 설정한 극점을 동일하게 적용하였다.

관찰 3: 식 (27)을 보면 2단 선형화를 기반한 전체 시스템의

비선형 제어기는 분모에 x_3 라는 상태변수가 있기 때문에 특이점 문제가 있다. 모터의 각 $x_3 = 0$ 이 되면 $\cos x_3 = 1$ 이 되어 비선형 제어기에 영향을 미치지 않지만, 모터가 계속해서 움직일 경우 즉, $x_3 \neq 0$ 일 경우 $\cos x_3 \neq 1$ 때문에 비선형 제어기의 값이 변화되어 성능이 저하되는 문제가 발생하게 된다. 그러나 실제 실험 결과를 관찰하면 (c)의 모터의 각이 일정 시간 이후에는 일정하게 유지되어 $x_3 \neq 0$ 이지만 일정한 값으로 고정되어 특이점 문제는 발생하지 않았다.

Remark 1: Fig. 7의 (a)를 관찰하면 초기 위치 $-18cm$ 에서 조금 벗어났는데 이는 쇠공의 위치를 감지하는 센서가 외란과 측정잡음에 의해 약간의 오류가 발생하여 오차가 발생하게 되었다.

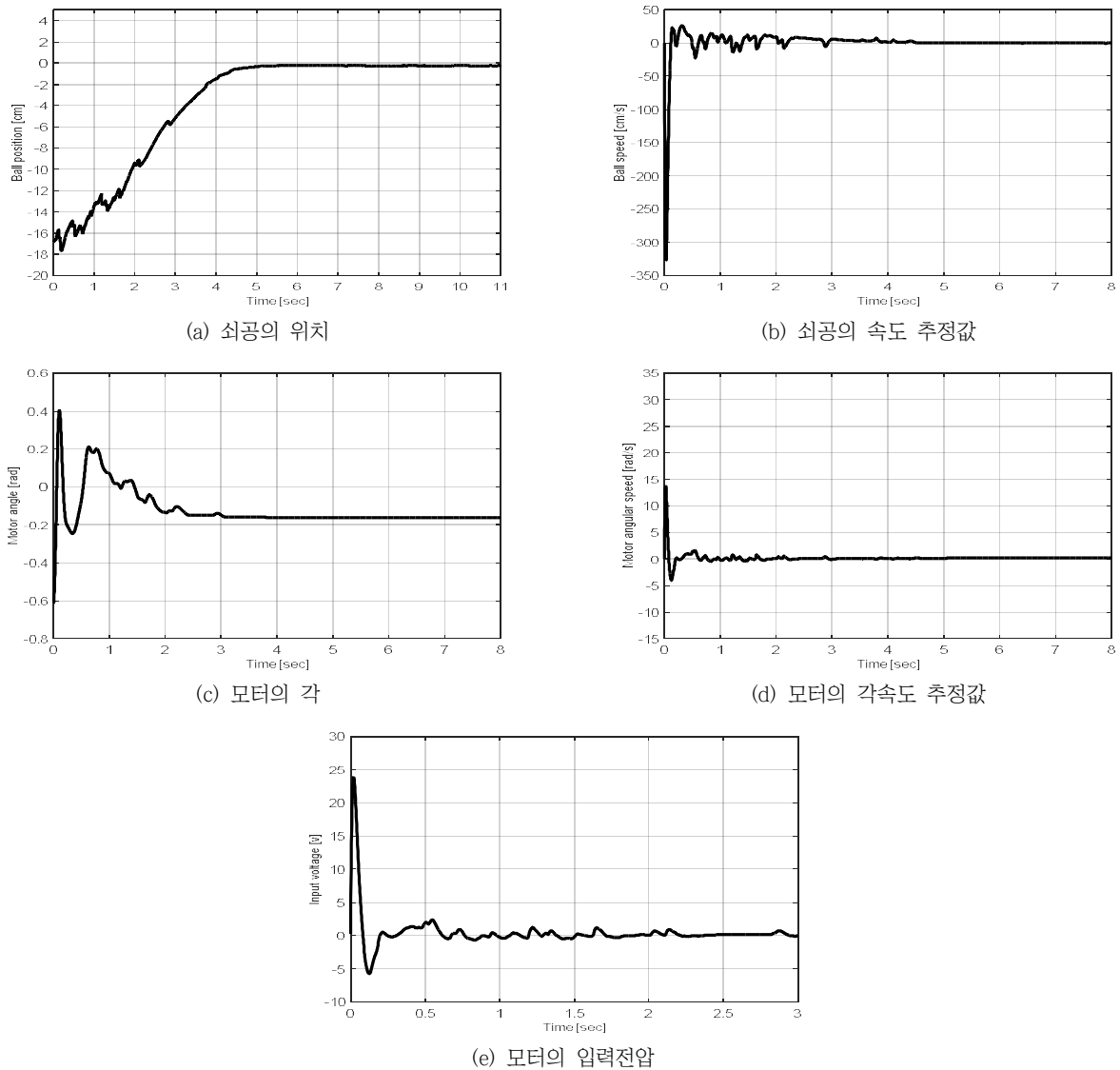


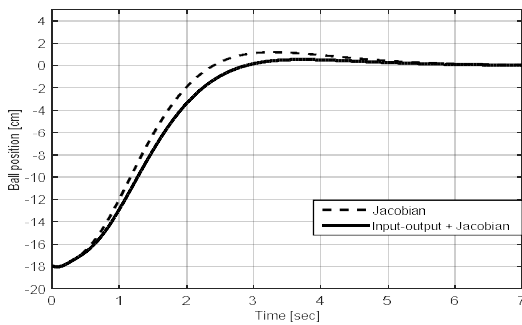
그림 7 2단 선형화 기반 상태관측기를 이용한 제어기의 실제 실험 결과

Fig. 7 Actual experimental results of controller using two-step linearization based state observer

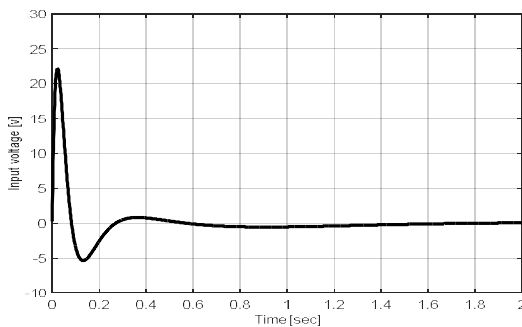
3. 두 가지 선형화 기반 제어기의 비교

3.1 자코비안 선형화와 2단 선형화 기반 제어기의 모의 실험 비교

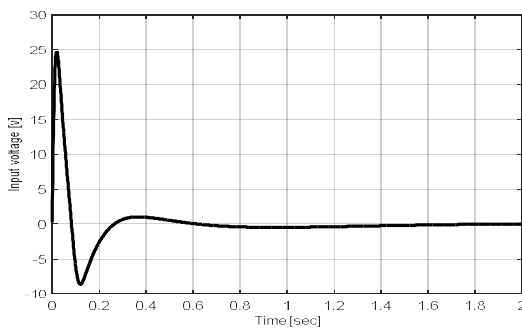
Fig. 8은 자코비안 선형화를 기반한 제어기와 2단 선형화를 기반한 제어기 각각에 대해 상태관측기를 이용한 모의 실험 결과에서 두 제어기의 장·단점을 파악하기 위하여 시스템의 출력(y)과 모터의 입력전압(u)을 비교한 것이다.



(a) 쇠공의 위치



(b) 모터의 입력전압(자코비안)



(c) 모터의 입력전압(2단 선형화)

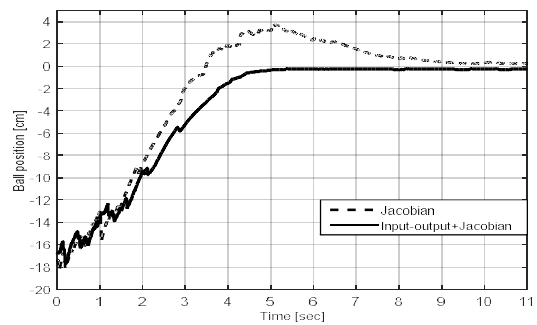
그림 8 두 가지 선형화 기반 상태관측기를 이용한 제어기의 모의 실험 결과 비교

Fig. 8 Simulation results of controller using two kinds linearization based state observer

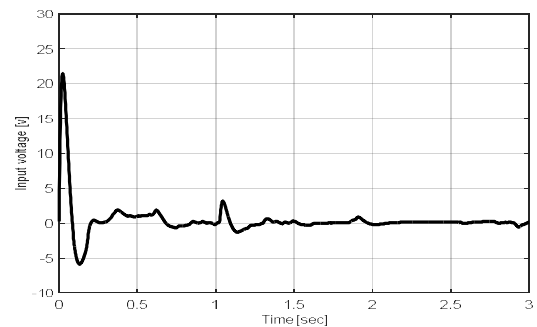
3.2 자코비안 선형화와 2단 선형화 기반 제어기의 실제 실험 비교

Fig. 9는 자코비안 선형화를 기반한 제어기와 2단 선형화를 기반한 제어기 각각에 대해 상태관측기를 이용한 실제 실험 결과에서 두 제어기의 장·단점을 파악하기 위하여 시스템의 출력(y)과 모터의 입력전압(u)을 비교한 것이다.

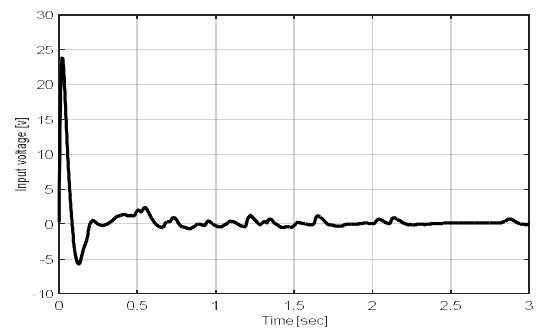
관찰 4: 자코비안 선형화를 기반한 제어기는 관찰 1을 바탕으로 비선형 제어기의 특이점 문제가 없어 전체 영역에서 작동되어 2단 선형화 기반 제어기보다 상대적으로 큰 오버슈트가 발생하였



(a) 쇠공의 위치



(b) 모터의 입력전압(자코비안)



(c) 모터의 입력전압(2단 선형화)

그림 9 두 가지 선형화 기반 상태관측기를 이용한 제어기의 실제 실험 결과 비교

Fig. 9 Comparison of actual experimental results of controller using two kinds linearization-based state observer

고, 정상상태 응답은 느리다는 단점을 확인하였으며, 대신에 모터의 입력전압은 작다는 장점을 확인하였다. 2단 선형화 기반 제어기는 관찰 2를 바탕으로 비선형 제어기의 특이점 문제는 발생하지 않았으며, 자코비안 선형화 기반 제어기보다 상대적으로 오버슈트는 발생하지 않았으며, 정상상태 응답은 빠르다는 장점과 모터의 입력전압은 크다는 단점을 확인할 수 있다.

4. 스위칭 제어 기법을 이용한 제어기

4.1 스위칭 제어 기법의 오차판단 기준

Fig. 9에서 2단 선형화 기반 제어기가 자코비안 선형화 기반 제어기보다 더 좋은 성능을 보였다. 그러나 2단 선형화 기반 제어기의 초기 응답이 느리다는 단점을 보완하기 위해 초기 응답이 빠른 자코비안 선형화 기반 제어기와 스위칭 제어 기법을 통해 성능을 더욱 이끌어내었다.

Fig. 10은 자코비안 선형화 기반 제어기와 2단 선형화를 기반한 제어기를 오차판단 기준에 따라 스위칭 시킨 결과로 쇠공의 위치(x_1)와 모터의 입력전압(u)를 나타낸 것이다.

관찰 5: Fig. 9의 (b)와 (c)를 관찰하면 짧은 시간 내에 모터의 입력전압이 흐르기 때문에 스위칭을 초기에 해야 할 것으로 예상되었다. 이에 따라 Fig. 10을 관찰하면 앞서 말했듯이 짧은 시간 내에 모터의 입력전압이 흐르므로 초기에 스위칭을 하였고, 오차판단 기준을 세분화 시켜 실험을 하였다.

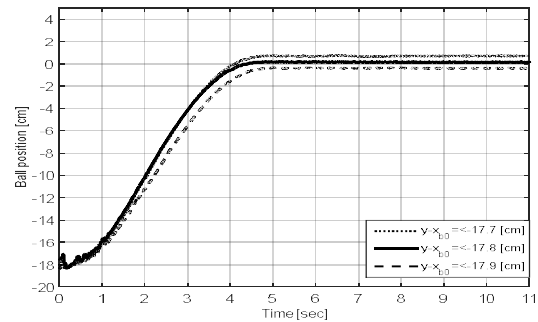
시스템의 출력과 제어 목표의 차이 즉, $y - x_{b0} = 0$ 이 되면 출력이 원하는 목표로 제어가 되는 것이다. 따라서, 오차판단 기준을 $y - x_{b0}$ 로 정하고 Fig. 9의 (a)를 관찰하면 오버슈트가 발생하였지만 초기에 빠른 과도응답을 보이는 자코비안 선형화 기반 제어기와 오버슈트는 발생하지 않았지만 정상상태 응답이 빠른 2단 선형화 기반 제어기의 장점만을 이용하기 위해 성능이 개선되는 오차판단 기준 $y - x_{b0}$ 의 값을 실험을 통해 찾아 주어야 한다.

오차판단 기준이 $-17.8cm$ 일 때 오버슈트는 거의 없고 정상상태 오차는 발생하지 않는 최적의 조건인 것을 확인하였고, 오차판단 기준이 $-17.7cm$ 일 때는 짧은 시간 내에 모터의 입력전압이 흐르는 것을 고려하면 자코비안 선형화 기반 제어기의 작동이 길어져 정상상태 응답은 빠르지만 약간의 정상상태 오차가 발생하였으며, 오차판단 기준이 $-17.9cm$ 일 때는 2단 선형화 기반 제어기가 빨리 작동되어 정상상태 응답은 느리면서 정상상태 오차가 발생하였다.

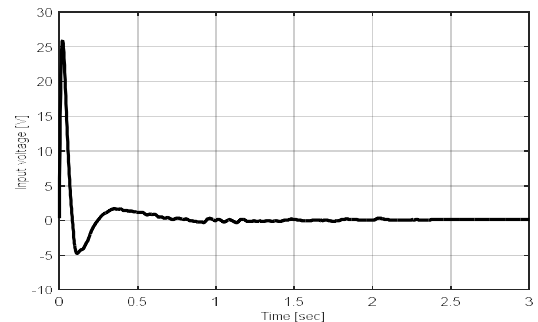
Remark 2: Fig. 10의 (a)를 관찰하면 $-17.7cm$ 와 $-17.9cm$ 일 때 정상상태 오차가 발생하였는데 이는 초기에 짧은 시간동안 모터의 입력전압이 흐르고, 이후에는 모터의 입력전압이 안정화가 되면서 정상상태 오차가 발생하게 되었다.

4.2 스위칭 제어 알고리즘

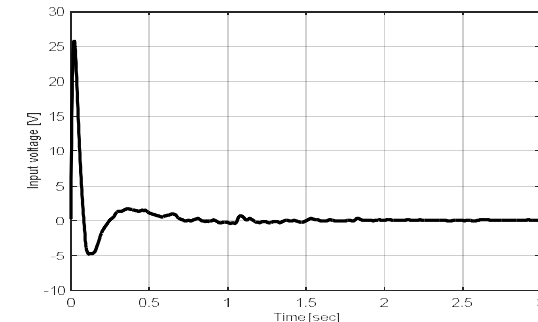
Fig. 11은 오차판단 기준에 따라 스위칭 시키는 알고리즘을 순서도로 나타낸 것이다.



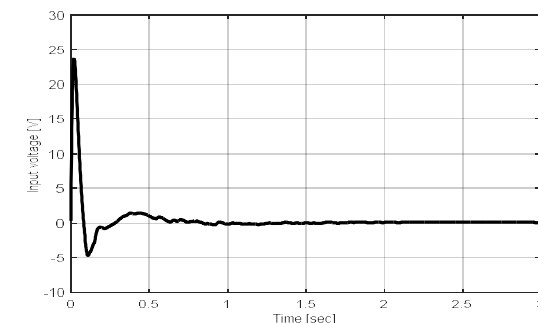
(a) 쇠공의 위치



(b) $y - x_{b0} \leq -17.7cm$ 일 때의 입력전압



(c) $y - x_{b0} \leq -17.8cm$ 일 때의 입력전압



(d) $y - x_{b0} \leq -17.9cm$ 일 때의 입력전압

그림 10 오차판단 기준에 따른 제어기의 실험 결과

Fig. 10 Actual experimental results of controller according to error criterion

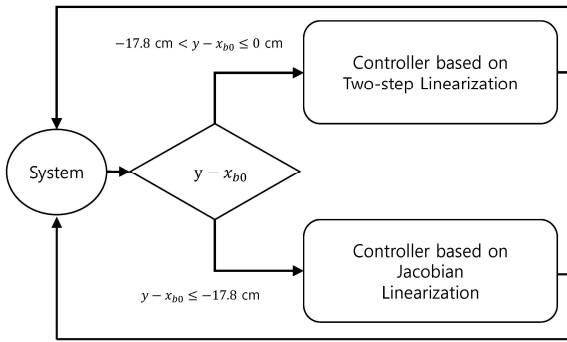


그림 11 제안된 최종 알고리즘

Fig. 11 The proposed final algorithm

스위칭 제어 알고리즘 설명: 자코비안 선형화 기반 제어기와 2단 선형화 기반 제어기를 오차판단 기준에 따라 스위칭 하여 원하는 구간에서만 각각의 제어기를 작동시킨다. Fig. 9의 (b)와 (c)를 관찰하면 자코비안 선형화 기반 제어기는 2단 선형화 기반 제어기보다 모터의 입력전압은 작으면서 오히려 과도응답은 빠른 결과를 보여 입력 전압을 줄이면서 빠른 응답을 얻을 수 있는 자코비안 선형화 기반 제어기를 먼저 작동시키고, 오버슈트는 발생하지 않으면서 정상상태 응답은 빠른 2단 선형화 기반 제어기를 나중에 작동시킨다. 즉, $y - x_{b0} \leq -17.8\text{cm}$ 일 때는 자코비안 선형화 기반 제어기를 작동시키고, $-17.8\text{cm} < y - x_{b0} \leq 0\text{cm}$ 일 때는 2단 선형화 기반 제어기를 작동시키는 것이다.

4.3 스위칭 제어 기법을 적용한 제어기와 비교

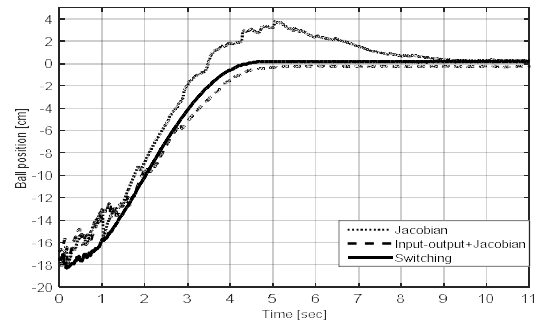
Fig. 12는 오차판단 기준을 -17.8cm 로 설정하여 스위칭 제어 기법을 적용한 제어기와 자코비안 선형화 기반 제어기 및 2단 선형화 기반 제어기의 출력(y)과 모터의 입력전압(u)을 최종적으로 비교해 본 결과이다.

스위칭 제어 기법의 적용 결과: 스위칭 제어 기법을 적용한 제어기의 실험 결과를 관찰하면 자코비안 선형화 기반 제어기에서 확인할 수 있었던 과도응답이 빠르다는 장점과 2단 선형화 기반 제어기에서 확인할 수 있었던 오버슈트는 발생하지 않고 정상상태 응답은 빠르다는 장점만을 이용하여 자코비안 선형화 기반 제어기보다는 오버슈트가 감소하였고 2단 선형화 기반 제어기보다는 정상상태 응답이 빨라졌으며, 모터 입력전압 크기의 폭은 2단 선형화 기반 제어기와는 거의 차이가 없는 결과를 확인하였다.

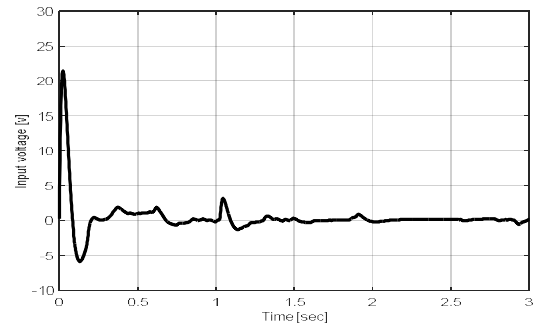
따라서, 각각의 제어기에서 확인할 수 있었던 장·단점들 중에서 장점만을 이용하기 위해 스위칭 제어 기법을 적용하여 실험 결과를 통해 더욱 향상된 성능의 효과를 확인할 수 있었다.

4.4 스위칭 제어기의 강인성

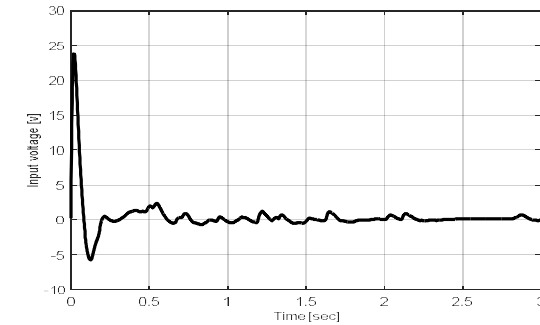
볼-빔 시스템은 쇠공의 움직임이 시간에 따라 측정이 된다. 그러나, 쇠공의 질량은 매우 정확한 값이기는 하나 고정된 값은 아니기 때문에 쇠공의 질량에 대해 볼-빔 시스템은 불확실성을



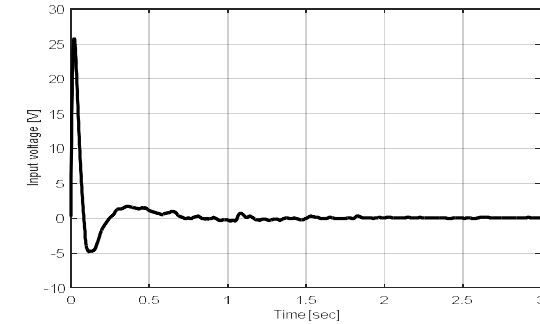
(a) 쇠공의 위치



(b) 모터의 입력전압(자코비안)



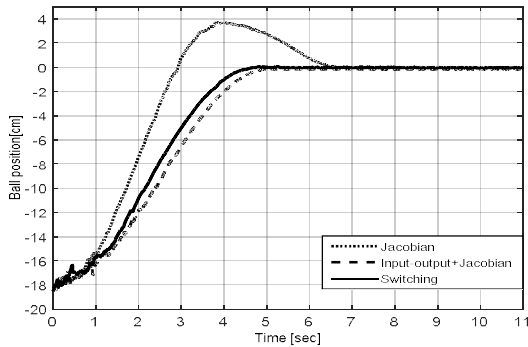
(c) 모터의 입력전압(2단 선형화)



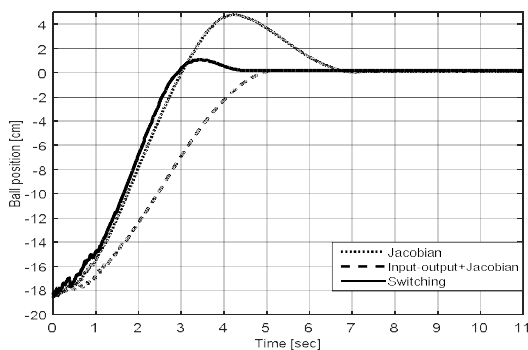
(d) 모터의 입력전압(스위칭)

그림 12 스위칭 제어 기법을 적용한 제어기의 비교: 쇠공의 질량 (65.954 [g])

Fig. 12 Comparison of controllers according to switching control technique: Mass of ball(65.954 [g])



(a) 쇠공의 위치(쇠공의 질량: 66.104[g])



(b) 쇠공의 위치(쇠공의 질량: 67.212[g])

그림 13 스위칭 제어 기법을 적용한 제어기의 강인성

Fig. 13 The robustness of the controller applying the switching control technique

가지고 있다. 따라서, Fig. 13은 동일한 조건에서 질량이 다른 쇠공에 대해서도 스위칭 제어기의 강인성을 나타내었다.

관찰 6: Fig. 13을 Fig. 12와 비교하였을 때, Fig. 13(a)의 자코비안 선형화 기반 제어기는 상대적으로 오버슈트는 커지는 특징과, 2단 선형화 기반 제어기는 상대적으로 정상상태 오차는 감소하였지만, 수렴속도가 느려지는 특징을 확인할 수 있다. Fig. 13(b)도 마찬가지로 자코비안 선형화 기반 제어기의 오버슈트는 커지는 특징과, 2단 선형화 기반 제어기는 정상상태 오차는 감소하였으나, 수렴속도가 느려지는 특징을 확인할 수 있다. 따라서, 쇠공의 질량이 커질수록 자코비안 선형화 기반 제어기는 오버슈트가 커지는 특징과, 2단 선형화 기반 제어기는 정상상태 오차는 감소하였지만, 수렴속도가 느려지는 특징을 확인할 수 있었으며, 모터의 입력전압은 비슷하였다. 최종적으로 자코비안 선형화 기반 제어기는 2단 선형화 기반 제어기에 비해 응답속도가 빠르다는 장점과 2단 선형화 기반 제어기는 자코비안 선형화 기반 제어기보다 수렴속도가 빠르다는 장점을 이용하기 위해 스위칭 제어 기법을 적용하였을 때, 쇠공의 질량이 다르더라도 오버슈트는 감소하고 수렴속도가 빨라지는 결과를 확인할 수 있어, 스위칭 제어 기법의 강인성을 확인 하였다.

5. 결 론

본 논문에서는 볼-빔 시스템에 자코비안 선형화 기법과 2단 선형화 기법을 적용하여 측정할 수 있는 쇠공의 위치와 모터의 각은 상태관측 제어기를 측정할 수 없는 쇠공의 속도와 모터의 각속도는 상태관측기를 설계하여, 모의 실험과 실제 실험을 통해 제어기의 성능을 확인하였다. 또한, 외란과 측정잡음에 영향을 최소화하기 위해 제어기의 극점과 관측기의 극점 구간을 각각 설정하여 이득값에 따라 변화하는 시스템의 특성과 상승시간 그리고 오버슈트를 비교 분석하여 설정한 극점 범위에서는 자코비안 선형화 기법을 적용한 제어기보다 2단 선형화 기법을 적용한 제어기가 성능이 우수하다는 것을 모의 실험을 통해 확인하였다. 이에 따라 실제 실험을 통해 자코비안 선형화 기반 제어기는 오버슈트와 정상상태 응답이 느린 것을 확인하였으며, 2단 선형화 기반 제어기는 오버슈트는 거의 없었고 정상상태 응답은 빠른 결과를 확인하였다. 따라서, 각각의 제어기에서 확인하였던 장·단점들을 오차판단 기준에 따라 스위칭 제어 기법을 적용하여 최대한 성능을 이끌어내어 향상된 성능의 제어기를 제안하였다. 실험을 통해 스위칭 제어 기법을 적용함으로써 시스템의 오버슈트는 감소하였으며, 정상상태 응답은 더욱 빨라진 결과를 확인하였고, 모터 입력전압 크기의 폭은 2단 선형화 기반 제어기와는 거의 차이가 없는 것을 확인하였으며, 쇠공의 질량이 변화더라도 유사한 결과를 확인할 수 있어 스위칭 제어 기법의 강인성도 확인할 수 있다.

감사의 글

본 논문은 동아대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.

References

- [1] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd Ed., Oxford University Press Inc., 1999.
- [2] H.-L. Choi and J.-T. Lim, "On robust approximate feedback linearization," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E87-A, no. 2, pp. 502-504, 2004.
- [3] H.-L. Choi and J.-T. Lim, "Global exponential stabilization of a class of nonlinear systems by output feedback," *IEEE Trans. Automatic control*, vol. 50, no. 2, pp. 255-257, 2005.
- [4] H.-L. Choi and J.-T. Lim, "Output feedback stabilization for a class of Lipschitz nonlinear systems," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E88-A, no. 2, pp. 602-605, 2005.
- [5] H.-D. Kim and H.-L. Choi, "An output feedback controller for a ball and beam system under measure-

- ment noise of feedback sensor,” *Journal of Institute of Control, Robotics and System*(in Korean), vol. 17, no. 10, pp. 955-959, 2011.
- [6] J. Hauser, S. Sastry, and P. Kokotovic, “Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 37, no. 3, pp. 392-398, 1992.
- [7] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd Ed., Prentice Hall Inc., 2002.
- [8] H. S. Jang, J. I. Bae, and K. S. Lee, “Nonlinear characteristic analysis for ball-beam system using sliding mode control based-on state observer,” *Proc. KIEE Summer Conference, Yongpyeong, Korea*, pp. 1279-1280, July, 2012.
- [9] K.-T. Lee, M.-G. Jeong, and H.-L. Choi, “Control of a ball and beam system using switching control method,” *Trans. KIEE(in Korean)*, vol. 66, no. 1, pp. 72-81, 2017.
- [10] D.-J. Lee, S.-K. Oh, and H.-K. Kim, “Design of optimized interval Type-2 fuzzy cascade controller for ball & beam system using differential evolution algorithm,” *Proc. KIEE Summer Conference, Bexco, Korea*, pp. 1874-1875, July, 2010.
- [11] Quanser, *Ball and Beam User Manuals*, 2008.

저 자 소 개



이 경 태 (Kyung-Tae Lee)

2016년, 동아대학교 전기공학과(학사).
2016년~현재 동 대학원 석사과정.
관심분야는 비선형 시스템의 궤환 선형화 기법, 스위칭 제어 기법 등.



최 호 림 (Ho-Lim Choi)

1996년, Univ. of Iowa, USA(학사).
1999년, 2004년 KAIST(석·박사).
KAIST 정보전자연구소 연구조교수, KIST 인지로봇연구단 선임연구원, 2007년~현재 동아대학교 전기공학과 교수. 관심분야는 비선형 시스템의 궤환 선형화 기법, 시지연 시스템, 시간 최적제어 등.