<학술논문> DOI https://doi.org/10.3795/KSME-A.2017.41.4.271 ISSN 1226-4873(Print)
2288-5226(Online)

부싱의 대변형거동과 크기를 고려한 등가 강성 해석§

이현성* · 승명균* · 김흥수**†
* 동국대학교 기계공학과, ** 동국대학교 기계로봇에너지공학과

Equivalent Stiffness Analysis of Rubber Bushing Considering Large Deformation and Size Effect

Hyun Seong Lee*, Myung Kyun Sung* and Heung Soo Kim**†
* Dept. of Mechanical Engineering, Dongguk Univ.,
** Dept. of Mechanical, Robotics and Energy Engineering, Dongguk Univ.

(Received July 20, 2016 ; Revised January 3, 2017 ; Accepted January 14, 2017)

Key Words: Rubber Bushing(고무 부싱), Viscoelastic(점탄성), Hysteresis(히스테리시스), Large Deformation (대변형), Size Effect(크기 효과), Equivalent Stiffness(등가 강성)

초록: 본 논문에서는 고무 부싱의 등가 강성이 가진 크기와 가진 주파수에 따라 달라지는 동특성에 대해 연구하였다. 새로운 모델은 고부 부싱의 대변형 거동과 크기 효과를 설명하기 위해 제안하였다. 제안된 제안된 모델은 탄성(Elastic) 요소, 점성(Viscous) 요소, 마찰(Friction) 요소로 이루어진 응력항과 등가변형률로 구성되어 있다. 제안된 모델은 실험 결과를 통해 검증하였다. 실험 검증을 통해 제안된 모델은 다양한 가진 크기와 가진 주파수에 따른 고무 부싱의 등가 강성을 정확히 예측함을 확인할 수 있다. 제안된 모델은 자동차 산업에서 고무 부싱의 동적 등가강성을 예측하는데 사용할 수 있을 것으로 예상한다.

Abstract: In this paper, the amplitude and frequency dependent dynamic characteristics of the equivalent stiffness of a rubber bushing are investigated. A new mathematical model is proposed to explain the large deformation and size effect of a rubber bushing. The proposed model consists of elastic, viscous, and frictional stress components and the equivalent strain. The proposed model is verified using experimental results. The comparison shows that the proposed model can accurately predict the equivalent stiffness values of a rubber bushing under various magnitudes and frequencies. The developed model could be used to predict the dynamic equivalent stiffness of a rubber bushing in automotive engineering.

- 기호설명 -

$\boldsymbol{\varepsilon}$: 등가변형률
σ_{total} : 합응력($\mathrm{N/m^2}$)
σ_e : 탄성 요소 응력($\mathrm{N/m^2}$)
$\sigma_{v1}, \sigma_{v2}, \sigma_{v3}$: 점탄성 요소 응력($\mathrm{N/m^2}$)
σ_f : 마찰 요소 응력($\mathrm{N/m^2}$)
k_t : 탄성 요소 강성($\mathrm{N/m}$)
d_t : 탄성 요소 비선형 가중치
β : 탄성 요소 비선형 상수($1/\mathrm{m}$)
k_1, k_2 : 점탄성 요소 스프링 계수($\mathrm{N/m^2}$)
c_1, c_2, c_v : 점탄성 요소 댐핑 계수($\mathrm{N/m^2}$)
c_3, c_4 : 마찰 요소 무차원 계수
c_5 : 마찰 요소 응력 계수($\mathrm{N/m^2}$)

§ 이 논문은 대한기계학회 CAE 및 응용역학부문 2016년도 춘계학술대회(2016.4.7.-9., 제주해비치호텔&리조트) 발표논문임.
† Corresponding Author, heungsoo@dgu.edu
© 2017 The Korean Society of Mechanical Engineers

1. 서 론

고무 부싱은 여러 산업분야에서 주로 부품간 연결 요소로 사용된다. 특히, 부싱에 사용되는 고무는 천연 고무에 탄소와 같은 충전재(filler)를 섞어 가황 공정(vulcanization)을 하여 생산되는데, 이 과정에서 이전의 천연고무보다 공학적으로 유용한 기계적 · 화학적 물성을 얻게 된다.

한편, 부싱이 포함된 모듈 단위의 유한 요소 해

석을 수행함에 있어 해석 결과가 실제 값과 잘 맞지 않는 경향을 보이는데, 이는 부싱의 등가 강성(Equivalent stiffness)을 선형 값으로 두어 해석 하기 때문이다. 실제로 부싱의 등가 강성 값은 하중 조건에 따라 거동이 달라지는 특성을 갖기 때문에 등가 강성을 선형 값으로 해석하면 하중 조건에 따른 부싱의 동 특성을 고려할 수 없게 되고, 해석의 정확성이 떨어지게 된다.

부싱의 등가 강성은 하중의 가진 크기가 증가할수록 감소하는 경향을 보인다. 이는 가황고무 내의 충전재가 내부 응력이 증가함에 따라 파괴되면서 나타나는 현상이다. 이러한 현상을 Payne effect[1]라고 한다. 또한 부싱의 등가 강성은 가진 주파수가 증가함에 따라 증가하는 경향을 보이는데, 초기에는 이를 스프링과 댐퍼의 조합으로 이루어진 1차원 Standard Linear Solid(SLS) 점탄성(Viscoelastic) 모델[2]로 표현하였으나, 가진 크기에 따른 등가 강성 변화를 고려하지 못했다. Berg[3]는 가진 크기 영향(Amplitude dependent)과 가진 주파수 영향(Rate dependent)을 모두 고려한 모델을 탄성(Elastic), 점탄성, 마찰(Friction) 요소로 이루어진 1차원 선형 모델로 표현하였고 실험을 통해 검증하였다. Sjöberg와 Kari[4]는 분수 도함수(Fractional derivatives)를 이용하여 Berg 모델의 점탄성(Viscoelastic) 요소를 2개의 모델 변수(Model parameters)로 표현하였고, Garcia[5,6]는 등가 변형률(Equivalent strain)과 Horton[7]이 제안한 강성 관계식을 통해 부싱의 크기 효과를 고려한 등가 강성 모델을 제안하였으며, 모델의 적합성을 실험을 통해 입증하였다. 또한 Kim[8]은 고무 부싱의 강성에 따른 대차 동특성 평가에 관한 연구를 진행하였고 실험으로 검증하였다.

한편, 반경 방향 하중 조건에서 가진 크기가 증가함에 따라 일정 구간 이후에서 히스테리시스 커브가 휘어지는 대변형거동이 나타나게 된다. 이 때, 등가 강성 값이 증가하는 현상이 나타나는데, 이러한 현상을 기존의 모델로는 표현할 수 없다. Dzierzek[9]은 이러한 대변형거동에서 히스테리시스 커브가 휘어지는 특성을 잘 표현하고 등가 강성이 증가하는 모델을 제안하였으며, 동하중 실험을 통해 그 타당성을 입증하였다. Zhang Lizun 등[10]도 대변형거동에 대한 등가 강성 연구하였고, 넓은 가진 크기와 주파수 범위에서 부싱의 등가 강성을 잘 표현하였다. 하지만 힘-변위 레벨에서의 모델링으로 부싱의 내경이나 외경, 길이 등 크기 효과를 고려할 수 없는 단점이 있다.

본 논문에서는 반경 방향 하중조건에서 나타나는 대변형거동에서의 등가 강성을 표현함과 동시에 부싱의 크기 효과를 고려한 모델을 제안하고자 한다. 또한 다양한 가진 크기 및 가진 주파수에 따른 실험결과와의 비교를 통해 모델을 검증하고자 한다.

2. 모델링

2.1 부싱 모델링

고무 부싱은 Fig. 1과 같이 탄성 요소, 점탄성 요소, 마찰 요소로 나누어 13개의 모델 변수로 모델링할 수 있다.

먼저, 응력-변형률 레벨에서의 모델링을 위해, Garcia가 제안한 반경 방향 하중 조건에서 경계조건을 만족하는 등가변형률을 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.[5]

$$\varepsilon(t) = x(t)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{[b^4-a^4]\ln\left(\frac{a}{b}\right)-[a^2-b^2]^2}} \tag{1}$$

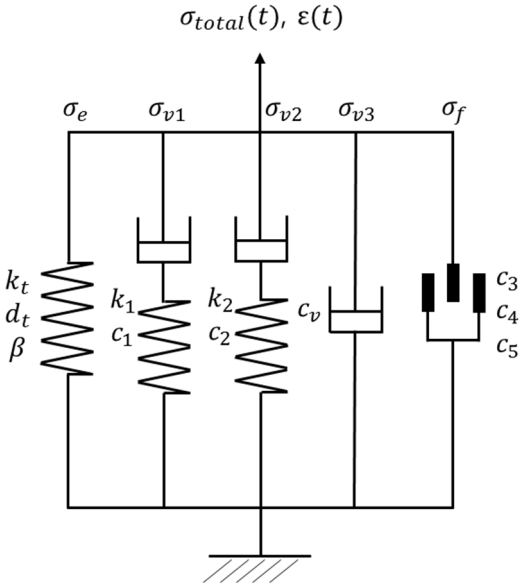


Fig. 1 Rubber bushing model

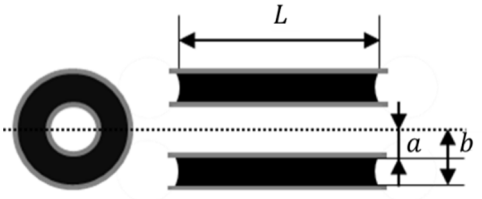


Fig. 2 Geometry of cylindrical rubber bushing

식 (1)에서 a와 b는 Fig. 2와 같이 a는 부싱의 안쪽 반지름을 b는 바깥쪽 반지름을 나타내고, L은 부싱의 길이를 나타낸다.

응력항의 모델링에 있어 스프링으로만 이루어진 탄성 요소는 히스테리시스 커브의 기울기를 나타내는데, 대변형 거동에서 히스테리시스 커브가 휘어지는 현상을 나타내기 위해 Dzierzek이 제안한 탄성 요소 관계식에 등가변형률항을 추가하여 탄성 요소 응력을 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_e(t) = k_t\beta\frac{2d_t}{\pi}tan\frac{\pi\varepsilon}{2d_t} \tag{2}$$

이 때, k_t는 부싱의 정하중 실험에서 가진 크기를 변화시킴에 따라 얻을 수 있는 탄성 요소 강성값이고, d_t와 β는 탄성 요소의 비선형을 나타내는 모델 변수이다. 실험으로부터 얻은 k_t의 초기값을 가진 크기 변화에 따른 관계식으로 나타내기 위해 식 (3)과 같이 k_t와 가진 크기의 관계를 이차 형식(Quadratic form)으로 나타낼 수 있다.

$$k_t = p_1x^2 + p_2x + p_3 \tag{3}$$

또한 식 (3)에서의 변수 p_1, p_2, p_3는 Fig. 3과 같이 준정적 실험을 통해 얻은 k_t와 가진 크기 별 관계를 비선형 커브 피팅을 통해 구할 수 있다.

히스테리시스 커브 끝부분의 두께와 날카로운 정도를 좀더 정확하게 나타내기 위해 Dzierzek이 제안한 3개의 마찰 요소에 등가변형률을 포함시킨 응력항은 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다. 이 때의 c_5는 정하중실험중에 최소 가진크기조건에서 히스테리시스 커브의 넓이에 의해 결정되고, c_3와 c_4는 최대 가진 크기조건에서 히스테리시스 커브와 최소자승법(Least square method)에 따른 상관관계에 따라 결정 된다.

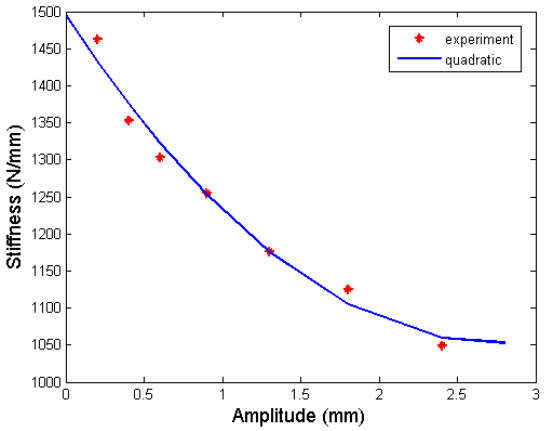


Fig. 3 Relationship between elastic stiffness k_t and excitation amplitude

$$\sigma_f(t) = \left[c_3\left(k_t\beta\frac{2d_t}{\pi}tan\frac{\pi\varepsilon}{2d_t} - k_t\beta\varepsilon\right)^{c_4} + c_5\right]\frac{\dot{\varepsilon}}{\sqrt{|\dot{\varepsilon}^2 - \varepsilon\ddot{\varepsilon}|}} \tag{4}$$

또한, 스프링과 댐퍼 혹은 댐퍼로만 이루어져 히스테리시스 커브의 넓이를 주로 나타내는 점탄성 요소 응력항은 식 (5)와 같이 나타낼 수 있고, 변수들은 가진 크기 영향을 제외시키기 위해 작은 가진 크기에서의 동하중실험에 의해 결정된다.

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{v1}(t) &= -\frac{k_1}{c_1}\sigma_{v1} + k_1\dot{\varepsilon}\\ \dot{\sigma}_{v2}(t) &= -\frac{k_2}{c_2}\sigma_{v2} + k_2\dot{\varepsilon}\\ \sigma_{v3}(t) &= c_v\dot{\varepsilon}\end{aligned} \tag{5}$$

최종적으로 고무 부싱의 거동은 이전에 구했던 응력항들의 합으로 식 (6)과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma_{total}(t) = \sigma_e + \sigma_{v1} + \sigma_{v2} + \sigma_{v3} + \sigma_f \tag{6}$$

2.2 동적 등가 강성

2.1에서 Garcia가 제안한 반경 방향 하중 조건에 따른 등가 변형률과 탄성, 점탄성, 마찰 요소에 의한 응력의 합은 식 (1), 식 (6)과 같이 시간영역으로 나타내었다. 등가변형률과 응력합 사이의 관계를 선형화(Linearization)하기 위해 시간 영역(Time-domain)을 주파수 영역(Frequency-domain)으로 변환시키는 푸리에 변환(Fourier transform)을 통한 전단 탄성률(Shear modulus) 관계식을 식 (7)과 같이 수식화 할 수 있다. 이 때, ω_0는 가진 주파수이고, $\hat{\sigma}_{total}$과 $\hat{\varepsilon}$은 기존의 시간 영역 항을 푸리에 변환을 통해 주파수 영역으로 변환시킨 것이다.

$$\hat{\mu}(\omega_0) = \frac{\hat{\sigma}_{total}(\omega_0)}{2\hat{\varepsilon}(\omega_0)} \tag{7}$$

식 (7)에서 구한 전단 탄성률에 Horton이 제안한 원통형 부싱의 크기 효과를 고려한 등가 강성 항을 곱하여 동적 등가 강성 관계식을 식 (8)과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{k}_{dyn}(\omega_0) = \frac{10\pi L}{\frac{7}{2}\ln\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{3}{2}\left[\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right] + D}\hat{\mu} \tag{8}$$

식 (8)에서의 a, b, L은 Fig. 2와 같이 부싱의 고무 부분 안쪽 반지름, 바깥쪽 반지름, 길이를 각각 나타낸다. 또한 D항은 부싱의 반경 방향 경계조건

을 만족 하는 Modified Bessel function의 조합으로 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$D = \frac{-\alpha a(3b^2+a^2)[I_1(\alpha a)K_0(\alpha b)+I_0(\alpha b)K_1(\alpha a)]}{\alpha^2 ba(b^2+a^2)[I_1(\alpha b)K_1(\alpha a)+I_1(\alpha a)K_1(\alpha b)]} + \frac{4(b^2+a^2)-\alpha b(b^2+3a^2)[I_1(\alpha b)K_0(\alpha a)+I_0(\alpha a)K_1(\alpha b)]}{\alpha^2 ba(b^2+a^2)[I_1(\alpha b)K_1(\alpha a)+I_1(\alpha a)K_1(\alpha b)]} \quad (9)$$

3. 실험 검증

3.1 동하중실험

부싱의 동적 거동 특성에 따른 모델 변수를 결정하기 위해 동하중 실험을 실시하였다. 실험에 사용된 부싱은 차량 서스펜션 시스템의 로우 컨트롤 암의 원통형 부싱을 사용하였고, 반경 방향 하중 조건을 인가하기 위한 실험 지그(Jig)를 Fig. 4와 같이 제작하였다. 또한 부싱의 안쪽 반지름이나 바깥쪽 반지름, 길이와 같이 제시된 모델이 부싱의 크기에 따른 등가 강성을 잘 표현하는지 확인하기 위해 Table 1과 같이 크기가 다른 두 개의 부싱을 사용하였고 ASTM D5992-96 규격에 따라 실험하였다.[11] 실험 장치는 Instron 8801 servo-hydraulic tester를 이용하여 입력 값을 사인 함수 변위로 주었다. 이 때 가진 크기는 대변형거동을 파악하기 위해 0.2mm에서 2.4mm 범위로 입력 값을 주었고, 가진 주파수는 0.1Hz에서 15Hz의 범위로 주어 그에 따른 반력을 출력 값으로 PC를 통해 기록하였다. 또한 고무 재료의 뮬린 효과(Mullin's effect)[12]를 제거하기 위해 초기 20사이클 만큼 가진을 하여 시편의 안정화를 하였고, 온도에 따른 연화(Softening)를 방지하기 위해 실험 사이클 수를 제한하여 온도를 일정하게 유지하였다.

Table 1 Size specifications of two bushings

Type	a (mm)	b (mm)	L (mm)
Bushing 1	9.5	18	23
Bushing 2	9.5	15	25

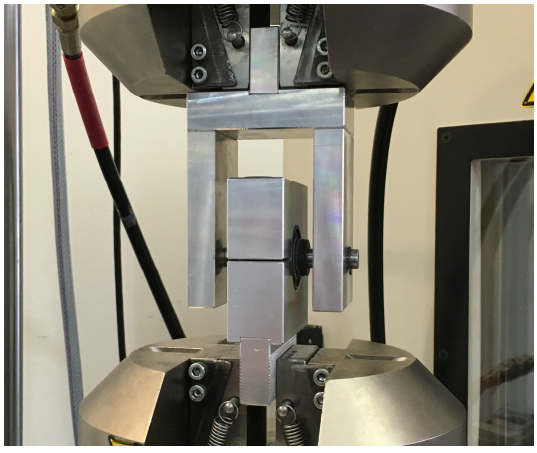
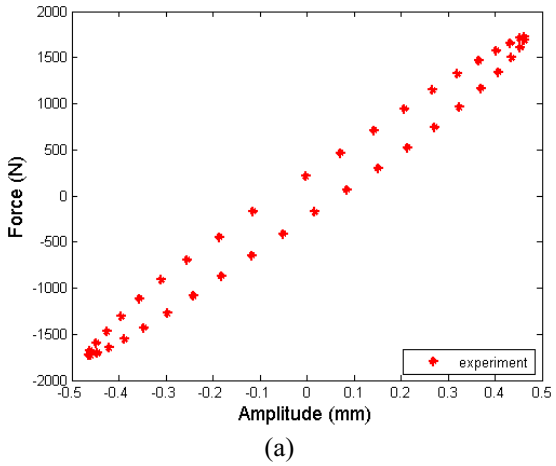


Fig. 4 Experimental jig for rubber bushing under radial loading condition

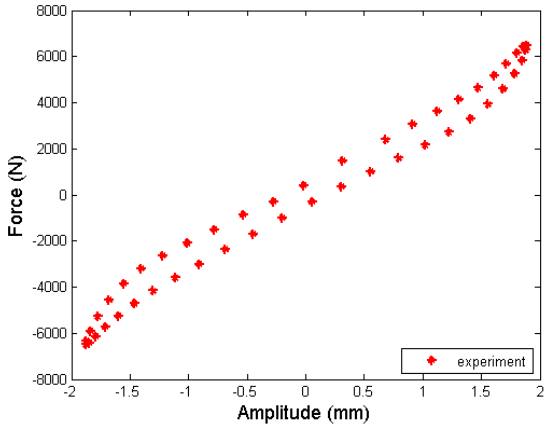
3.2 히스테리시스 커브

주어진 실험조건에서 반경 방향 하중을 가할 때, Fig. 5와 같이 히스테리시스 커브를 얻을 수 있다. 가진 크기가 작은 영역에서는 Fig. 5(a)와 같이 일반적인 형태의 히스테리시스 커브를 나타나지만, 가진 크기가 큰 영역에서는 Fig. 5(b)와 같이 히스테리시스 커브가 휘어지는 대변형거동이 나타난다.

이러한 대변형거동에서 하중 조건의 가진 크기가 증가함에 따라 강성이 증가하는 현상이 나타나는데, 이는 반경 방향 하중 조건에서 부싱의 고무



(a)



(b)

Fig. 5 Hysteresis curve: (a) Under small deformation (0.45mm/10Hz) and (b) Under large deformation (1.85mm/10Hz)

내부에 전단응력, 압축 응력, 인장 응력이 복합적으로 발생하기 때문이다. 반면에 축 방향 하중 조건에서는 전단 응력만이 주로 가해지기 때문에 이러한 현상이 나타나지 않는다.

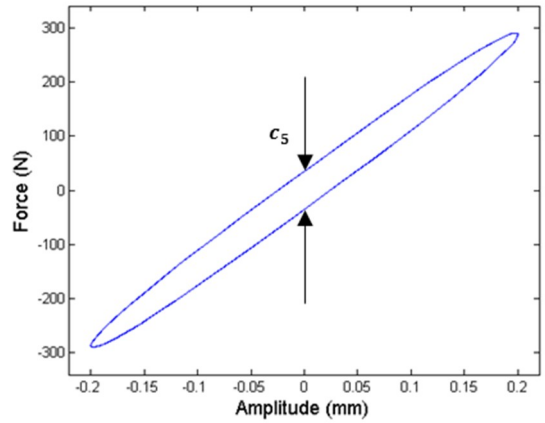
3.3 모델 변수 결정

모델 정립을 위한 모델 요소 중 가진 크기 영향을 나타내는 탄성 요소와 마찰 요소 변수는 가진 주파수 영향을 제외한 준정적 실험을 통해 결정할 수 있다. 수치모델의 탄성요소 변수인 k_t는 하위 변수인 p_1, p_2, p_3를 통해 결정되는데, 이는 0.1Hz의 주파수에서 부싱 1의 경우 가진 크기를 0.2mm에서 2.4mm까지 변화시킴에 따라 얻은 초기 강성 값을, 부싱 2의 경우 가진 크기를 0.2mm에서 2mm까지 변화시켜가며 얻은 초기 강성 값을 Fig. 3과 같은 과정을 통해 결정하였다. 마찰요소 변수인 c_5는 0.1Hz의 주파수 및 0.2mm의 최소 가진 크기에서 Fig. 6(a)와 같이 변위가 0인 지점의 값을 통해 구하였다. c_3, c_4는 0.1Hz의 주파수 및 최대 가진 크기에서 Fig. 6(b)와 같이 히스테리시스 커브의 양 끝단의 날카로운 정도에 따라 결정하였다.

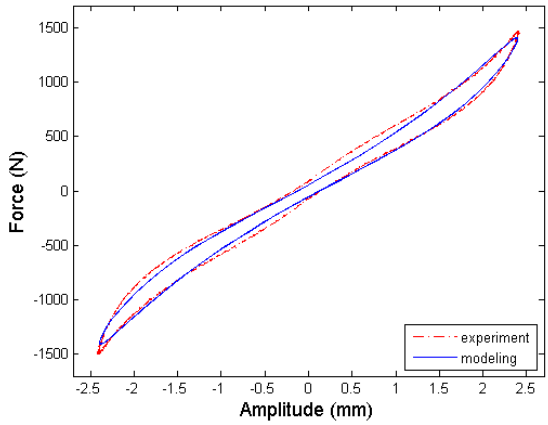
한편, 모델의 가진 주파수 영향을 나타내는 점탄성 요소 변수인 k_1, k_2, c_1, c_2, c_v는 가진 크기 영향을 제외하기 위해 최소 가진 크기에서 Fig. 7과 같이 가진 주파수에 따른 강성 값과 모델과의 상관관계를 통해 구하였다. 이에 따라 부싱의 가진 크기 및 가진 주파수의 영향을 각각 독립적으로 고려한 실험으로부터 얻은 각각의 모델 변수를 통해 모델을 정립하였고, Table 2와 같이 부싱 1과 부싱 2로 나누어 나타냈다.

3.4 동적 등가 강성 실험 검증

부싱의 등가 강성은 가진 크기가 증가함에 따라



(a)



(b)

Fig. 6 Frictional element model parameters determination: (a) determination method of c_5 and (b) determination method of c_3 and c_4

Table 2 Model parameters of two bushings

	Bushing 1	Bushing 2
p_1 (N/m^3)	59.087	278.83
p_2 (N/m^2)	-323.65	-1503.4
p_3 (N/m)	1495.8	3888
β (1/m)	0.00165	0.00061
d_t	1.35	1.51
k_1 (N/m^2)	0.109	0.0774
k_2 (N/m^2)	0.112	0.0792
c_1 (N/m^2)	0.0753	0.0480
c_2 (N/m^2)	0.0210	0.0510
c_v (N/m^2)	0.0015	0.0015
c_3	0.082	0.413
c_4	0.48	0.61
c_5 (N/m^2)	0.00267	0.0338

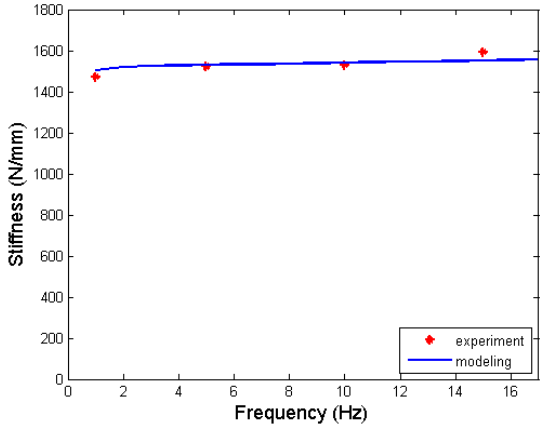
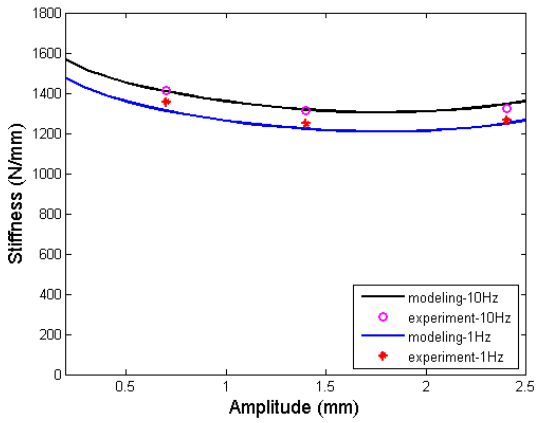
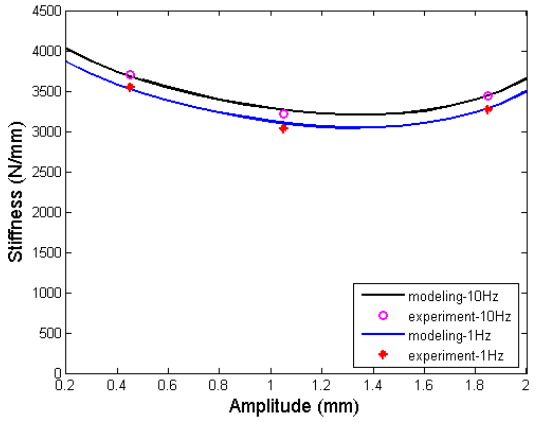


Fig. 7 Viscoelastic element model parameters determination

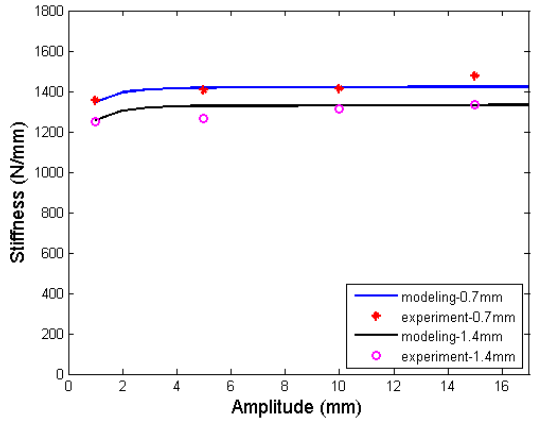


(a)

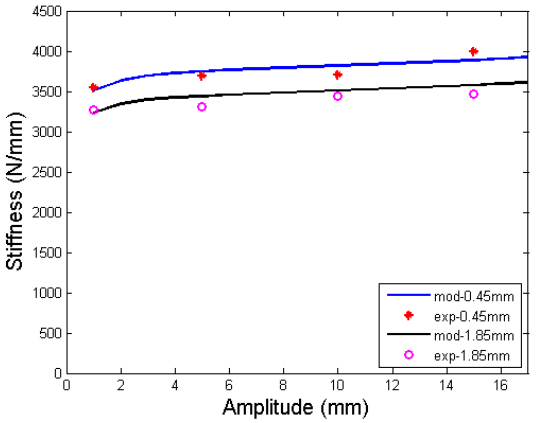


(b)

Fig. 8 Dynamic equivalent stiffness with changing amplitude: (a) Bushing 1 case, (b) Bushing 2 case



(a)



(b)

Fig. 9 Dynamic equivalent stiffness with changing frequency: (a) Bushing 1 case, (b) Bushing 2 case

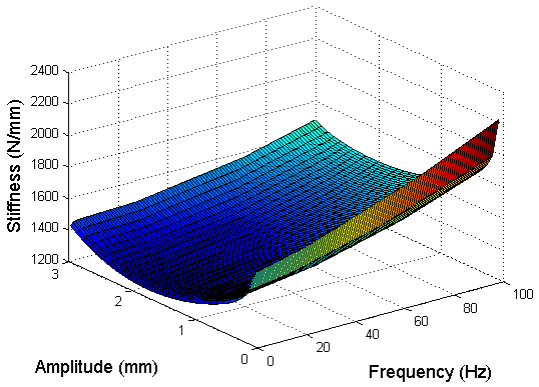
감소하다가 대변형 구간에서 고무 내부의 복합적인 응력에 의해 강성이 증가하는 현상을 보인다. Fig. 8을 통해 이러한 현상이 실험결과에서 나타나는 것을 확인할 수 있었고, 제시된 모델이 실험결과의 경향을 잘 따라가는 것을 파악할 수 있었다. 부싱 1은 동일 주파수에서 가진 크기가 증가할수록 강성이 감소하다가 1.9mm 이후 구간부터 대변형거동이 나타나고 강성이 소폭 증가하였다. 부싱 2도 부싱 1과 마찬가지로 가진 크기 증가에 따라 강성이 감소하다가 1.4mm 이후 대변형거동이 나타나고 강성이 소폭 증가하였다.

또한 부싱 2의 경우 부싱 1에 비해 고무 부분의 바깥쪽 반지름과 안쪽 반지름의 차이가 작기 때문에 동일 변위 입력에서 반력이 더 크게 나타나고, 이에 따라 등가 강성 값이 더 큰 것을 확인할 수 있었다.

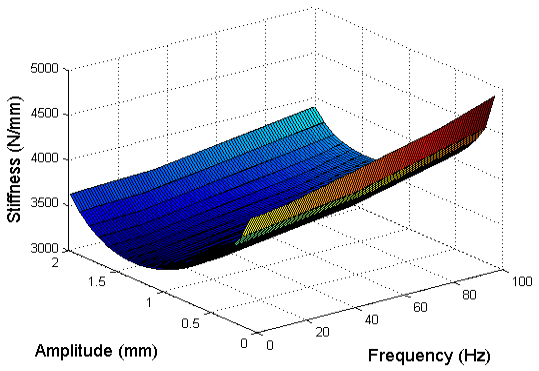
한편, 가진 크기 영향과 마찬가지로 가진 주파수가 증가할수록 등가 강성이 증가하는 경향이 나타나는데, 이는 하중 조건에 의해 변형된 고무의 긴 고분자 사슬(Polymer chain)이 원상태로 돌아가기 위한 즉각적인 재배열(Reorganization)이 일어나지 못해서 생기는 현상이다. 가진 주파수 변화에 따른 동하중실험에서도 이와 마찬가지로 주파수가 증가함에 따라 등가 강성이 증가하는 현상이 나타났고, 실험결과와 모델을 Fig. 9와 같이 비교 검증하였다.

이 때, 두 가지 부싱 모두 동일 가진 크기에서 주파수가 증가할수록 강성이 증가하는 현상을 보였는데, 초기에는 강성 값이 급격히 증가하다가 4Hz 이후 구간부터는 비교적 선형으로 증가하는 것을 확인할 수 있었다. 또한 가진 크기 변화에 따른 등가 강성과 마찬가지로 부싱 2의 등가 강성이 부싱 1보다 크게 나타나는 것을 파악할 수 있었다.

실험과의 비교 검증을 통해 부싱 모델의 등가 강성을 Fig. 10과 같이 가진 크기 및 가진 주파수에 따른 등가 강성 그래프를 부싱 1과 부싱 2에 대해 각각 나타낼 수 있다.



(a)



(b)

Fig. 10 Dynamic equivalent stiffness with changing amplitude and frequency: (a) Bushing 1 case, (b) Bushing 2 case

4. 결 론

본 연구에서는 부싱의 대변형거동과 크기 효과를 고려한 모델링을 위해 비선형 탄성 요소와 등가 변형률을 결합된 새로운 부싱 등가 강성 모델을 제안하였다. 모델의 정립을 위해 하중조건의 가진 크기에 따른 실험 및 가진 주파수에 따른 실험을 각각 독립적으로 하여 얻은 결과로 모델 변수를 결정하였다. 모델과의 비교를 위해 다양한 가진 크기 및 가진 주파수에 따른 동하중실험을 진행하였고, 제시된 모델이 부싱의 크기 효과를 고려하는지 확인하기 위해 크기가 다른 두 가지 부싱을 사용하여 실험을 하였다. 모델로부터 얻은 등가 강성과 실험을 통해 얻은 등가 강성을 비교한 결과 모델의 적합성 및 정확성을 검증할 수 있었다. 제안된 모델은 정립을 위한 몇가지 실험만으로 부싱의 거동을 예측할 수 있었다. 한편, 더 넓은 가진 크기 및 주파수에 따른 부싱의 거동을 더욱 정확하게 나타내는 모델을 정립하기 위해서는 더 넓은 범위의 실험결과를 필요로 하는 한계점이 있다.

후 기

본 논문은 산업통산자원부의 2014년도 산업원천기술개발사업 중 지식서비스 분야의 지원을 받아 수행된 연구이며(10048305), 이에 감사드립니다.

참고문헌
(References)

(1) Payne, A.R. and Whittaker, R.E., 1971, “Low Strain Dynamic Properties of Filled Rubbers,” *Rubber Chemistry and Technology,* Vol. 44, pp. 440~478.

(2) Olsson, A.K., 2007, “Finite Element Procedures in Modeling the Dynamic Properties of Rubber,” *Ph.D Dissertation of Lund University*.

(3) Berg, M., 1998, “A Non-linear Rubber Spring Model for Rail Vehicle Dynamics Analysis,” *Vehicle System Dynamics*, Vol. 30, pp.197~212.

(4) Sjöberg, M. and Kari, L., 2002, “Nonlinear Behavior of a Rubber Isolator System using Fractional Derivatives,” *Vehicle System Dynamics*, Vol. 37, pp. 217~236.

(5) García-Tárrago, M. J., Kari, L., Vinolas, J. and Gil-Negrete N., 2007, “Frequency and Amplitude Dependence of the Axial and Radial Stiffness of Carbon-black Filled Rubber Bushings,” *Polymer Testing*, Vol. 26, pp. 629~638.

(6) García-Tárrago, M. J., Kari, L. Vinolas, J. and Gil-Negrete, N., 2007, “Torsion Stiffness of a Rubber Bushing: a Simple Engineering Design Formula Including the Amplitude Dependence,” *Journal of Strain Analysis,* Vol. 42, pp. 13~21.

(7) Horton, J. M., 2000, “Stiffness of Rubber Bush Mountings Subjected to Radial Loading,” *Rubber Chemistry and Technology,* Vol. 73, pp. 253~264.

(8) Kim, I. K., Kim, J. S. and Lee, W. G., 2015, “Investigation of Vehicle Dynamic Behavior of Composite Bogie Under Different Rubber Bushing Stiffness Values,” Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A, Vol. 39, No. 3, pp. 303~309.

(9) Dzierzek, S., 2000, “Experiment-based Modeling of Cylindrical Rubber Bushings for the Simulation of Wheel Suspension Dynamic Behavior,” *SAE*, No. 2000-01-0095.

(10) Zhang, L., Yu, Z. and Yu, Z., 2010, “Novel Empirical Model of Rubber Bushing in Automotive Suspension System,” *Proc. of ISMA2010 Including USD2010,* pp. 4259~4274.

(11) A. D5992-96, 2011, "Standard Guide for Dynamic Testing of Vulcanized Rubber and Rubber-Like Materials Using Vibratory Methods," *ASTM International*.

(12) Mullins, L., 1969, “Softening of Rubber by Deformation,” *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 42, pp. 339~362.