대한수학교육학회지 <학교수학> 제 19 권 제 1 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 19, No. 1, 171 ~ 187. Mar 2017

공대생의 역도함수 그래프 추측

김 수 민* · 김 선 희**

공대생들에게 미적분은 산업현장에서 발생하는 현상에 대한 수학적 안목을 형성해 주는 수학적 모델이자 지식이며 기능이다. 하지만 공대생들의 미적분학 학습은 기계적인 계산과 수학적 결과만을 적용시켜 문제를 해결하려는 경향을 보인다. 이에 본 연구는 실제적인 상황에서 수학적 개념과 원리를 적용하여 문제를 해결할 수 있는 문제를 제시하고 공대생들에게 이 문제를 풀게 하였다. 산의 경사도 그래프로부터 원래 산의 모양을 알아내는 문제에서 학생들은 주어진 그래프를 도함수의 그래프로 인식하고 역도함수의 그래프를 추측하였다. 그래프 해석에서 오류를 보이기도 하였는데 이는 미적분의 내용을 이해하지 못해서라기보다는 문제를 제대로 파악하지 않고 해결하려는 학습 방식에 기인한 것이었다. 경사도 문제 해결을 통해 공대생들은 수학이 자신이 공부하는 전공의 기초이자 실세계에 활용 가능한 유용성을 갖고 있으며 사고력을 향상시켜준다고 하는 인식의 변화를 경험하였다.

I. 서 론

공과대학에 재학 중인 학생들 모두는 대학 1학년에서 미적분학을 필수적으로 배운다. 미적분학은 공과대학 어느 분야에서나 필수적으로 활용되는데, 공학 분야의 지식을 이해하기 위해 미적분학 지식이 필요하기도 하고 산업 현장에서 관찰되는 현상을 수학적 모델로 변환하여 문제를 해결할 때 사용되기 때문이다. 따라서 공대생들에게 기본적인 지식이자 소양이다. 하지만 공대생들의 학습 방법을 살펴보면 개념에 대한 이해보다는 기계적인 계산, 결과만 적용시켜 해결하려는 경향이 있다. 어떤 원리에 의해 공식이 유도되었는지에 대한 관심이 적고 그것은 수학 전공자의 몫이라 생각하는 것이다. 하지만 이들에게 필요한 미적분학이 산업 현장에 필요한 지식과 적용에 있다면, 가시적으로 미적분학 문제로 보이지 않는 것을 보고도 미적분이라는 수학적 모델을 생각해내고 수학적 개념과 원리를 적용하여 해결해내는 것이 더 중요하다. 이에 본 연구는 산의 경사도를 나타낸 그래프를 통해 원래 산의 모습을 추측하게 하여, 도함수와 그 역도함수의 관계를 알아내고 미적분학의 학습 이유를 공대생들에게 알게 한 사례 연구를 보고하고자 한다.

대학 교재에서 미분과 적분은 미적분학의 기본정리로 제시되고, 함수식이 주어졌을 때 함수 유형별로 미분과 적분한 함수식이 무엇인지 학습하는 데 초점이 맞추어져 있다. 문제 유형 또한 '미분하여라, 적분하여라, ~를 구하여라'는 전형적인 것에 제한되어 산업 현장이나 실세계와 연계된 수학 개념을 어떻게 이해하고 활용해야 하는지에 대해서 알기 어렵게 한다. 또한 열전도율, 전류량, 개체수 성장률 등과 같은 너무 전문적인 예제들은 오히려 수학과 동떨어진 영역이

* 강원대학교 대학원, tnt3030@hanmail.net (제1 저자)
** 강원대학교, mathsun@kangwon.ac.kr (교신저자)

라고 생각하게 하여 연계 학습에 방해가 되기도 한다. 이런 이유로 공대생들의 수학 학습이 기계적인 계산, 공식 적용에 집중되는 경향이 만들어질 수도 있다.

이에 본 연구는 산의 경사도 그래프를 도함수의 그래프로 보고 그 역도함수의 그래프인 원래 산의 모양을 추측하도록 하는 과제를 제시하여 함수식 대신 그래프적 접근으로 미적분학에 대한 학습을 유도하였다. 그래프를 읽고 해석하는 능력은 전문가뿐만 아니라 일반인들이 살아가는 데 있어서 꼭 갖추어야할 능력이며(송정화·이종희, 2007), 그래프가 어떤 내용을 품고 있는지 그 의미를 이해하고 스스로 해석해 나가는 능력은 사회 현상을 이해하는 데 많은 도움이 된다. 2015 개정 수학과 교육과정에서도 중학교 함수를 지도하기 전 그래프에 대한 해석을 다루는 것을 강조하고 있는 바, 시간에 따른 욕조 안의 물 높이, 시간과 거리 그래프로부터 속력을 추측하는 과제 등은 그래프 표현과 실생활을 연결시키도록 하는 데 도움이 될 수 있다.

한편 Selden, Selden, & Mason(1994)은 일부 대학생들이 비일상적 미적분 문제를 풀 수 없다고 하면서 전형적인 문제들을 해결하는 계산에 초점을 맞추었던 기존의 미적분학 교수·학습의 문제점을 지적하였다. 학생들은 함수의 그래프가 주어져 있을 때, 그 함수의 도함수, 이계도함수, 역도함수의 그래프를 그릴 수 있어야 한다(Zimmermann, 1991, p.133). 본 연구에서 제시한 경사도 문제는 주어진 그래프를 시각적인 차원에서 보는 것에서 끝나지 않고 이를 해석하여 실세계에서의 의미를 찾고 수학적 원리를 이해하는 것까지 포함하여 공대생들이 필요한 수학적 경험을 도모하였다.

공대생 2명을 대상으로 한 본 사례 연구는 학생들이 도함수의 그래프를 해석하여 역도함수의 그래프를 추측하면서, 과제에서 의도한 내용을 학생들이 알게 되는지, 그래프 해석에서 어떤 오류가 나타나는지, 이러한 과제 학습이 공대생들의 학습에 어떤 도움이 되는지에 대한 분석도 함께 진행할 것이다. 이에 따라 본 연구의 연구 문제는 다음과 같다.

첫째, 공대생들은 도함수의 그래프를 해석하여 역도함수 그래프를 어떻게 추측해 내는가?

둘째, 공대생들은 역도함수의 그래프 추측에서 어떤 오류를 보이는가?

셋째, 역도함수 그래프 추측 과제를 통해 공대생들은 수학과 수학 학습에 대해 어떤 인식 변화를 하게 되는가?

II. 역도함수

미적분학은 인간 지성의 가장 위대한 업적 중 하나이다(Hughes-Hallett et al., 2002). Newton과 Leibniz에 의해 개발된 미적분학은 대학 수학의 기초가 되며 물리, 공학, 사회, 생물, 경제학 등 미치지 않은 분야가 없다(Haciomeroglu, 2007, p.1). Klein은 미적분이 수학적 사고의 심장이요 혼이며 함수적 사고의 개발을 위해 수학교육의 본질적인 부분이 되어야 한다고 주장하기도 하였다(우정호, 1998, p.379).

Kenelly(1986)는 미적분이 과학기술 연구를 위한 계산 도구로 간주되어 도구를 사용하는 기능의 훈련이 중시되고 있고 교육적인 역할이 간과되고 있다고 말하며, 고등교육을 받는 지식인을 위한 교양교육의 마지막 과정에 포함된 만큼 폭넓은 지적 능력을 개발하는 수학교육의 과정으로서 명예로운 역할이 확립되어야 한다며 미적분 학습에 의미를 두었다.

우리가 다루는 수학 연산들은 대부분 그 역이 존재하는데, 예를 들면 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈, 거듭제곱과 제곱근을 위하는 일들은 서로

역의 관계이다. 미분과 적분 또한 역의 관계를 가지며, 역도함수[1]는 다음과 같이 정의된다.

> 구간 I에서 $D_xF(x)=f(x)$가 성립하면, 즉, I의 모든 x에 대해서 $F'(x)=f(x)$이면, 구간 I에서 F를 f의 역도함수(antiderivative)라고 한다.
>
> (Varberg, Purcell & Rigdon, 2010, p.242)

함수 $F(x)=x^4+6$의 도함수는 $F'(x)=4x^3$이고, 역으로 $f(x)=4x^3$의 역도함수는 임의의 상수 C에 대해서 함수 $F(x)=x^4+C$이다. 상수 C에 의해, 어떤 함수 f가 역도함수를 가지면 f는 무수히 많은 역도함수의 집합을 가진다. 이러한 함수들의 집합을 f의 '일반적인 역도함수(general antiderivative)'라고 부른다. 역도함수의 정의에 따르면 미분과 적분이 역 관계를 가지며, 미분이 된 도함수로부터 적분해야 하는 역도함수를 찾을 수 있다.

미적분학의 기본정리는 미분과 적분의 연관성에서 탄생한다. 미분학은 접선문제로부터 탄생하였고, 적분학은 겉으로는 관련이 없는 문제인 것처럼 보이는 넓이 문제로부터 탄생하였다. Newton과 Leibniz는 미분과 적분의 관계를 발견하고 그것을 이용하여 미적분학을 체계적인 수학적 방법으로 발전시켰다. 특히 미적분학의 기본정리를 이용하여 합의 극한으로써 계산하지 않고 쉽게 넓이와 적분을 계산할 수 있음을 알아내었다. 미적분학의 기본정리는 다음과 같다.

> <미적분학의 기본정리 1>
> 함수 f가 구간 $[a,b]$에서 연속이면, $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\ a\le x\le b$에 의하여 정의된 함수 g는 구간 $[a,b]$위에서 연속이고 구간 (a,b)위에서 미분가능하며, $g'(x)=f(x)$이다.
>
> <미적분학의 기본정리 2>
> 함수 f가 구간 $[a,b]$에서 연속함수이면, $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$이다. 여기에서 F는 임의의 f의 역도함수, 즉 $F'=f$를 만족하는 함수이다.
>
> (Stewart, 2004, p.242, 244, 247)

학교수학에서 미분의 역으로 부정적분을 도입하고 구분구적법에 대한 학습을 바탕으로 정적분의 정의를 도입하고 미분과 적분의 관계를 파악하는 것은 미적분의 핵심적인 과제이지만, 매우 어려운 내용이므로 그 의미와 구조를 파악하는 기회를 제공하는 것이 필요하다(정연준・이경화, 2009). 정형화된 계산이나 활용 문제는 미분과 적분의 관계를 파악하기보다는 그 결과에 집중하게 하는 학습을 하게 된다. 이런 학습이 미적분의 내용을 더 어렵게 학생들을 이끌 수 있으므로, 실생활에 적용할 수 있는 비정형화된 문제를 다양하게 제공하는 것이 풍부한 사고를 이끌어내며 일상 속에서 미분과 적분의 관계를 친근하고 자연스럽게 받아들여 원리 이해에 쉽게 접근할 수 있는 학습을 제공할 수 있다. 황혜정・김미향(2016)은 미분에 관한 주요 문제점은 미분 개념을 공식처럼 다루기 때문에 정형화된 문제를 해결하는 데 익숙하지만 새로운 형태의 문제를 해결하는 데는 그렇지 못하다는 것임을 지적하였다. 대부분의 학생들은 대수식으로 주어진 문제의 도함수를 구하거나 적분을 하는 기계적인 계산은 잘 해결하지만 맥락의 의미가 들어가는 실생활 문제는 그 의미를 잘 파악하지 못하여 해결에 어려움을 겪는 경우가 많다. 따라서

1) 부정적분과 역도함수는 같은 것인데, 라이프니츠를 추종하여 역도함수 대신 부정적분(indefinite integral)이라는 용어를 사용하는 것이 일반적이다(Varberg, Purcell & Rigdon, 2010, p.244). 본 논문에서는 적분상수를 포함한 부정적분의 식을 찾지 않고 도함수의 그래프로부터 그 부정적분 함수의 그래프를 찾는 데 목적이 있으므로, 일반적인 용어인 부정적분 대신 역도함수라는 표현을 사용하였다.

본 연구는 미분과 적분의 관계적 의미를 파악할 수 있도록 그래프 해석을 통한 역도함수 과제를 구상하였다.

III. 연구 방법

본 연구는 연구자가 속한 대학교의 에너지화학공학과 1학년 학생 2명을 대상으로, Yoon (2016)에 제시된 도함수 그래프와 연구자가 개발한 그래프를 2개의 과제로 활용하였다. 실험은 약 20분씩 두 차례 진행되었으며, 학생들의 동의하에 전체적인 활동과 학생의 활동지 각각을 비디오로 촬영하였다.

본 연구는 사례 연구로, 학생들이 수학 문제를 해결하면서 구체적으로 어떤 과정을 거치고 무엇을 알아내는지 알아보았다. 연구대상이 대한민국의 공대생들을 대표하는 것은 아니지만, 본 연구가 이 학생들이 어떠한 사고를 하며 수학적인 분석을 어떻게 해 나가는지에 대한 상징성을 갖는 연구라고 볼 수 있다.

연구 과정은 세 단계로 구성되는데, 첫 번째는 현장으로 들어가기이다. 첫 단계에서는 연구 동기, 연구 목적에 적합한 장소 물색, 연구 참여자를 선정하였다. 본 연구자는 연구를 위한 목적과, 연구동기, 참여자 선정, 그리고 적합한 강의실을 미리 선정하여 연구에 적합한 환경을 미리 갖추어 실험에 들어갔다. 두 번째 단계는 현장 텍스트 짜기이다. 현장에서 텍스트 짜기는 연구에서 이루어지는 다양한 자료와 자료 수집 등의 구성으로 연구자는 비디오 촬영과 학생들의 활동지, 실험 도중에 이루어지는 모든 자료를 수집하였으며, 학생들에게 사후 인터뷰를 위한 설문도 활용하였다. 1차 과제 수행 후 연구자는 2차 과제의 필요성을 느끼고 과제를 개발하였다. 세 번째 단계는 연구 텍스트 짜기이다. 연구자는 비디오 촬영을 반복해서 여러 번 보고 전사를 위해 여러 번 반복해서 듣기를 하여 전사 파일을 완성하고 연구 결과로 제시할 내용을 구성하였다.

1. 연구 대상

연구 대상으로 선정된 학생 P와 J는 대학 1학년생으로 연구자 중 한 명이 강의를 담당한 미분적분학 과목의 수강자이다. 학생 P는 고등학교 자연계열 출신으로 과학중점과정을 이수하였고, 생각을 통해 답을 유추해 내는 과정을 통해 어렵게 답을 얻는 그 과정과 결과에 대한 성취감이 좋았기 때문에 초등학교 시절부터 수학을 좋아하였다고 한다. 수학에 대한 자신감이 높아 수업 사이의 쉬는 시간에도 같은 과 학생들에게 문제를 알려주는 모습을 관찰할 수 있었고, 본인이 생각하는 바를 적극적으로 표현하는 학생이다. 학생 P는 수학을 공부할 때 문제가 풀리지 않으면 풀릴 때까지 생각을 하여 해결하고 그 문제에 대해 확실히 이해를 할 때까지 놓치지 않는 끈기도 가지고 있다. 학생 P가 공대에 진학하게 된 이유는 고등학교 시절 흥미와 적성이 수학, 과학 분야였다는 점, 취업이 쉽다는 점 때문이었다. 수학은 본인의 전공에 기본이 되므로, 수학이 완성되어야 전공을 잘 이수할 수 있다고 생각하고 있다.

학생 J는 과학중점학교인 고등학교의 자연계열 출신으로, 수학보다는 과학에 대한 관심과 흥미도가 높고 그 중에서 화학에 큰 관심을 가지고 있다. 미분적분학 수업에 집중도가 높고, 이해가 잘 되지 않은 부분에 대해서 적극적인 질문으로 문제를 해결하려는 의지가 높다. 수학의 개념이나 기초가 잘 생각나지 않은 부분은 고등학교 과정의 해당분야를 스스로 찾아서 공부를 하고 평소 수업 쉬는 시간에 친구들의 질문에

친절하게 설명하는 모습을 보였고, 잘 이해하고 있지 못한 부분이 있다면 솔직히 시인하고 친구와 함께 해결해 보려는 의지가 강했다. 공대에서 수학이 기본이므로 수학에 대한 깊은 이해가 필요하다고 생각하고, 특히 화학에서 반응속도를 다룰 때 적분에 대한 이해가 필요하다며 수학의 실용성을 인식하고 있었다.

두 학생은 미분적분학 중간고사 상위 10%이내에 속했고, 학교 수업 외에 학과 학생들과 자발적으로 스터디 그룹을 만들어 그 그룹 내에서 리더의 역할을 하는 학생들이었다. 평소 친분이 있어 실험에서 의사교환을 활발히 하였다.

2. 실험 절차

미분적분학 수업에서 미분을 학습한 이후 부정적분을 학습하고 있는 시기에 실험이 이루어졌다. 1차 과제의 실험이 있은 뒤 1주일 후 예고 없이 2차 과제의 실험이 실행되었다. 실험 전에 두 학생들에게 이 실험은 논문의 목적으로만 사용되며 어떤 이익이나 학점에 불리하거나 유리한 점이 없다는 점을 알려주었고 IRB의 승인을 받은 개인정보활용동의서에 서명하게 하였다. 연구자는 촬영의 목적과 어떠한 방법으로 분석할 것인지에 대한 간단한 설명을 해주었고, 과제를 해결하는 동안 머릿속으로만 생각하지 말고 생각하는 모든 것을 말로 할 것을 요구하였다.

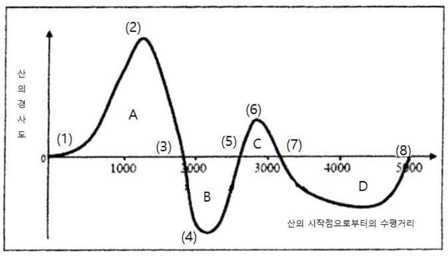
수업을 담당한 연구자가 실험에 참여 관찰을 하였고, 모두 어색함 없이 편안한 환경에서 실험에 참여하였다. 두 학생의 대화를 통한 문제 해결 위주로 실험이 진행되었으나, 학생들이 잘못된 결론을 이끌어내는 경우나 학생들이 내린 결론에 대한 이유를 묻는 연구자의 발문이 실험 중간에 이루어지기도 하였다.

3. 역도함수 과제

역도함수 과제는 2가지로 주어졌는데, 1차 과제는 Yoon(2016)의 연구에 사용된 그래프를 그대로 활용했고, 2차 과제는 1차 과제를 변형하여 제시하였다. 속도-거리 문제가 역도함수에서 많이 활용되지만, 경사도 문제는 학생들에게 전형적이지 않은 낯선 문제였다. 대수식이 주어지지 않았으므로 학생들은 수식을 이용한 기계적인 계산보다는 그래프 해석을 통한 사고를 해야 한다.

1차 과제는 Yoon(2016)에 제시된 뉴질랜드 트램핑 트랙에서 실제로 측정된 경사도 그래프를 각색하였다. 문제의 오류가 없는지 수학과 박사과정 2명에게 문제 검토를 의뢰하여, 문제를 해결하기에 적합함을 확인 받고 실험이 진행되었다. 1차 과제는 [그림 III-1]과 같다.

※ 다음은 구봉산 등산로의 경사도를 나타내는 그래프이다.



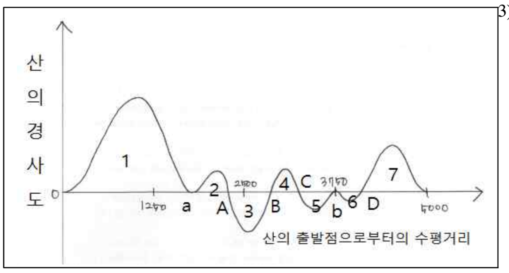
2)

1) 구봉산의 최댓점(정상)과 최솟점(가장 깊은 계곡)을 찾으시오.
2) 구봉산의 최댓점(정상)과 최솟점(가장 깊은 계곡)을 찾았다면, 다른 산의 경사도 그래프에서도 최댓점(정상)과 최솟점(가장 깊은 계곡)을 찾을 수 있도록 그 결과를 일반화 하시오.
3) 1)번과 2)번의 활동을 정리하여 다른 등산객들도 이 경사도 그래프를 보고 이 산의 최댓점(정상)과 최솟점(가장 깊은 계곡)을 찾을 수 있게 안내하는 설명서를 작성하여 보도록 하시오.

[그림 III-1] 1차 과제

경사도 그래프의 가로축은 산의 수평거리이다. 그래프에 따르면 사람이 오른쪽으로 산을 오르고 있다고 할 수 있다. 그래프의 세로축은 산의 각 지점에서의 경사도이다. 즉, 산의 모양을 함수의 그래프라고 생각했을 때, 내가 서 있는 한 점에서의 접선의 기울기가 이 경사도 그래프의 함숫값이다. 문제 1)은 도함수 그래프를 해석하여 역도함수의 그래프를 추측할 수 있는지 알아보기 위한 것이고, 2)와 3)은 실세계에서 도함수의 그래프를 활용할 때 1)의 결과를 일반화하여 다른 사람이 이해할 수 있도록 설명할 수 있는지 알아보기 위한 것이다. 즉 1)은 첫 번째 연구문제를 위한 것이고, 2)와 3)은 세 번째 연구문제를 위해 설계된 것이다. 그래프의 시작점과 끝점은 정상과 계곡 찾기에서 제외하도록 하였다.

2차 과제는 1차 과제에서 학생들이 간과한 부분을 보완하기 위해 실시되었으며, [그림 III-2]와 같이 가로축에 접한 부분이 포함된 그래프를 제시하였다. 1차 과제와 마찬가지로 변곡점까지 추측해낼 수 있도록 그래프는 미분가능한 모양으로 제시하였다. 2차 과제의 내용은 1차 과제의 문제 1)~3)과 동일하다.



[3]

[그림 III-2] 2차 과제에 제시된 그래프

4. 분석 방법

두 차례의 실험 각각에서 활동과 활동지를 촬영한 영상촬영 파일 2개씩을 전사하였고, 학생들의 행동은 전사 자료에서 괄호 안에 써 넣어 문서화하였다. 전사 자료와 학생들이 쓴 활동지 등 모든 자료를 분석에 활용하였다.

연구 문제에 따라 학생들이 문제 1)을 해결하면서 도함수의 그래프로부터 역도함수의 그래프 모양을 추측하고 그래프 요소별로 어떤 관계를 찾아냈는지 전사내용과 함께 설명하여 연구 결과에 제시하였다. 그리고 학생들의 그래프 추측에서 오류가 나타난 점이 무엇인지 추출하였다. 또 문제 2)와 3)의 해결 결과와 사후 인터뷰를 통해 학생들의 수학 학습에서 어떤 점을 관찰할 수 있는지 그 특징을 찾아보았다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 공대생의 도함수 그래프 해석

두 과제의 문제 1)을 해결하기 위해서 학생들은 주어진 그래프를 도함수의 그래프로 인식하고, 그것의 역도함수 그래프를 추측해내야 한다. 1차 과제와 2차 과제를 해결하면서 학생들이 도함수의 그래프 요소별로 역도함수 그래프의 모양을 올바르게 추측한 결과를 요약하면 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1> 도함수 그래프와 역도함수 그래프의 관계

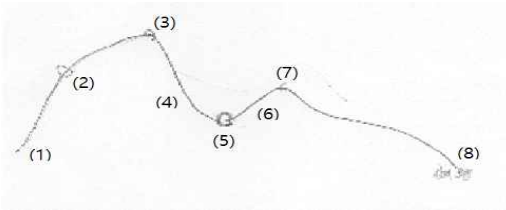
도함수의 그래프 요소	역도함수의 그래프 모양	포함된 과제
양수	오르막	1, 2차
음수	내리막	1, 2차

2) 학생들에게 제시할 때는 그래프에 (1)~(8), A~D가 표시되지 않은 상태였다. A~D는 해당 부분의 그래프 넓이를 말한다.
3) 학생들에게 제시할 때는 그래프에 a, b, 1~7, A~D가 표시되지 않은 상태였다.

증가	양수의 경우: 가파름 음수의 경우: 완만함	1, 2차
감소	양수의 경우: 완만함 음수의 경우: 가파름	1, 2차
0	(도함수의 함숫값의 부호가 좌우에서 바뀌면) 극점	1, 2차
	(도함수의 미분계수의 부호가 좌우에서 바뀌면) 변곡점	2차
극점	변곡점	1, 2차
시작점으로 부터의 넓이	산의 높이	1, 2차

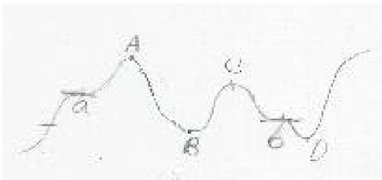
경사도 그래프의 함숫값은 산 모양을 가진 역도함수 그래프의 접선의 기울기를 뜻한다. 따라서 경사도 그래프의 함숫값이 양수라는 것은 산이 오르막이라는 의미이다. 역으로 함숫값이 음수이면 산은 내리막이다. 경사도가 0인 곳은 접선의 기울기가 0이므로, 함숫값의 부호가 좌우에서 바뀌면 극점이고, 극점을 산의 모양으로 생각하면 언덕 또는 계곡이 된다. 경사도가 0이면서 그 미분계수의 부호가 좌우에서 바뀌면 변곡점이다.[4] 경사도가 증가한다는 것은 기울기가 점점 커진다는 의미로, 함숫값이 양수인 경우에는 산은 점점 가팔라진다는 의미이고 음수인 경우에는 점점 완만해진다는 뜻이다. 역으로 경사도가 감소한다는 것은 함숫값이 양수인 경우 점점 완만해진다는 것이고 음수인 경우는 점점 가팔라진다는 뜻이다. 시작점으로부터 어떤 지점까지 그래프의 넓이는 산의 높이를 가리키는데, 이때 함숫값에 절댓값을 취할 필요는 없다. 그리고 경사도 그래프의 극점은 역도함수 그래프의 변곡점을 뜻한다[5].

이를 과제별로 적용해보면, 1차 과제에서 [그림 III-1]에 표시된 (1)은 산의 시작점이고 (2), (4), (6)은 변곡점, (3), (7)은 언덕, (5)는 계곡이 된다. 두 학생은 협력하여 문제를 해결하였는데, 이들이 그린 역도함수 그래프 즉, 최종적인 산의 모양은 [그림 IV-1]과 같다. 두 학생들은 변곡점을 명확하게 표현하지는 않았지만 증가/감소, 언덕/계곡의 위치는 잘 나타내었다.



[그림 IV-1] 1차 과제에서 학생들이 그린 실제 산의 모양

2차 과제에서 연구자는 가로축과 그래프가 접하는 경우를 제시하여, 경사도가 0이라고 해서 항상 언덕 또는 계곡으로 볼 수 없다는 점을 학생들에게 인지시키려 하였다. 2차 과제에서 학생들은 보다 적극적으로 문제 해결에 임했고, 학생들이 그린 역도함수 그래프는 [그림 IV-2]와 같다.



[그림 IV-2] 2차 과제에서 학생들이 그린 실제 산의 모양

위와 같은 결과를 보인 학생들의 경사도 그래프 해석을 <표 IV-1>의 요소에 따라 자세히 살펴보기로 한다.

가. 도함수의 그래프에서 양수와 음수

4) 이 점은 경사도 그래프에서 경사도 값의 부호가 바뀌지 않는 모양으로 나타난다.
5) 1차, 2차 과제의 그래프는 미분가능한 형태로 제시하였으므로 극점일 때 역도함수는 변곡점을 갖는다.

도함수 그래프의 함숫값인 경사도가 양수, 음수인 경우에 대한 학생들의 해석은 어려움 없이 진행되었다. 1차 과제에서 학생들은 실험 초반에 자발적으로 음수의 의미를 언급하였고 양수의 의미는 나중에 연구자의 질문에 답하면서 등장했다. 연구자의 질문에 대한 답이지만 굳이 언급할 필요가 없어 실험 중 발화되지 않은 것으로 보인다.

29. 학생P: 가팔라지고 경사도가 낮으면 마이너스 값으로 가면 내려가는 부분이잖아.

202. 연구자: 그러니까 경사도 그래프에서 함숫값이 양수면
203. 학생P: 산이 증가하는 모양이고.

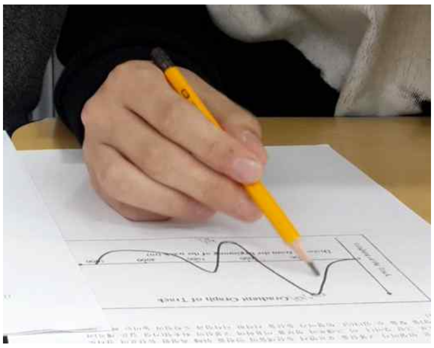
2차 과제의 첫 대화도 양수와 음수를 가리키며 시작되었다. 문제를 해결하려는 의욕을 가지고 학생들은 알고 있는 사실들을 언급하고 정리하면서 양수와 음수의 의미를 말하였다.

275. 학생P: 일단 경사도 그래프를 보고 여기 윗부분은 함숫값 y가 양수(손가락으로 가로축 위를 가리키며)니까 오르막길이고, 아래는 음수니까 내리막길이라고 생각하고 시작하자. 여기는 오르막 내리막.

나. 도함수의 그래프에서 증가와 감소

도함수의 그래프에서 증가와 감소의 의미 해석은 다소 복잡하다. 학생들은 1차 과제에서 그래프가 증가하는 것을 제스처와 함께 제시하였는데, 경사도가 증가하는 것이 산이 가팔라지는 것이라 하여 함숫값이 양수인 경우만 고려하였음을 알 수 있다.

26. 학생J: 아니 근데 경사도가 증가할수록 산이 ((1)부터 (2)까지 경사도 그래프를 연필로 따라가며)



27. 동시에 : 가팔라지는 거고.

하지만 2차 과제에서 학생들은 1차 과제의 수행으로 문제에 익숙해졌기 때문에 도함수 그래프의 증가와 감소가 양수와 음수인 경우에 따라 의미가 달라짐을 구체적이고 명확하게 언급하였다.

278. 학생P: 그러려면 어디까지 올라가고 어디까지 내려가는지를 먼저 판단을 해야 할 것 같아. 한 번 보자. 여기(점 a)는 0이 되었어도 어찌 되어도 계속 증가하는 양수인 부분이니까 여기까지는 계속 올라간다고 봐도 될 것 같다.

282. 학생P: (…) 음수가 되는 부분은 다시 내려가겠지. 여기 이 부분(A와 B사이에서 A쪽)은 가파르게 내려가니까 가파르게 그려주고 이 부분(B쪽)도 똑같이 음수니까 내려가는 부분인데 점점 줄어드니까 완만하게 그려주면 되겠지?

288. 학생J: (B와 C사이의 C쪽을 가리키며) 다시 완만하게 올라가서 다시 0이 되는 부분(C)이 여기고. 음수니까 다시 내리막길이고 조금 내려갔다가 다시 완만해지고.

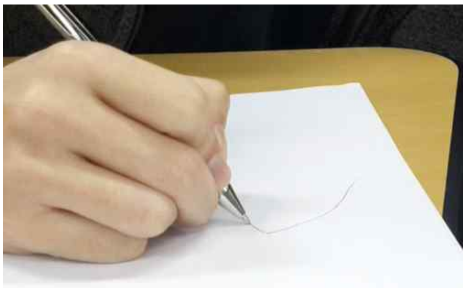
경사도를 의미하는 도함수가 학생들에게는 익숙한 문제가 아니었기 때문에 도함수 그래프에 대한 해석에서 증가와 감소의 의미는 1차 과제에서 다소 명료하지 못한 해석을 보였지만, 2차 과제에서는 조건을 고려하여 정리한 것을 볼 수

있다.

다. 도함수의 그래프에서 함숫값 0과 극점

도함수의 그래프에서 함숫값이 0이라는 것은 그 점에서 역도함수의 접선의 기울기가 0임을 뜻한다. 일반적으로 미분가능한 함수의 최대, 최소를 찾는 문제를 해결하기 위해서는 극대, 극소를 찾는 것이 중요하고, 따라서 도함수 그래프에서 함숫값이 0이 되는 점을 주목해야 한다. 하지만 1차 과제에서 학생들은 함숫값 0의 의미를 명확히 찾아내지 못했다. 0인 점에서 증가 또는 감소가 멈출 것이라고만 언급했을 뿐이다.

94. 학생P: 0이 되는 부분에서 정확히 이렇게 0이 될 거고 기울기가 마이너스가 되는 부분에서 갑자기 내려가지고...



이렇게 되고 어쨌든 음수니까 이렇게 되겠네. 그리고 0이 되는 부분에서 다시 멈추고 또 올라가겠네.

하지만 2차 과제에서 학생들은 함숫값이 양수, 음수인 것의 의미를 생각하면서 역도함수의 그래프가 증가에서 감소, 감소에서 증가로 바뀌는 점이 바로 도함수 그래프의 함숫값이 0이 되는 점임을 생각해내었다. 그리고 극대, 극소를 찾는 것이 정상과 가장 깊은 계곡을 찾는 데 도움이 되는 것임도 말하였다.

353. 학생P: 아, 정상은 극대점이 되는 거죠. 그리고 만약에 여기가 마이너스고 여기가 플러스면 극소점의 모양이 나와야 되는데 변곡점들은 양쪽이 다 같은 부호기 때문에 극점이라고 할 수 없죠.(경사도 그래프에서 점 a의 좌우를 플러스로 표시한다)
354. 연구자: 학생J, C는 무슨 점이에요? 대문자 C.
355. 학생J: 극대점일 것 같아요 여기 양수에서 음수(C의 왼쪽은 플러스, 오른쪽은 마이너스를 표시한다.)로 바뀌니까 이것처럼 되가지고 극대점이 될 것 같아요.
356. 학생P: 이제 극대점이 될 수 있는 점을 찾아야 우리가 정상을 찾을 수 있고 극소점이 되는 점을 찾아야 가장 깊은 계곡을 찾을 수 있으니까.
357. 학생J: 응.
358. 학생P: 정상과 깊은 계곡을 찾으려면 극대 극소를 나누어서 찾는 게 좋겠지? 그러면은 일단 극대점이랑 극소점을 찾아보자. 그러면 극대는?(활동지 여백에 극대, 극소를 적는다)
359. 학생J: 여기(a의 왼쪽) 플러스. 플러스(a의 오른쪽). 플러스(A의 왼쪽). 하다가 마이너스(A의 오른쪽)니까 플러스에서 마이너스니까.
360. 학생P: A랑.
361. 학생J: A는 극대. 마이너스(B의 왼쪽)에서 플러스(B의 오른쪽)로 증가하니까 B는 극소가 되고
362. 학생P: B는 극소.
363. 학생J: 플러스(C의 왼쪽) 마이너스(C의 오른쪽)니까 C는 다시 극대. 여기(b의 왼쪽)는 음수에서 음수(b의 오른쪽)니까 여기는 변곡점이고.
364. 학생P: 변곡점.
365. 학생J: 음수(D의 왼쪽)에서 양수(D의 오른쪽)니까 여기도 극소가 될 거 같고.
366. 학생P: 그럼 이제 A랑 C 중에서 정상이 있는 거고 B랑 D 중에서 가장 깊은 계곡이 있는 거지 따지자면(활동지에 말한 것을 적는다).

함숫값 0이 역도함수 그래프의 극점임을 찾아낸 것과 동시에 위의 대화에서 주목할 것은 바로 학생들이 변곡점을 언급했다는 점이다. 2차

과제에서 연구자는 학생들이 가로축과 접하는 점 a, b를 어떻게 해석하는지 살펴보고자 하였는데, 학생들은 도함수의 그래프에서 함숫값이 0인 곳에서 좌우의 함숫값 부호가 바뀌면 역도함수 그래프에서 극대와 극소이고, 그렇지 않으면 변곡점이 된다는 것을 알아낸 것이다. 1차 과제에서는 다음과 같이 어렴풋이 변곡점의 의미를 생각하다가 2차 과제에서야 명확하게 변곡점의 의미를 제안하였다.

250. 학생J: ((1)과 (2)사이와 (2)와 (3)사이의 그래프를 따라가며) 급격하게 증가하다가 살짝 약하게 증가하는 건가?

2차 과제에서 변곡점의 의미를 점 a와 점 b에서 고려하면서 학생들은 단지 함숫값이 0인 것으로는 정상과 가장 깊은 계곡을 찾는 데 충분하지 못함을 말하였다.

309. 학생J: 음, 얘(a점)는 근데 어차피 여기서 오르막길 이다가 잠시 멈췄다가 다시 오르는 거니까(처음부터 A까지 경사도 그래프를 따라가며) 그래프로 따지면 변곡점이 되는 거니까 가장 높은 정상이나 가장 깊은 계곡이 될 수 없을 것 같아요.
310. 학생J: 너는 어떻게 생각해?
311. 학생P: 내 생각도 비슷한데 여기 부분(아래 그림 표시한 부분)은 어차피 편평해지는 부분이니까 잠깐 동안 그걸로 정상이라고 하기도 그렇고 깊은 계곡이라고도 할 수가 없는 게 잠깐 편평해 졌다가 다시 올라가는 것이기 때문에 전체적으로 보면 어쨌든 증가하는 모양(직접 그린 산의 그래프를 연필로 따라간다)이라서 어차피 다 오르막길이니까.

이로써 <표 IV-1>에 제시한 바와 같이 학생들은 연구자가 의도한 도함수 그래프의 극점 해석을 해내었다.

라. 도함수 그래프의 넓이

문제 1)은 경사도를 나타내는 그래프를 보고 산의 모양 중 정상과 가장 깊은 계곡을 찾는 것이었다. 정상이 될 수 있는 곳은 언덕, 가장 깊은 계곡은 계곡들이 후보가 되는데, 가장 높은 곳과 낮은 곳은 산의 높이로 판단하므로 시작점부터의 그래프 넓이를 살펴보아야 한다. 미적분 지식을 갖고 있는 두 학생은 1차 과제 초반부터 그래프의 넓이에 주목해야 함을 알고 있었고, 이를 문제 해결에 활용하였다.

31. 학생P: 그러면은 산의 높이는 한마디로. 이 그래프의 넓이를 얘기하는 것 같거든.
32. 학생J: 그럼 이 넓이를 구해야 된다고?
33. 학생P: 경사도의 넓이.
34. 학생J: 응.
35. 학생P: 경사도 그래프의 넓이가 산의 그래프의 높이를 얘기하는 것 같다고(그래프 아래를 빗금으로 채우면서)

하지만 그래프의 함수식이 주어지지 않았으므로 그래프의 넓이를 직접 구할 수는 없다. 1차 과제에서 학생들은 넓이를 비교할 수 없지만 눈대중으로라도 가로축 위의 넓이와 아래의 넓이를 비교하려 했다.

52. 학생P: 정확히 모르잖아((5)부터 (7)까지 경사도 그래프와 가로축 사이의 넓이와 (7)부터 (8)까지 경사도 그래프와 가로축 사이의 면적을 가리키며)
53. 학생J: 응.
54. 학생P: 그래서 일단은. 대충 추측을 해야 할 것 같은데. 그니까 최대는 확실히 여기((3)을 가리키며)인 것 같애. 왜냐하면 이거((5)

부터 (7)까지 경사도 그래프와 가로축 사이의 면적)보다 일단 이게((3)부터 (5)사이 경사도 그래프와 가로축 사이의 넓이) 훨씬 더 넓잖아.
55. 학생J: 그렇지.
56. 학생P: 그러면은 여기((7)을 가리키며)까지 와도 결국에는 여기((3)을 가리키며)까지 있는 것보다는 더 작단 말이야 넓이가.

2차 과제에서는 그래프의 부분별 넓이를 더하고 빼는 방법을 취하여 답을 구하였다. 그리고 음수 부분의 넓이는 빼서 구해야 하는 이유까지 설명하였다.

372. 학생P: 그럼 A인 지점의 넓이는 A는 1이랑 2를 더한 것의 넓이겠지?(활동지에 1+2 라고 적는다.)
373. 학생J: 응.
374. 학생P: C는 1 더하기.
375. 학생J: 4 한 다음에 빼기 3.
376. 학생P: 이거일 거고(활동지에 1+2+4-3이라고 적는다)
377. 학생J: 응.
378. 학생P: 그럼 B는.
379. 학생J: 1 더하기 2 빼기 3(활동지에 1+2-3이라고 적는다)
380. 학생P: D는?
381. 학생J: D가 여기 있구나. 그러면 1, 2, 4 더하고 3, 5, 6 빼면 되겠다.
382. 학생P: 여기서 뺀 이유는 뭐야?(활동지에 1+2+4-3-5-6이라고 적는다)
383. 학생J: 아 물어보는 거야?
384. 다같이 : (하하하)
385. 학생J: 면적이 곧 뭐라 그러지? 아 뭐라 그러지? 이거(1부분에 빗금을 치면서) 면적이 가장 넓은 게 정상이 될 거고 면적이 가장 적은 게 그게 가장 깊은 계곡이 될 거고 그거 물어 본거지?(경사도 그래프의 가로축 아래에 있는 부분의 영역을 빗금을 치면서)
386. 학생P: 응. 이걸 뺀 이유가 이 부분들(3, 5, 6 부분을 가리키며)은 내리막이니까 면적을 빼줘야 되는 거지 오르막길은 양수고 내리막길은 음수니까.

학생들은 다소 우왕좌왕한 모습은 있었으나 주어진 과제에서 역도함수의 그래프 모양을 잘 추측해 내었다.

2. 학생들의 그래프 해석 오류

학생들의 그래프 해석과 추측에서 보인 오류는 1차 과제에서 두 번 나타났다. 첫 번째는 과제를 시작하자마자 바로 나타났는데, 주어진 그래프를 도함수의 그래프로 인식하지 않고 산 모양 그대로 인식했기 때문이다. 그래서 정상과 가장 깊은 계곡을 그래프 모양에서 찾아 (2)를 정상, (4)를 가장 깊은 계곡으로 인식하였다.

1. 학생J : 최솟점이 여기((4)번을 가리키며)고 최대가((2)번을 가리키며)
2. 학생P : 엉.

이 오류는 금방 수정되었는데, 문제에서 주어진 그래프가 ‘경사도’에 대한 것임을 연구자가 말하자 경사도의 의미에 따라 최댓값이 (2)가 아니라 (3)임을 언급하였다.

18. 연구자 : 경사도를 함숫값으로 그린 거래요.
19. 학생J : 엉?
20. 학생P : 경사도. 그래프가 높아질수록 경사도가 더 높아진다고(손으로 경사도를 흉내내며)
21. 학생J : 그지.
22. 학생P : 그러니까. 경사도가 높을수록 더 높게 올라갈 거 아니야.
23. 학생J : 응.
24. 학생P : 그러면은. 이게((2)번을 가리키며) 최댓값이 아니라 이 산의 최댓점은 아마... 내가 볼 때에는 여기((3)번을 가리키며)인 것 같애.....
25. 학생P : 일단 생각을 해보자.

문제를 해결하려 하자 바로 나타난 이 오류는 이 과제가 학생들이 전형적으로 접해 왔던 문제가 아니었기 때문에 나온 것으로 보인다. 주어진 그래프가 도함수의 그래프라는 것을 생각하지 못하고 학생들은 몇 번의 대화로 문제 해결을 마무리 지으려 하였다. 더 이상의 진행이 없어서 실험을 마치려 하는 학생들에게 연구자는 경사도를 함숫값으로 그린 그래프라는 것을 강조하게 된다. 이것을 매개로 학생들은 문제의 뜻을 다시 살펴보고 그에 따라 문제의 의도를 파악하려 하였다.

두 번째 오류는 첫 번째와 관련된 것으로, 가장 깊은 계곡을 (4)라고 생각한 것이다. 하지만 이번에는 이유가 달랐다. 학생들은 도함수의 그래프를 이용하여 역도함수의 그래프인 산 모양을 [그림 IV-1]과 같이 그렸는데, [그림 IV-1]에서 가장 깊은 계곡의 위치에 대응하는 [그림 III-1]의 위치를 잘못 짚은 것이다.

101. 학생J: 그림 상으로는 여기(직접 그린 산 모양의 최소점을 가리키며) 아니야? 여기(직접 그린 산모양의 최소점)니까 여기((4)번을 가리키며)지?
102. 학생P: 여긴((4)번을 가리키며) 것 같아.
103. 학생J: 그래 여기(직접 그린 산 모양에서 최솟점을 가리키며)지?

(생략)

133. 연구자: 이제 가장 깊은 계곡을 찾았잖아요. 그러면 가장 깊은 계곡이라고 한 곳을 손으로 짚어볼까요? 연필로.
134. 학생P: 여기((4)번을 가리키며)
135. 연구자: 네. 거기라고 했잖아요. 거기는 무슨 일이 발생하고 있는데요?
136. 학생P: 급격하게 경사가 떨어지는.
137. 연구자: 떨어지고 있죠? 그러면 그 점에서 좌우로는?
138. 학생P: 아 잠깐만... 아... 하... 여기((5)번을 가리키며)가 최소인 것 같아요(연필로 (4)번의 양옆의 그래프를 따라가 본다).
139. 연구자: 거기가 최소인 것 같아요?
140. 학생P: 가장 깊은 계곡.
141. 연구자: 왜요?

(생략)

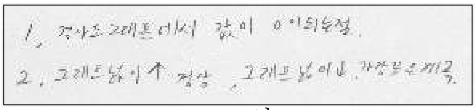
145. 학생P: 여기((4)에서 (5)를 가리키며) 내에서 계속 어쨌든 감소를 하고 있는 부분이기 때문에 이점(직접 그린 산 모양에서 최소점을 가리키며)은 여기((5)번을 가리키며)가 되는 것 같아요.

학생들이 그래프 해석에서 보인 오류는 다소 사소하다고 할 수 있지만, 공대생들의 문제해결에 대한 시사점을 준다. 첫째는 문제를 보자마자 전형적인 것으로 인식하고 기존의 문제해결 방식으로 접근하려 한다는 것이고, 두 번째는 문제해결에 대한 결과를 의심 없이 받아들인다는 것이다. 가장 깊은 계곡을 찾고 난 뒤 반성을 요구하는 연구자의 질문에도 자신의 답에 확신에 차 있었기 때문에 연구자가 특정 점을 가리키며 재차 질문을 하였다. 이런 오류는 수학 문제를 해결하는 다른 학생들에게도 나타날 수 있는 문제점이지만, 실용학문을 연구하는 공대생에게는 지나칠 수 없는 문제점이 될 수도 있다.

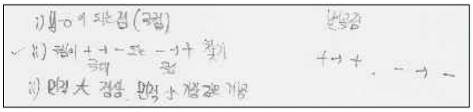
3. 역도함수 과제 적용 결과

본 연구에서 학생들에게 제시한 역도함수 과제는 학생들의 학습 상태를 파악하는 것이 아니라 실세계 현상을 수학적 안목으로 파악하도록 도움을 주기 위한 것이다. 이에 따라 두 과제에서는 역도함수의 그래프 추측을 일반화하고 설명하라는 문제 2)와 3)을 제시하였다.

문제 2)에 대한 답은 두 학생이 함께 작성하였는데, 그 결과는 [그림 IV-3]과 같다.



<1차>

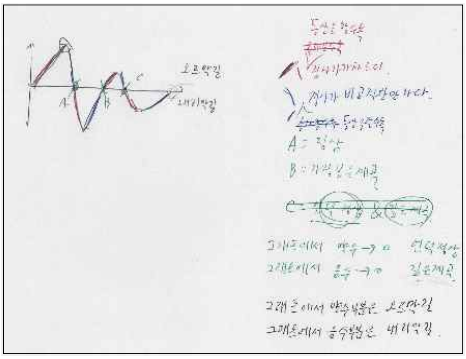


<2차>

[그림 IV-3] 학생들이 작성한 문제 2)의 답안

문제 1)의 결과가 어떤 그래프에서든 적용될 수 있도록 그 결과를 일반화하라는 문제 2)에서 학생들의 답안은 아주 단순했다. 무엇이 정상을 찾는 방법이고 무엇이 가장 깊은 계곡을 찾는 방법인지에 대한 설명도 없고 풀이하는 과정도 알 수 없다. 이 또한 공대생들의 수학 학습의 문제점을 드러낸다. 수학 문제는 어떤 하나의 값을 구하는 것이므로 그 풀이 과정을 자세히 나타내지 않고 요약된 정보만 제시하는 것이다.

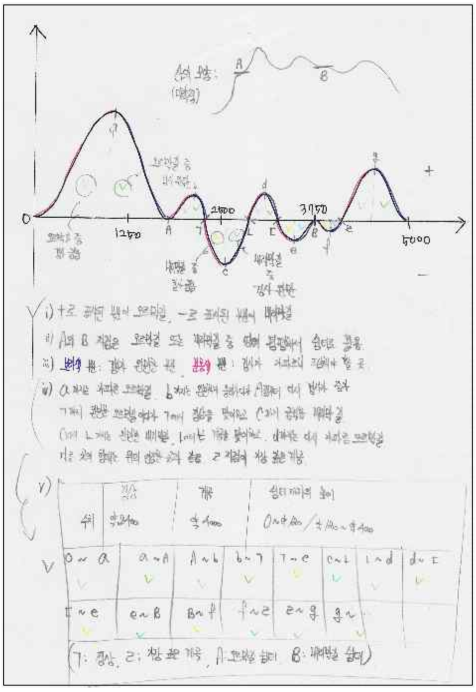
연구자는 이를 미리 간파하고 문제 3)을 과제에 포함하였다. 일반인들도 문제해결 결과에 대해 이해할 수 있도록 글을 쓰도록 하였고, 1차 과제의 결과는 [그림 IV-4]와 같다.



[그림 IV-4] 학생들이 작성한 1차 과제 문제 3)의 답안

[그림 IV-4]의 답안은 [그림 IV-3]과 마찬가지로 답을 쓴 사람만 그 의미를 파악할 수 있도록 작성되었다. 하지만 2차 과제에서는 연구자의 별도 요구가 없었으나 [그림 IV-5]와 [그림 IV-6]의 친절한 답안이 작성되었다. 1차와 다른 점은 학생 개별로 작성하도록 한 것인데, 학생들은 그래프에 색깔로 표시까지 하며 가독성을 높이려 했다.

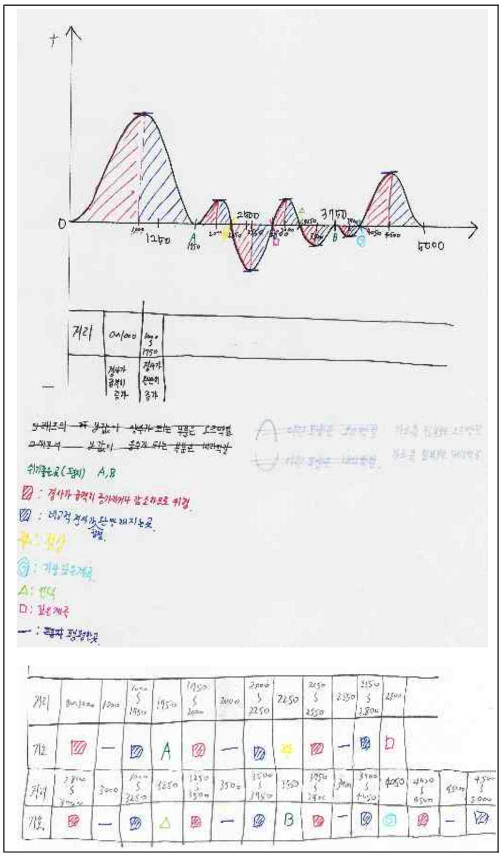
학생 J는 [그림 IV-5]에서 우선 주어진 경사도 그래프의 상단 위에 실제 산의 모양을 그려주어 산의 험준한 정도를 알 수 있게 하였다. 경사도 그래프에 극점과, 가로축과의 교점과, 접점, 그래프 아래와 가로축 사이의 넓이를 각각 다른 색으로 하여 오르막과 내리막 구간을 표시하고 구간에 대한 설명도 그래프 아래에 자세히 서술하였다. 그래프에 표시된 구간에 대한 설명으로는 실제 산의 모양을 알 수 있는 가파른 오르막, 완만한 오르막, 가파른 내리막과 완만한 내리막, 쉼터, 언덕과 계곡, 정상과 가장 깊은 계곡이 어느 곳인지를 글로 설명하고 이 글에 대한 내용을 표로 만들어 일반인들이 경사도 그래프를 보고 안전하게 산행을 할 수 있는 안내판을 만들었다.



[그림 IV-5] 2차 과제 문제 3)의 학생 J 답안

학생 P는 [그림 IV-6]에서 실제 산의 모양을

제시하지는 않았다. 학생 P는 기호를 사용하기 보다는 시각적인 효과를 더 강하게 나타내는 방법을 이용하였다. 오르막과 내리막의 색깔을 달리하여 나타내기도 하고, 각각 다른 색을 갖는 별모양이나 동그라미 등을 이용하여 표시하였다. 그리고 다양한 모양과 색들을 경사도 그래프 아래에 인덱스로 처리하였고, 맨 아래 표에 가로축의 수평거리를 구체적인 숫자로 지정하고 그 해당 구간에 대한 인덱스를 넣어 한 눈에 알아보도록 시각적인 효과를 극대화 한 안내판을 만들어냈다.



[그림 IV-6] 2차 과제 문제 3)의 학생 P 답안

문제 3)은 실세계에서 관찰할 수 있는 산의 모양을 수학적 안목에서 바라보고 그것을 설명한 것이다. 과제에서 산업 현장 맥락에 적용하지는 못했지만 실세계 현상에 미적분학 지식을 적용하여 해석하는 문제 해결을 통해 공대생들에게 필요한 수학과 학습 방법이 무엇인지 깨닫게 하려는 의도가 포함되었다. 이에 따라 학생들은 실험 후 인터뷰에서 다음과 같이 본 연구의 과제에 대한 평가를 하였다.

먼저, 학생들은 수학이 추상적인 학문으로서만 존재하는 것이 아니라 우리가 살고 있는 세상 속에 존재하고 역할을 담당하고 있다는 인식을 하게 되었다. 특히 학생 J는 수학이 전공의 기초가 되는 지식이라는 생각에서 수학을 학습해야 한다고 생각하고 있었는데, 수학의 유용성을 다시 한 번 깨닫게 되었다.

> 수학이 모든 자연계 학문의 기본이라는 말을 고등학교 때 선생님에게 들은 적이 있습니다. 솔직히 수학을 조금이라도 좋아하게 하려고 궤변을 늘어놓는 것이라 생각했는데 지금에서 보면 꼭 궤변이 아니라는 것을 알겠습니다. 이번 실험에서 산의 경사도 그래프를 분석하며 실생활과 수학이 조금이라도 관련이 있다는 것을 깨달았습니다. (학생 J)

또한 학생 J는 미분적분학 수업을 통해 알게 된 수학 지식이 단지 지식으로만 머무는 것이 아니라 실세계에 활용 가능한 지식임도 이 과제를 통해 깨달았다.

> 이번을 계기로 수학이라는 과목을 더 좋아하게 되었습니다. 실험을 통해 배운 내용을 상기시킬 수 있었고 책으로 배운 내용이 이렇게 실생활에 응용될 수 있는 것을 보고 헛된 공부가 아니란 것을 깨달았습니다. (학생 J)

그리고 학생 P는 수학 학습 방법에 있어서도 실험에 참여한 것과 같이 다른 사람과 함께 협력하면서 문제를 해결하고 의견을 교환한 것이

사고력 향상에 도움이 되었다고 하였다.

> 평상시에 수학문제를 풀 때는 조용히 생각하면서 풀었지만 이번 실험에서는 서로 자신의 생각을 말하면서 정답을 찾아가는 방식이었기 때문에 다소 생소하고 낯설지만 수학적 사고력을 기르기에는 기존의 방식보다는 이번 실험의 방식이 더 좋다고 생각하게 되었습니다. (학생 P)

본 연구의 역도함수 추측 과제는 수학이 실세계 현상을 설명하는 데 필요하고 수학 지식을 적용할 때 실세계 문제 해결에 도움이 되는 것임을 공대생들이 깨닫게 하였다. 그리고 수학을 일반인에게 어떻게 설명하고 표현해야 하는지에 대해서도 학생들 나름대로 알 수 있었던 기회가 되었다. 또한 학생들의 수학 학습 방법에서도 어떤 변화가 필요한지 그것이 왜 수학 학습에 도움이 되는지에 대해서도 잘 알 수 있게 하는 기회가 되었다.

V. 결론 및 제언

인간의 가장 위대한 업적 중에 하나로 꼽히는 미분적분학은 수학을 전공으로 하는 학생들뿐만 아니라 여러 분야에서 다양하게 쓰이고 있다. 본 연구는 미분적분학의 전형적인 문제의 틀에서 벗어나 도함수의 그래프를 해석하여 실제 산의 모양을 해석하는 과정을 공대생들에게 제시함으로써 학생들이 역도함수를 추측해낼 수 있는지, 어떤 오류를 보이는지, 역도함수 추측 과제가 공대생들의 수학 학습에 어떤 변화를 일으키는지 알아보고자 하였다.

공대생 두 명이 역도함수의 그래프 추측을 어떻게 하였는지 도함수의 그래프 요소별로 살펴보았을 때, 학생들은 도함수의 그래프에서 양수/음수, 증가/감소, 0과 극점, 넓이의 의미를 올바로 해석하여 역도함수의 그래프로 추측해낼 수 있었다. 하지만 여기서 학생들은 오류를 보이기도 했는데, 이 오류는 미적분 개념상의 문제보다는 학생들의 수학 학습 방식에서 기인한 것으로 보였다. 학생들의 수학 학습 방식은 대학에서만 키워진 것은 아닐 것이므로 초등, 중등 교육에 따라 고등 교육, 평생 교육이 영향을 미칠 수 있음을 간파하고 미래에도 필요한 수학 학습 방법을 학생들이 소양으로 가질 필요성을 시사한다.

학생들은 역도함수의 그래프 추측을 통해서 자신이 알고 있는 수학적 사실을 다른 사람이 알 수 있게 표현하고 설명해내려 하고 수학이 실세계를 바라보는 관점을 제공한다는 것을 인식하였다. 비록 본 연구에서 활용한 역도함수 과제가 복잡한 산업현장을 적용하는 모델은 아니지만, 수학 문제는 일상생활에서도 활용할 수 있는 가치가 있으며 일반인들에게 해결의 결과를 설명하고 이해할 수 있도록 하는 것이 중요함을 학생들 스스로 깨닫게 해주었음을 알 수 있다.

본 연구는 대학 수학에 대한 내용으로 진행하였다. 하지만 본 연구에서 제시한 도함수의 그래프는 미분과 적분의 역 관계를 다루는 고등학교에서도 충분히 시도할 수 있는 내용이다. 대학 수학뿐 아니라 고등 수학에서도 전형적인 미분적분 문제에서 벗어나 학생들 스스로 추측하고 결과를 알아내며 자신의 지식에 비추어 옳은지 확인하고 동료와 함께 문제를 해결해나가는 경험을 갖게 하는 것도 필요할 것이다.

지금까지 수학교육 연구가 초·중등 연구에 한정되었으나 대학에서도 수학 교육이 실시되는 만큼 본 연구는 대학 수학 교육에도 시사점을 준다. 수학을 공부하는 여러 분야의 대학생들에게 필요한 수학과 이들의 사고에 대한 연구가 활발히 이루어질 필요가 있다. 즉 공대생들에게 미분적분학이 필수 과목이라면 이들에게 필요한 필수적인 내용을 현장에서 활용되는 방식으로

가르칠 필요가 있다. 미분적분학이 수학의 한 분과이지만 수학적 접근이 아니라 현장에서 활용 가능한 실제적 접근이 필요한 것이다. 본 연구에서 학생들은 유사한 두 과제를 해결하였는데, 1차보다 2차에서 더 많은 사실을 알아내고 더 다양한 사고와 정확하고 세밀한 분석의 태도를 보였다. 따라서 학생들에게 이런 경험이 더 많이 부가될 때 산업현장에서 적용할 수 있는 능력 또한 더 신장될 것으로 보인다.

참고문헌

송정화, 이종희(2007). 그래프에서 교사와 학생의 의미 구성에 대한 사례연구. **학교수학, 9**(3), 375-396.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판문화원.

정연준, 이경화(2009). 정적분과 부정적분의 관계에 대한 고찰. **학교수학, 11**(2), 301-316.

황혜정, 김미향(2016). 미분개념의 이해에 관한 수업 사례. **학교수학, 18**(2), 277-300.

Haciomeroglu, E. S. (2007). *Calculus students' understanding of derivative graphs: Problems of representations in calculus*. Unpublished doctoral dissertation, Florida State University.

Hughes-Hallett, D., McCallum, W. G., Gleason, A. M., Pasquale, A., Flath, D. E., Quinney, D., Lock, P. F., Raskind, W., Gordon, S. P., Rhea, K., Lomen, D. O., Tecosky-Feldman, J., Lovelock, D., Thrash, J. B., Osgood, B. G., & Tucker, T. W. (2002). *Calculus: Single Variable.* Danvers, MA: John Wiley & Sons, Inc.

Kenelly, J. W. (1986). Calculus as a general education requirement. In Douglas, R. G. (Ed), *Toward a lean and lively calculus* (pp. 6-67). The mathematical association of America.

Selden, J., Selden, A., & Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. In J. J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results* (pp. 19-26). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Stewart, J. (2004). **미분적분학**. 교우사.

Varberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. E. (2010). **미분적분학(상)**. 교우사.

Yoon, C. (2016). Visualisation for different mathematical purposes. In Sáenz-Ludlow, A., & Kadunz, G. (Eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics* (pp. 69-88). Rotterdam: Sense Publishers.

Zimmermann, W. (1991). Visual thinking in calculus. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 127-138). Washington, DC: MAA.

The Conjecture of Anti-Derivative Graph of Engineering Students

Kim, Su Min (Graduate School, Kangwon National University)
Kim, Sun Hee (Kangwon National University)

To engineering students, calculus is essential knowledges and skills as a mathematical model and give a perspective to observe phenomenon in the future industrial field. However, engineering students' calculus study tends to solve problems by only applying the mechanical calculation and mathematical results. This study aimed to make engineering students realize the importance of calculus and untypical problems, by suggesting problems that could apply the mathematical concepts and principles and even solve the actual conditions of the problems. Students conjectured the anti-derivative graphs by interpreting the given derivate problems. They showed errors in this process and the errors are contributed by their mathematics leaning styles. As a result, the task would be helpful to engineering students.

* Key Words : anti-derivative(역도함수), calculus(미분적분학), engineering student(공대생), graph interpretation(그래프 해석)

논문접수 : 2017. 2. 10
논문수정 : 2017. 3. 10
심사완료 : 2017. 3. 16