

# 몬테카를로 해석 기반 확률적 위상최적화

김 대 영<sup>1</sup> · 노 혁 천<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>세종대학교 건설환경공학과

## Topology Optimization based on Monte Carlo Analysis

Dae Young Kim<sup>1</sup> and Hyuk Chun Noh<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Civil and Environmental Engineering, Sejong Univ., Seoul, 05006, Korea

### Abstract

In this paper, we take into account topology optimization problems considering spatial randomness in the material property of elastic modulus. Based on 88 lines MATLAB Code, Monte Carlo analysis has been performed for MBB(messerschmidt-bölkow-blohm) model using 5,000 random sample fields which are generated by using the spectral representation scheme. The random elastic modulus is assumed to be Gaussian in the spatial domain of the structure. The variability of the volume fraction of the material, which affects the optimum topology of the given problem, is given in terms of correlation distance of the random material. When the correlation distance is small, the randomness in the topology is high and vice versa. As the correlation distance increases, the variability of the volume fraction of the material decreases, which comply with the feature of the linear static analysis. As a consequence, it is suggested that the randomness in the material property is need to be considered in the topology optimization.

**Keywords** : topology optimization, compliance, probabilistic analysis, correlation distance

### 1. 서 론

구조적 안전성과 설계비용의 최소화를 목적으로 최적화 설계가 연구되고 있다(Kim D.Y. *et al.*, 2016). 최적화 설계란 주어진 환경에서 최선의 결과를 얻는 설계를 말한다. 여기서 말하는 최선은 얻고자 하는 목표(objective) 값이 최대 혹은 최소일 조건을 만족하는 경우를 의미한다. 그 동안 많은 최적화 설계방법이 연구 개발되어 왔고 건설, 기계 등 많은 분야에서 활용되고 있다. 특히, 위상 최적화 설계(topology optimization design)는 구속 조건과 하중 조건 그리고 물성 값을 입력하면 목표 값을 만족하는 최적의 형상을 가지는 결과물을 얻을 수 있다.

최근 컴퓨터의 계산 성능 개선과 확률이론의 공학적용 용이성 증대 등을 배경으로 각종 공학문제의 해결을 위해 결정론적 해석(deterministic analysis)에 더하여 불확실성을 고려한 확률론적 해석(probabilistic analysis) 방법이 주목을 받고

있다. 확률론적 해석은 최적화 해석에 반드시 동반 수행되어야 할 연구라 사료되지만, 시간 효율성 등을 이유로  $\beta$ 값을 이용하여 최소 Compliance와 최적의 형상을 찾는 RBTO(reliability-based topology optimization) 방법이 주를 이루고 있다(Kharamanda *et al.*, 2004). 하지만, 목적 구조물의 최적 형상을 도출하는 관점에서는 최적형상의 구성을 지배하는 구조/설계 인수의 공간적 불확실성이 최적형상의 형상에 미치는 영향에 대한 고찰이 요구된다.

본 연구에서는 기존의 결정론적 위상최적화 설계 중 하나인 Andreassen 등(2011)이 제안한 88 lines MATLAB 코드를 기반으로 형상최적화에 대하여 몬테카를로 해석에 기초한 확률적 해석을 수행하고자 한다. 구조영역 내의 설계 인수의 임의성(randomness) 모델링은 추계장(random field, stochastic field) 생성분야에서 자주 사용되는 스펙트럼 모사법(spectral representation method; Shinozuka and Deodatis, 1996)을 적용한다. 확률장의 스펙트럼 밀도함수를

\* Corresponding author:

Tel: +82-2-3408-3292; E-mail: cpebach@sejong.ac.kr  
Received February 1 2017; Revised February 2 2017;  
Accepted February 3 2017

©2017 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

이용하는 스펙트럼 모사법을 이용할 경우 단순히 통계적 특성을 만족하는 확률장이 아닌, 해석 영역 내 확률장의 공간적 진동수 (spatial frequency)를 고려한 확률장 표본을 얻을 수 있으며, 이를 통하여 상관거리 별 확률장 속성에 따른 형상최적화 결과를 얻을 수 있게 된다. 확률적 해석 결과는 결정론적 최적형상 결과와의 비교를 통하여 결정론적 형상최적화에 대한 보완 사항을 제시할 수 있다.

## 2. 본 론

이 장에서는 Andreassen 등(2011)이 제안한 위상최적화 설계이론을 간단히 소개하고, 구조계 영역에 대한 추계장 모델링 방법 그리고 이를 이용한 해석법과 해석결과에 대한 평가 등을 다루고자 한다.

### 2.1 위상최적화 이론

위상최적화 해석방법은 반복해석을 통해 목적함수인 compliance의 최소치를 찾는 과정으로 설계영역은 사각형 유한요소들의 조합으로 모델링하며, 각 요소  $e$ 의 재료 밀도를  $x_e$ 라 할 때, 요소별 재료탄성계수  $E_e$ 와 최소화를 위한 목적함수인 compliance는 다음과 같이 정의된다(Sigmund O. *et al.*, 2011).

$$E_e(x_e) = E_{\min} + x_e^p(E_o - E_{\min}) \quad (1)$$

$$x_{\min}: c(X) = U^T K U = \sum_{e=1}^N E_e(x_e) u_e^T k_0 u_e \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{subject to : } & \frac{V(X)}{V_o} = f \\ & : KU = F \\ & : 0 \leq X \leq 1 \end{aligned}$$

여기서,  $E_{\min}$ 는 강성행렬이 0이 되는 것을 피하기 위해 정의된 void element의 탄성계수를 의미하고  $p$ 는 penalization factor라 하며, 설계밀도  $x_e$ 의 값이 0에서 1사이의 값을 가지기 때문에 설계 시 결과 값을 명확하게 할 목적으로 충분히 큰 값, 보통  $p=3$ 을 사용한다. 하지만  $p > 3$  이상이 되면, 비경제적인 설계가 될 수 있음을 고려해야 한다(Bendsøe *et al.*, 2003).  $(K)k$ 는 (전체)강성행렬이고,  $U, u_e$ 는 전체 및 요소변위벡터이다.  $N(=x \times y)$ 은 분할된 요소( $e$ )들의 수,  $f$ 는 부피율 (volume fraction)을 의미하며 재료체적(material volume)  $V(X)$ 와 설계영역체적(design domain volume)  $V_o$ 의 비로

나타낼 수 있으며, 국부체적비(local volume fraction)은 전체 요소영역에 대한 합으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_{i=1}^N f_i = f \quad (3)$$

본 연구는 Andreassen 등(2011)의 Code를 이용하였으며 부피율의 데이터로부터 재료 물성치의 보간(interpolate)이 이루어진다. 다시 말해, 재료와 공극의 부피율을 정해주면 정해진 영역의 하중을 견딜 수 있는 최소 compliance를 반복 계산을 통해 얻게 되며, 이를 통하여 형상최적화를 수행한다 (Tavakoli *et al.*, 2011).

### 2.2 재료탄성계수의 불확실성 고려

재료탄성계수의 공간적 임의성은 스펙트럼 모사법을 적용하여 2D-1V(2-dimensional uni-variate)의 추계장  $f_i(\vec{x})$ 를 생성하여 식 (4)와 같이 표현할 수 있다. 여기서, 추계장  $f_i(\vec{x})$ 는 평균 0과 표준편차 0.1을 가지는 것으로 가정하였고, 확률밀도는 정규분포(normal distribution)로 가정한다.  $\bar{E}$ 는 평균탄성계수를 의미하며,  $i$ 는 추계장의 순번을 나타낸다.

$$E_i(\vec{x}) = \bar{E}(1 + f_i(\vec{x})) \quad (4)$$

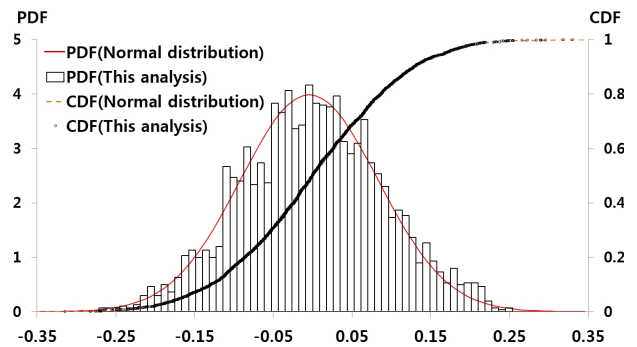


Fig. 1 PDF & CDF of generated random fields

Table 1 Comparison between theoretical and simulated gaussian random numbers

Region of the random variable $X$	Probability		
	Ex. RF1	Ex. RF2	Theoretical value
$\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma$	0.672	0.683	0.683
$\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma$	0.959	0.958	0.954
$\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma$	0.999	0.999	0.997

Note: Ex. RF1 denotes "Example Random Field 1"

Fig. 1은 본 연구에서 생성한 추계장 난수의 확률밀도를 나타낸 것으로 정규분포 확률밀도와 평균 0을 만족하는 것을 보여주고 있으며, 검은 점으로 연결된 선은 누적분포함수(cumulative distribution function)를 나타낸다.

Table 1은 생성된 난수의 분포도와 이론값을 비교하고 있으며, 생성된 추계장의 정확성을 보여주고 있다. 여기서,  $\mu$ 는 평균,  $\sigma$ 는 표준편차를 의미한다.

### 2.3 수치예제 해석

해석은 Fig. 2와 같이 집중하중이 작용하는 단순보 모델을 사용하였다. 구조물의 물성치는 Table 2와 같이 가정하여 해석하였으며, 해석시간을 줄이기 위해 구조 및 작용하중의 대칭성을 고려한 대칭모델(MBB-Beam)을 적용하였다. 본 연구는 설계인수의 공간적 불확실성을 고려하는 확률적 해석으로서 구조의 대칭성을 적용할 경우 재료의 대칭성을 동시에 전제하게 되나 이에 의한 결과의 오류는 크지 않은 것으로 가정하고자 하며, 이러한 대칭모델의 적용은 동일한 가정하에서 적합한 것으로 용인되어 적용되고 있다(Lawrence, 1987; Choi and Noh, 1996).

총 요소 수  $N$ 은 Table 2와 같이  $x$ -방향 60개,  $y$ -방향 20개로 총 1,200개이며, 자유도 및 요소번호는 Fig. 2와 같이 위에서 아래로, 왼쪽에서 오른쪽 방향으로 진행된다. 하중은 아랫방향으로 1만큼, 재료가 차지해야 하는 공간의 비율인 부피율은 50%로 가정하였다.

재료탄성계수에 대한 확률장은 Fig. 2에서와 같이 추계장을  $x, y$ 축 방향의 요소 수만큼 생성하여 예제모델의 각 요소에 해당하는 위치의 변수를 적용하였으며, 총 5,000개의 표본을

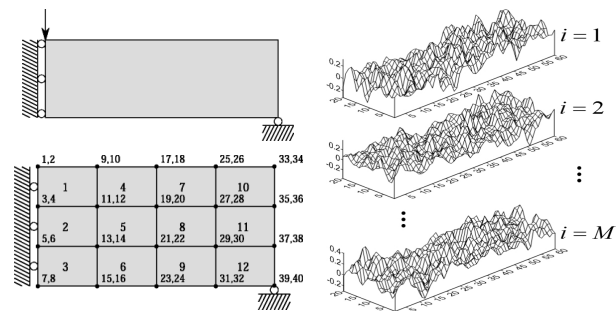


Fig. 2 Analytical model and random fields

Table 2 Material properties for analytical model(MBB)

Name	Values
$x, y$ direction elements( $n_x, n_y$ )	60, 20
$E$ (Vol. fraction)	1.0(50%)
$\nu$ (Poisson's ratio), load	0.3, 1.0
Number of random fields	5000

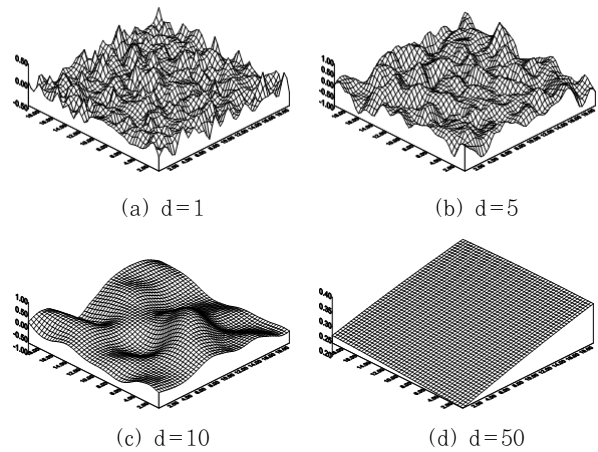


Fig. 3 Gaussian random fields corresponding to the correlation distance  $d$

사용하여 해석한다.

Fig. 3에 나타난 바와 같이 추계장은 상관거리  $d=1, 5, 10, 20, 50$  총 5가지의 경우를 고려하였다. Fig. 3은 상관 거리에 따른 추계장의 특성을 보여주고 있다. 즉, 상관거리가 증가함에 따라 추계장은 점진적으로 상수장(constant field)으로 나타난다. 상관거리  $d$ 는 스펙트럼밀도함수의 변환함수인 자기상관함수에 사용되는 인수로서, 본 연구에서 적용한 식(5)의 함수에 나타나있다.

$$R(\xi_1, \xi_2) = \sigma_f^2 \exp\left\{-\left(\frac{\Delta\xi_1}{d_1^2}\right)^2 - \left(\frac{\Delta\xi_2}{d_2^2}\right)^2\right\} \quad (5a)$$

$$S(\kappa_1, \kappa_2) = \sigma_f^2 \frac{d_1 d_2}{4\pi} \exp\left\{-\left(\frac{d_1 \kappa_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_2 \kappa_2}{2}\right)^2\right\} \quad (5b)$$

Fig. 3(a)~(d)는 상관거리가 다른 추계장을 특성적으로 나타낸 것으로 네 경우에 대한 앙상블(ensemble)은 모두

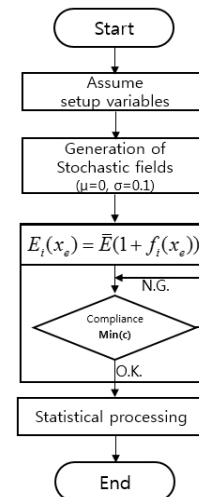


Fig. 4 Flowchart of design process

평균 0 표준편차는 0.1을 가지지만 상관거리가 작을수록 공간적 진동수(spatial frequency)가 커지며, 상관거리가 커질수록 공간적 진동수가 작아지는 특성을 가진다.

Fig. 4는 전체 설계 흐름도이며, 상관거리별로 생성된 개별 샘플들에 대한 해석을 수행하고 이에 대한 통계처리를 통하여 형상최적화에 대한 통계적 특성을 얻는 흐름을 보여주고 있다.

### 2.4 수치예제 결과 및 고찰

본 장에서는 기존의 결정론적 해석결과에 대비하여 추계장 특성을 고려한 통계적 값들을 제시하고자 한다.

먼저 재료탄성계수의 공간적 임의성에 의한 형상최적화 결과의 변화 예를 보기 위하여  $d=5.0$ 에서 얻어진 결과들을 나타내면 Fig. 5와 같다. Fig. 5(a), (b)는 각각 100 번째와 200 번째의 표본에 대한 해석결과이다. 그림에서 보는 바와 같이 재료탄성계수의 공간적 임의성에 의해 최적형상은 구조의 경계부분을 제외하면 그 영향 정도가 매우 큼을 알 수 있다.

이들 형상최적화에 대한 통계적 특성은 Fig. 6과 Table 3에 나타내었다. 여기에 제시된 위상최적화 설계의 해석 값 (compliance, shape 등)은 앞서 기술한 바와 같이 상관관계 거리별로 생성된 5,000개의 표본들에 대해 수행된 해석에 대한 통계적 결과값들이다.

Fig. 6(a)는 결정론적 해석에 의한 결과로서 모델링의 가정에 부합하는 최적화된 형상을 보여주고 있으며, (b)~(f)는 상관거리 별 해석결과로서, 좌측은 최적형상의 평균형상, 우측은 최적형상의 표준편차를 보여주고 있다.

Fig. 6에서 보는 바와 같이 상관거리가 증가함에 따라 최적형상은 점차 또렷한 형태로 변화됨을 보여주고 있으며, 이 형상은 Fig. 6(a)의 결정론적 해석에 의한 결과로 접근하고 있음을 알 수 있다. 이는 Fig. 3을 통하여 설명되었듯이, 상관거리가 클 경우 추계장표본이 구조영역 내에서 일정한 값을 가지는 상수함수(constant field)의 형태가 되기 때문이다. 즉, 탄성계수에 공간적 불확실성이 없을 경우, 이에 대한 선형 해석에서 나타나는 결과는 상수탄성계수의 크기와 관계없이 동일한 결과의 최적 형상을 나타내게 된다. 그러므로 상관거리가 무한대인 이론적인 경우에 대해서는 최적형상에 대한 표준편차가 0이 되고, 최적형상 자체는 결정론적 해석의 경우와 동일하게 된다는 것을 알 수 있다.

이와는 반대로 상관거리가 작은 경우, 즉 추계장이 공간적 변화도가 큰 경우, 최적형상의 평균은 결정론적 최적형상과는 다르게 형성된다(예, Fig. 6b, 6c 등). 일반적으로, 어떤 주어진 구조에 대한 역학적 거동의 평균치는 상관거리와 관계없이 일정한 값을 가지게 되나(Noh and Yoon 2010),

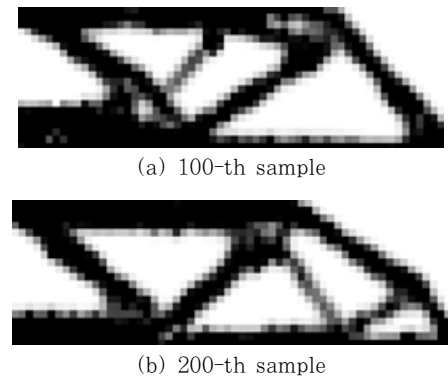


Fig. 5 Analysis examples for individual samples ( $d=5.0$ )

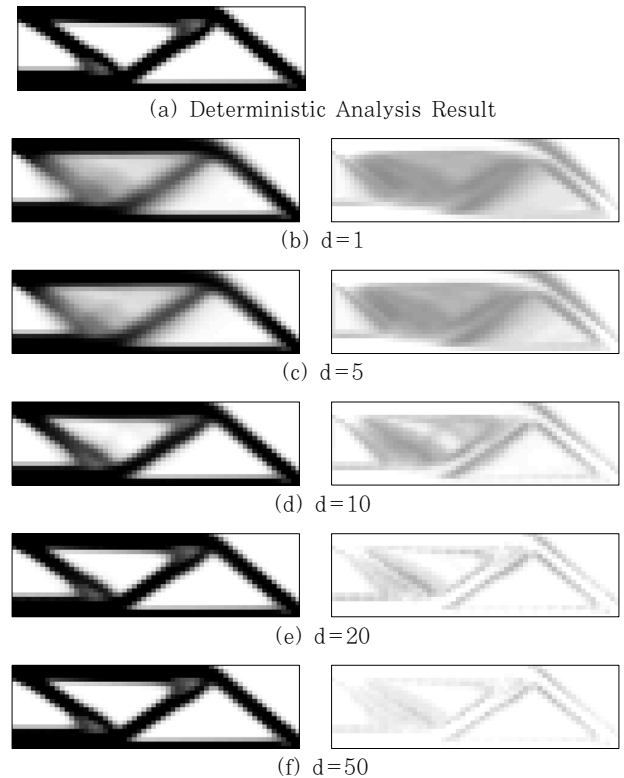


Fig. 6 Mean and standard deviation(SD) of optimum shape for corresponding correlation distance  $d$  (Left: mean, Right: SD)

compliance에 기반을 둔 형상최적화의 경우 이러한 특성을 보이지 않는다.

Fig. 6의 결과에서 알 수 있는 것은 상관거리가 큰 경우 최적형상의 표준편차(또는 형상불확실성 정도)는 최적형상의 경계를 따라 크게 나타나는 반면, 상관거리가 작은 경우에는 최적형상 테두리는 물론 구조계를 아우르는 봉투형상(envelop shape) 내의 대부분 위치에서도 나타난다는 것이다.

Fig. 7에는 상관거리별로 계산된 분산계수(COV: coefficient of variation)의 분포를 나타내었다. 분산계수는 유한요소별로 계산되었으며, 다음의 식을 따른다.

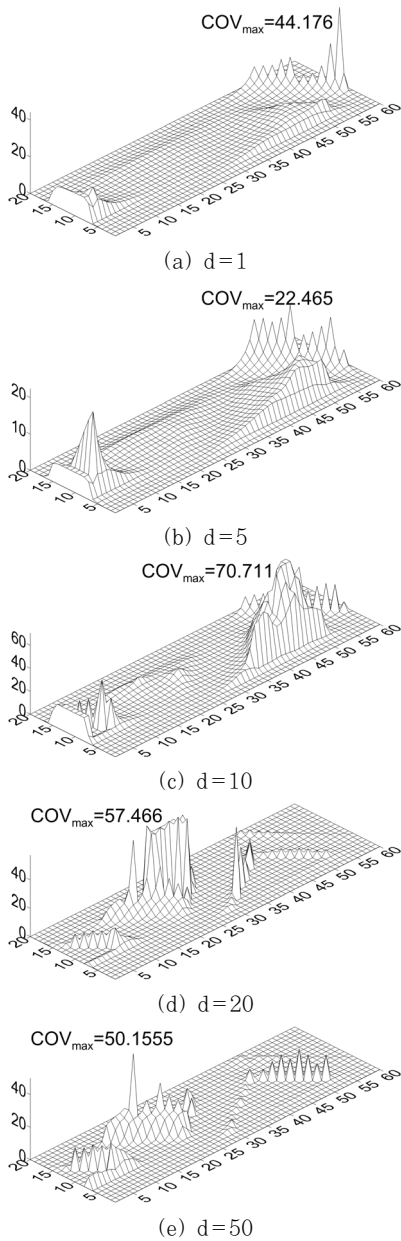


Fig. 7 COV distribution over the structural domain

$$COV_e = \frac{\sigma_{x_e}}{|\mu_{x_e}|} \tag{6}$$

여기서,  $\sigma_{x_e}, \mu_{x_e}$ 는 각각 요소  $e$ 에서의 재료밀도  $x_e$ 의 표준편차와 평균을 의미한다.

Fig. 7에서 보는 바와 같이 분산계수의 분포는 상관거리  $d$ 에 따라 다른 특징을 보임을 알 수 있다. 상관거리가 작은 경우 전체 영역에 높은 수치의 분산계수가 나타나는 반면, 상관거리가 큰 경우 분산계수가 나타나는 영역이 최적형상의 경계부분에 집중되며 분산계수의 크기는 상대적으로 작음을 볼 수 있다.

Table 3 Compliance of deterministic and probabilistic analyses

Analyses		Compliance	
		Mean	Standard deviation
Deterministic		203.193	Non-value
Probabilistic	d=1	210.994	5.667
	d=5	211.833	16.493
	d=10	212.276	25.661
	d=20	215.927	45.611
	d=50	265.212	189.376

Table 3은 결정론적 방법과 확률론적 방법에 의한 해석에서 얻은 compliance를 비교한 것이다. 상관거리 별로 개별 표본에서 얻어진 compliance의 최소값에 대한 평균과 표준편차를 나타내었다.

해석을 통해 얻어진 최소 compliance는 결정론적 방법일 때 가장 적은 값을 가지며, 상관거리가 커질수록 값이 커지는 결과를 나타내었다. Compliance는 변형에너지로서 이는 변위에 의존한다. 그러므로 상관거리가 커지면서 compliance의 평균치가 커지는 것은 모델링에 사용된 동일하중 하에서 변위의 값이 탄성계수의 역에 비례하기 때문에 나타나는 현상이다. 정구분포로 가정된 탄성계수의 경우 평균보다 적은 값이 평균보다 큰 값에 비하여 변위에 미치는 영향이 크게 된다.

상관거리가 작은 경우 한 표본 내에 평균대비 대칭으로 분포하는 탄성계수가 나타나게 되므로 compliance에 대한 영향은 적게 되며, 상관거리가 큰 경우 한 표본 내의 탄성계수가 동일하고, 전술한 바와 같이 평균보다 적은 탄성계수의 영향이 크게 발휘되어 compliance의 평균치도 증가하게 되며, 동시에 표준편차도 크게 나타난다. 따라서 크게 계산된 compliance는 표본들에 대한 통계처리 과정에서 기인하는 것으로서 확률론적 해석에서 얻은 최적형상이 결정론적 해석의 그것에 비해 좋지 않은 결과임을 나타내는 것은 아니다.

### 3. 결 론

기존의 위상최적화는 재료의 특성이 구조계 영역에 동일함 값을 가진다는 결정론적 가정에 근거하고 있다. 그러나 실제 구조의 재료 특성은 공간적으로 불확실성을 가지게 되며, 이러한 공간적 임의성이 위상최적화 결과에 영향을 미칠 수 있음에 착안하여 몬테카를로 해석에 기반을 둔 확률론적 위상최적화 해석을 수행하였다.

대칭성을 고려한 대칭모델(mbb-beam)을 적용하여 Intel 3.4GHz, 16GB DDR3 RAM의 재원의 PC를 사용하여 해석하였으며, 5,000개의 표본에 대한 총 해석 시간은 총 약 47.5시간이 소요되었다.

최적형상은 표본별로 다른 형태를 나타내며, 전체 표본에 대한 통계처리를 통하여 평균적 최적형상과 해당 표준편차 및 분산계수를 산정하였다. 일반적으로 재료상수의 공간적 임의성에 의한 평균 응답은 추계장의 상관거리와 관계없이 동일한 값을 나타내지만, 위상최적화의 경우 평균 최적형상이 추계장의 상관거리에 영향을 받는 것으로 나타났으며, 위상최적화에서 적용하는 선형 해석의 특성에 따라 상관거리가 클 때의 평균 최적형상이 결정론적인 위상최적화와 같게 되며, 상관거리가 작은 경우는 상대적으로 다른 형태의 최적형상이 나타나는 것으로 산정되었다. 최적화의 목적함수인 compliance 값은 결정론적 해석 대비 확률론적 해석에서 큰 것으로 나타났다.

해석결과를 통하여 확률론적 특성을 고려할 경우 결정론적 해석에 비하여 다른 형태의 최적형상이 얻어지게 됨을 알 수 있으며, 이러한 영향은 상관거리가 작은 경우에 더 크게 나타남을 알 수 있다. 따라서 위상최적화 시 구조재료 불확실성의 특성에 따른 고려가 필요한 것으로 사료된다.

### 감사의 글

본 연구는 국토교통부/국토교통과학기술진흥원의 지원으로 수행된 연구 과제(과제번호 13IFIP-C113546-01)입니다.

### References

Andreassen, E., Sigmund, O. (2011) *Efficient Topology Optimization in MATLAB using 88 lines of Code*, *Struct. & Multidiscip. Optim.*, 43, pp.1~16.

Bendsøe, M.P, Sigmund, O. (2003) *Topology Optimization Theory, Methods and Application*, Springer-Verlag, New York.

Choi, C.K., Noh, H.C. (1996) Stochastic Finite Element Analysis of Plate Structures by Weighted Integral Method, *Struct. Engng. Mech.* 4(6), pp.703~715.

Kharamanda, G, Olhoff, N, Mohamed A., Lemaire, M. (2004) Reliability-based Topology Optimization, *Struct. Multidisc. Optim.*, 26, pp.295~307.

Kim, D.Y., Noh, H.C. (2016) Considering Spatial Randomness in Material Property in Compliance-based Topology Optimization, *COSEIK Annual Conference*, p.73.

Lawrence, M.A. (1987) Basis random variables in finite element method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 24, pp.1849~1863.

Noh, H.C., Yoon, Y.C. (2010) Effect of Random Poisson's Ratio on the Response Variability of Composite Plates, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 23(6), pp.727~737.

Shinozuka, M., Deodatis, G. (1996) Simulation of Multi-dimensional Gaussian Stochastic Fields by Spectral Representation, *Appl. Mech. Rev.*, 49, pp.29~53.

Tabakoli, R., Mohseni, S.M. (2011) Alternating Active-phase Algorithm for Multimaterial Topology Optimization Problem a 115-line MATLAB Implementation, *Struct. & Multidiscip. Optim.*, 49, pp.621~642.

### 요 지

본 논문에서는 재료 탄성계수의 공간적 불확실성을 고려한 위상최적화 문제를 다루었다. 88줄로 작성된 MATLAB Code를 사용하여 MBB(messerschmidt-bölkow-blohm) model에 대해 5,000개의 추계장 표본을 작성하여 해석에 사용하였다. 재료탄성계수의 추계장 표본은 스펙트럼 모사법을 적용하여 작성하였고, 구조계영역 내에서 정규분포하는 것으로 가정하였다. 해석결과에 대한 통계처리를 통하여 형상최적화의 결과를 나타내는 체적률의 변화도를 추계장의 상관거리에 대하여 나타내었다. 최적형상의 변화도는 상관거리가 작을 경우 크게 산정되었고, 상관거리가 큰 경우에는 적은 값을 나타내었다. 큰 상관거리에서 변화도가 적은 것은 위상최적화가 선형해석에 따르기 때문이다. 따라서 위상최적화 시 구조재료 불확실성의 특성에 따른 고려가 필요한 것으로 사료된다.

**핵심용어** : 형상최적화, 컴플라이언스, 확률해석, 상관거리