대한수학교육학회지 <학교수학> 제 19 권 제 1 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 19, No. 1, 153 ~ 170. Mar 2017

개방형 문제와 선택형 문제 해결에 나타난 학생의 추론 비교

이 명 화* · 김 선 희**

본 연구는 학생들의 추론 활동이 활발할 것으로 기대되는 개방형 문제와 학생들이 익숙해하는 선택형 문제에서 학생들이 문제를 해결하면서 보이는 추론의 유형과 추론 과정이 어떠한지 분석하였다. 그리고 개방형 문제 해결에서 추론을 증진시키는 교사의 역할에 대해 알아보았다. 선택형 문제에 비해 개방형 문제 해결에서 학생들은 더 다양한 추론 유형을 나타냈고, 추론이 연쇄적으로 진행되면서 확장되는 과정을 보여주었다. 개방형 문제에서는 학생들의 개연적 추론의 한 유형인 가추가 활발하였는데, 이에 따라 교사는 격려, 촉진, 안내의 역할을 하였다. 이에 교사는 수업과 평가에서 개방형 문제를 제시하고, 학생들이 추론에 어려움을 느낄 때 적절한 발문으로 학생들의 추론이 더욱 활발해지도록 돕는 역할을 해야 한다.

I. 서 론

2015 개정 교육과정에서는 문제해결, 추론, 창의·융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천의 6가지 수학 교과 역량을 강조하고 있다. 학생들이 문제를 해결하고 가정에서 결론까지 논리적인 추론을 조직하고 창의적이고 융합적인 사고를 가능하게 하려면, 학생들에게 주어지는 과제가 일련의 절차를 거쳐 답을 구하는 알고리즘보다 학생 스스로 알고 있는 결과나 규칙을 통해 추측을 하고 그에 대한 검증을 하며 다양한 사고 방법을 경험하고 자신의 추론 결과에 근거하여 연쇄적인 추론이 계속 이어질 수 있는 문제이어야 한다. 수학 수업이나 평가에서 교사가 학생에게 어떠한 유형의 문제를 제시하느냐에 따라 추론의 출발점과 방향이 달라지고 추론 활동의 유형도 달라질 것이다.

최근 학교 교육에서는 지필고사를 줄이고 수행평가를 권장하며 지필고사에서도 선택형을 줄이고 서술형, 논술형의 비율을 높이도록 권장하고 있다. 하지만 학교의 서술형, 논술형 문제 또한 답이 정해져 있는 전형적인 문제가 많이 출제되고 있다. 2015 개정 수학과 교육과정의 교육 목표를 실현하려면 이러한 폐쇄형 문제보다는 답을 산출하는 과정과 그 결과가 열려있는 개방형 문제를 활용하는 것이 더 적합하다. 특히 개방형 문제는 6가지 교과역량 중 추론과 많은 관련이 있다. 추론은 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력인데(교육부, 2015, p.4), 답이 열려 있는 개방형 문제에서는 수학적 사실을 추측할 기회가 많고 그 결과를 분석하고 정당화하며 자신의 추론에 근거하여 새로운 추론을 이어가면서 반성을 하게 되기 때문이다.

이에 본 연구는 학교에서 학생들에게 아직도

* 강원대학교 대학원, hahahoho98@nate.com (제1 저자)
** 강원대학교, mathsun@kangwon.ac.kr (교신저자)

많이 활용되는 선택형 문제를 개방형 문제로 바꾸어 제시했을 때 학생들의 추론의 유형과 과정이 어떠한지 살펴보고자 한다. 그리고 학생 스스로 사례에 대해 추측하도록 할 때 교사의 역할이 무엇인지에 대해서도 알아보고자 한다. 지금까지 개방형 문제의 장점 등에 대한 연구가 많이 진행되었으나, 본 연구는 추론이라는 교과역량 측면에서 Peirce의 추론 유형과 Toulmin의 분석틀에 근거하여 개방형 문제를 해결할 때 학생들의 추론을 상세히 분석하여 개방형 문제의 특징을 구체적으로 드러내는 데 의의가 있다. 본 연구의 연구문제는 다음과 같다.

첫째, 개방형 문제와 선택형 문제 해결에서 학생의 추론 유형은 어떠한가?

둘째, 개방형 문제와 선택형 문제 해결에서 학생의 추론 과정은 어떠한가?

셋째, 개방형 문제 해결에서 추론을 증진시키기 위한 교사의 역할은 무엇인가?

II. 이론적 배경

이 장에서는 개방형 문제와 수학적 추론, Toulmin의 논증 모델에 대하여 살펴본다.

1. 개방형 문제

종래의 수학 교실에서 교과서나 참고서를 통해 학생들에게 제시되어 왔던 문제는 대부분 정형화되고 답이 오직 하나로 제한된 폐쇄된(closed) 문제로서, 지식이나 기능의 습득에는 유효했지만 문제해결 능력을 육성하거나 학생의 흥미 관심을 고조시켜 자주적인 학습 능력을 성취하기에는 한계가 있다(고상숙, 노지연, 2007). 이러한 문제점에 따라 수학교육에서 개방형 문제에 대한 관심이 높아지고 있다. 출발 상황과 목표 상황이 모두 닫혀 있는 문제를 폐쇄형 문제라고 할 때, 개방형 문제는 이와 반대되는 개념으로 문제의 출발 상황이나 목표 상황 등이 열려 있는 문제라고 할 수 있다(Pehkonen, 1997). 변은진, 전평국(2001)은 개방형 문제가 문제에 대한 접근 과정과 해가 다양한 형태로 나올 수 있는 문제로서 문제 해결에 대한 해법이 전통적인 방식과는 다르게 평가된다고 하였다. 이에 본 연구는 학생들이 문제에 접근하는 과정이 다양하고 이에 따른 다양한 해가 나올 수 있는 문제를 개방형 문제로 정의한다.

개방형 문제의 유형은 고착화 깨기, 다양한 답, 다양한 전략, 전략 탐구하기, 문제 만들기, 선택하고 평가하기, 활동적 탐구 과제, 논리적 사고 훈련으로 분류되기도 하고(권오남, 박정숙, 박지현, 조영미, 2005), 출발 상황과 목표 상황에 따라 <표 II-1>과 같이 분류되기도 한다(Pehkonen, 1997).

<표 II-1> 출발 상황과 목표 상황에 따른 개방형 문제의 분류(Pehkonen, 1997)

목표상황 / 출발상황	닫혀있음	열려 있음
닫혀있음	폐쇄형 문제	목표 상황이 열린 문제 실생활 상황, 탐구과제 문제 장, 문제 변형
열려있음	실생활 상황, 문제 변형	실생활 상황, 문제 변형 프로젝트, 문제 제기

본 연구에서는 Pehkonen(1997)의 분류에 따라 폐쇄형 문제인 선택형 문제와 출발 상황은 닫혀있으나 목표 상황은 열려 있는 개방형 문제를 학생들에게 해결해 보게 함으로써 문제 해결 과정에서 학생들의 추론 유형을 비교하여 보기로 한다.

지금까지의 선행 연구에 의하면 개방형 문제의 장점은 다음과 같이 정리할 수 있다. 첫째, 개방형 문제는 학습자의 해석에 따라 독자적인

해결전략을 사용하고, 여러 가지 정답이 인정되므로 풍부한 탐구 활동을 경험하고, 학생들의 창의적 융통성을 발달시킨다(Silver, 1997; Pehkonen, 1997; Thompson, 1998). 둘째, 개방형 문제는 답이 여러 가지이거나 해결 전략이 여러 가지이므로 학생들의 다양한 사고를 증진한다(권오남 외, 2005). 셋째, 개방형 문제는 학생들의 사고를 자극하고 확산시키며 도전감을 줄 수 있다(변은진, 전평국, 2001). 넷째, 다양한 풀이 방식과 추론을 다루는 과정에서 수학적 의사소통 능력의 함양에 효과적으로 기여한다(Nohda, 1995; 민득자, 정영옥, 1999; 권오남 외, 2005). 다섯째, 모든 학생들이 자신만의 의미 있는 방법으로 문제에 답하고 학력이 우수한 학생이나 부진한 학생이나 각자의 수준에서 문제를 해결하기 때문에 수준별 수업에 용이하다(Sawada, 1997; Pehkonen, 1997; 권오남 외, 2005). 여섯째, 학생들의 고차원적인 사고를 평가할 수 있다(권오남 외, 2005). 일곱째, 학생들이 교사가 가르친 내용을 제대로 알고 있는지에 대한 정밀한 정보를 얻을 수 있다(권오남 외, 2005). 여덟째, 개방형 문제를 통해 학생들이 수업시간에 보다 적극적으로 참여하고 자신의 아이디어를 보다 자연스럽게 표현하고, 학생들에게 발견의 기쁨을 가져다주고 다른 학생들의 승인을 얻을 수 있는 풍부한 경험을 제공해 준다(Sawada, 1997). 아홉째, 개방형 문제의 풀이가 곧 학생의 추측 형성을 의미하며, 학생은 자신이 생산한 추측의 불확실성으로 인해 정당화의 필요성을 느끼고 자연스럽게 자신만의 다양하고 새로운 추측을 생산한 후 자신의 추측을 정당화하는 수학적 탐구 과정을 경험하여 수학적 추론을 평가할 수 있게 한다(Thompson, 1998; 도종훈, 2007).

이 많은 개방형 문제의 장점들 가운데 본 연구는 마지막 장점에 주목하고자 한다. 즉, 학생들이 개방형 문제를 해결하기 위해 어떠한 수학적 추론을 사용하는지, 추론의 과정은 선택형 문제에 비해 어떤지 알아보고자 한다.

2. 수학적 추론

우정호(1998)는 수학을 하는 것은 추론하는 것이며, 수학에 의미를 주고 수학하는 힘의 근원이 되는 것은 발견의 논리인 귀납과 유추에 의한 개연추론 능력과 함께 강력한 정당화의 논리인 연역 추론 능력을 개발하는 것이라 하였다. 수학적 추론 능력은 수학 학습을 통해 신장되어야 할 목표 중 하나로, NCTM(1989, 2000)에서도 학교 수학의 규준으로 선택되었다.

하지만 추론의 정의에 대해서는 학자마다 다른 견해를 갖는데, 이성범(2001)은 추론을 체계적인 틀을 가지고 근거를 찾거나 결론을 도출하는 사고로 정의하였고, NCTM(2000)은 증거 또는 가정에 기초하여 결론을 이끌어내는 과정이라고 하였고, 김선희, 김기연(2004)은 학생들이 가정에서 출발하여 결론에 이르기까지 논리적인 사고를 조직하는 것으로 수학적 사고와 관련된 정신 활동이라 하였다. 2015 개정 수학과 교육과정에서는 추론을 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력으로 정의하면서, 관찰과 추측, 논리적 절차 수행, 수학적 사실 분석, 정당화, 추론 과정의 반성을 하위 요소로 제시하였다. 위의 여러 가지 정의를 종합하여 본 연구는 추론을 체계적인 틀을 가지고 수학적 사실을 추측하거나 근거를 찾거나 결론을 도출하는 사고로 정의한다. 체계적인 틀에 따라 추론의 유형을 구분 지을 수 있으며, 추론의 과정 또한 살펴볼 수 있다.

추론을 생각하면 대부분 증명을 떠올리기 마련이지만 추론의 정의와 유형을 살펴볼 때 추론은 수학을 하는 모든 과정의 시작이라고 볼 수 있다. 증명이 수학적 추론의 핵심적인 유형이기

는 하지만 추론 자체와 동일시될 수 없으며 수학적 추론은 증명을 포함한 광의의 의미로 해석되어야 한다(강윤수, 김민주, 2013). 추론의 유형은 학자들마다 다르게 분류되는데, Reid & Knipping (2010)는 확실성의 유무에 따라, Polya(1954)는 논증적 추론과 개연적 추론, Smith & Henderson (1959)은 연역과 귀납으로 분류하였다. 한편 Peirce는 추론을 논증적 추론으로서의 연역, 개연적 추론으로서의 귀납과 가추의 총 세 가지 유형으로 구분한다. 이러한 추론은 사례, 규칙, 결과의 조합 순서에 따라 분류되는데, 여기서 '사례'는 주어진 조건을 만족하며 관찰된 것이고, '규칙'은 어떤 조건이 일어나면 또 다른 조건이 발생한다는 일반적인 명제로 수학에서 정의, 정리, 공리 등을 포함한다. '결과'는 규칙에 의해 관찰된 또 다른 특정한 관찰을 말한다.

Peirce는 연역, 귀납, 가추를 정언적 삼단논법의 형식으로 구별하여 다음과 같이 표현하였는데, 사례, 규칙, 결과의 예를 여기서 살펴볼 수 있다(CP 2.623).

<연역>
규칙: 이 주머니에 들어있는 콩은 모두 하얗다.
사례: 이 콩들은 이 주머니에서 나왔다.
결과: 이 콩들은 하얗다.

<귀납>
사례: 이 콩들은 이 주머니에서 나왔다.
결과: 이 콩들은 하얐다.
규칙: 이 주머니에 들어있는 콩은 모두 하얗다.

<가추>
규칙: 이 주머니에 들어있는 콩은 모두 하얗다.
결과: 이 콩들은 하얗다.
사례: 이 콩들은 이 주머니에서 나왔다.

연역은 일반적인 원리를 전제로 보다 특수한 다른 원리를 이끌어 내는 것이므로 규칙과 사례를 통해 결과를 나타내고, 귀납은 개별적이고 특수한 사실이나 원리로부터 일반적이고 보편적인 명제 및 법칙을 유도하는 것이므로 사례와 결과를 통해 규칙을 찾아내며, 가추는 주어진 자료를 탐색하여 새로운 아이디어를 도입하여 가설을 제안하는 것이므로 결과와 규칙으로 사례를 추측한다.

연역은 형식적인 체계 속에서 정의, 공리, 정리들을 이용하여 규칙을 따라 결론을 이끌어 내는 엄밀한 증명으로 사실을 언급하는 데 사용된다(김선희, 이종희, 2002). 개연적 추론 중 가장 대표적인 귀납은 관찰된 개개의 사례를 총괄하여 그들 사례의 규정이 필연적으로 거기에서 도출될 수 있는 그 일반적 주장인 판단을 확립하는 추론 즉, 특수한 사실로부터 일반적 진리를 이끌어 내는 추론이다(박교식, 1991; 김선희 외 2002, 재인용). 가추는 관찰된 사실에 주목하고, 그 다음에 어떤 규칙이 떠오르게 해서 그 관찰된 사실의 기원을 설명할 수 있게 된다(김선희, 이종희, 2002).

Polya는 수학 교과에서 추론 지도의 필요성을 언급하면서 개연적 추론으로서 귀납을 생각하였으나(김선희, 2004), 귀납만으로 개연적 추론을 모두 나타내기는 어렵다. 새로운 문제가 제시되었을 때 불현듯 떠오르는 무언가, 짐작, 추측은 분명 귀납이 아니다. 그러므로 개연적 추론 내에는 여러 사실들의 관찰을 통해 결론을 도출하는 귀납뿐만 아니라 규칙과 결과로부터 사례에 대한 가설을 세워 새로운 지식이나 정보를 알아낼 수 있는 가추가 사용되기도 한다(김선희, 이종희, 2002). 연역적인 증명을 본격적으로 다루기 시작하는 고등학교 이후의 수학에서는 기본적인 성질을 전제로 한 타당한 추론 양식에 대한 분명한 인식과 더불어 수학적 사실을 발견하고 창조하는 능력과 연결되는 개연적 추론 양식이 중요하게 다루어져야 한다(김남희, 2002).

그러나 개연적 추론의 유형 중 가추에 대한

학계나 교육 정책의 인지도는 낮은 편이다. 2015 개정 교육과정에서 추론 능력을 함양하기 위한 교수・학습에서도 개연적 추론에 귀납과 유추가 제시되어 있을 뿐 가추는 제대로 다루고 있지 않다. 가추는 설명력 있는 가설을 형성해 가면서, 새로운 사실을 도입해내는 논리적인 작용이다(김선희, 이종희, 2002). 가추를 통해 인간은 기호로 만들어진 세상에 대해 본능적으로 또는 직감적으로 추측하고 이해하고 지식과 정보를 확장한다(이두원, 1997). 학생들은 수학 문제를 해결하고자 할 때 문제를 해결할 정의나 정리, 성질을 직감적으로 추측한다. 이러한 문제를 해결하고자 시작하는 부분이 바로 가추라 하겠다.

이윤경(2016)은 가추의 특징을 다음과 같이 기술하고 있다. 첫째, 가추는 관찰의 단계에서 설명의 단계로 가는 추론이다. 취약한 논증 형식처럼 보일 수도 있는 발견의 논리를 거치지 않고서는 참신하고 대담한 이론이 발견될 수 없다. 가설을 발견한 학생들은 타당한 추론과 검증의 과정을 거쳐 자신의 가설을 입증하고자 할 것이기 때문이다. 둘째, 가추는 추측의 논리이고 발견의 논리이자 우연의 논리이다. Peirce는 새로운 가설은 섬광 같은 통찰이 떠오르는 순간에 발견된다고 하였다. 이렇게 가설을 발견하는 추론에는 추측(conjecture), 짐작(guessing), 상상(imagination) 같은 능력이 요구된다. 셋째, 가추는 과학의 창조성을 설명하는 논리이다. Peirce는 뉴턴이나 아인슈타인의 우연한 과학적 발견에도 논리가 있다고 보고 우연과 결정을 매개하는 논리를 찾고자 하였다. 넷째, 가추는 새로운 이론을 발견하는 추론이다. Peirce는 가추가 수많은 사실들에 대해 검토하고 이런 사실들이 하나의 이론을 제시하게 하는 논증 단계라고 정의하였다. 이러한 가추의 특징을 볼 때 학생들의 가추 활동이 증가되면 관찰의 단계에서 설명의 단계로 가는 과정에서 의사소통 능력이 길러지고, 추측과 발견을 통해 문제해결 능력과 추론 능력이 길러질 수 있으며, 과학의 창조성을 설명하는 논리로서 창의・융합 능력도 향상될 것이다.

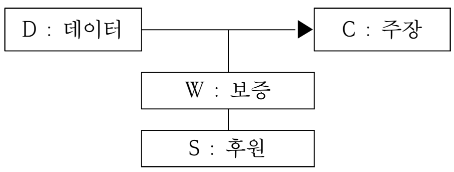
3. Toulmin의 논증 모델

연역, 귀납, 가추의 기본적인 추론 유형은 탐구의 과정 내에서 수행된다(Liszka, 2013). 탐구는 가추, 연역, 귀납의 상호적 관계가 지속하는 순환 과정이며, 이러한 과정이 무한하게 지속될 경우 연구 주제의 진리로 수렴될 것이다. 가추는 가설을 형성하는 일에 관여하고, 연역은 그러한 가설로부터 필요한 결과를 이끌어내는 것에 관여하며, 귀납은 그러한 결과가 실제로 일어날 것인지를 한정하는 일을 한다. 즉, 추론의 과정은 여러 추론 유형이 상호 연관되고 서로 선회하면서 그러한 노력이 결국 가장 좋은 결과물을 낼 수 있는 지점에 도달하게 된다. 학생들의 추론 과정이 어떤 특징을 갖는지 알기 위해서는 수업 담화에서 나타난 학생들의 사고에 대한 발문의 추론 구조를 이해해야 한다. 이에 본 연구는 Toulmin의 논증 모델을 이용하여 그 추론 과정이 어떠한지 확인하고자 한다.

Toulmin의 모델로 학생의 수학적 주장에 관한 도식을 구성할 수 있다(Toulmin, 1958). 모델을 통해 구조적 관점에서 논증과 증명을 분석하고 비교하는 것이 가능하다(Pedemonte, 2007). 연역적인 주장만이 아니라 일반적으로 주장을 분석하는 데 사용이 가능하고, 논증의 구조와 증명의 구조를 비교할 수 있는 것이다. Toulmin의 모델은 세 가지 요소로 이뤄진다(Toulmin, 1958):

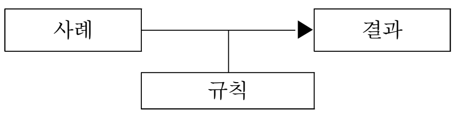
주장(Claim): 화자의 설명
데이터(Data): 주장 C를 증명하는 자료
보증(Warrant): 데이터가 주장으로 연결되도록 허락하는 추론 규칙

주장이 표현되면 이 주장을 뒷받침하는 데이터의 생산이 이뤄지고, 보증이 데이터의 사용에 관한 정당성을 제공한다. 보증은 데이터와 주장을 연결시키는 역할을 한다. 즉, 원리나 규칙을 통해 표현되는 보증이 자료와 주장을 이어주는 것이다. 그리고 주장을 기술하는 데 있어 후원(backing)과 같이 보조적인 요소가 필요할 수도 있다(Toulmin, 1958).



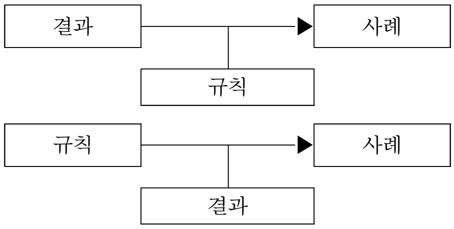
[그림 II-1] 논증에 관한 Toulmin의 모델

Toulmin의 모델은 Peirce의 추론 유형을 시각적으로 나타내는 데 적합하다(Pease & Aberdein, 2011). Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco(2014)는 연역, 귀납, 가추를 Toulmin의 모델에 적용시켜 [그림 II-2]와 같이 나타내었다. 연역은 사례와 규칙에서 시작하여 결과를 구성한다. 귀납은 결과와 사례에서 규칙을 찾는다. 가추는 결과와 규칙에서 사례를 구성하며 2가지로 나타낼 수 있다. 본 연구에서는 학생들의 추론 유형과 과정을 분석할 때 [그림 II-2]를 활용할 것이다.



〈연역〉

〈귀납〉



<가추>

[그림 II-2] Toulmin의 논증 모델에 따른 추론 유형 (Connor et al., 2014, p.186)

III. 연구 방법

1. 연구 참여자

본 연구를 위하여 두 명의 중학교 3학년 학생을 연구 참여자로 선정하였다. 이들은 농・산촌형 벽지 지역에 소재한 공립 중학교 3학년이고 연구자 중 한 명이 지도하고 있는 학생들이다. 두 명 모두 학교 수학 지필고사 성적이 높고 수학동아리 부원으로 수학 활동에 적극적이다. 두 명의 연구 참여자는 학생 L, 학생 K 등과 같은 가명을 사용하였다.

학생 L은 어릴 때부터 수학에 대한 흥미가 높고, 특히 수학에 대한 자신감과 과제집착력이 높아서 주어진 문제를 끝까지 해결하려고 노력하는 남학생이다. 수업 시간에 제시된 문제에 대하여 교과서의 풀이가 아닌 창의적인 풀이법을 제시하거나 수학적이지는 않지만 문제에서 공통되는 규칙을 찾아 답하는 경우가 종종 있다. 또한 수학에 대한 궁금증이 많아 수업시간에 질문이 많은 편이다. 대부분의 학생이 다른 분야를 통합하여 설명하는 경우 어렵고 힘들어하는 반면 이 학생은 새로운 시선으로 문제를 풀어내는 것에 흥미를 느끼고 이를 즐기는 모습을 보인다. 앞으로 수학을 전공하여 교수가 되고 싶다는 장래희망을 갖고 있다.

학생 K는 수학에 흥미가 높고, 수학동아리, 방과후학교 수학탐구반 등 수학과 관련된 활동에 적극 참여하는 여학생이다. 특히 학교의 파이데이 행사에서 원주율 π의 근삿값을 외우는 대회에서 반복되지도 않고 규칙도 없는 220자리를 스토리를 만들어 외웠다. 소그룹으로 문제를 해결할 때 친구들을 주도하여 문제를 해결하고 이를 잘 정리하여 발표하는 모습을 보이는 학생이다.

연구자는 이들에게 연구 목적과 연구에서 수집된 자료는 논문 작성에만 사용됨을 설명하고 참여 여부를 물었고 두 학생 모두 이에 동의하였다.

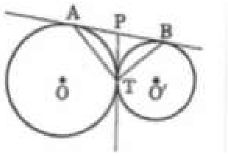
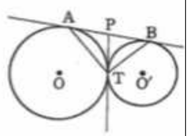
2. 과제

본 연구는 [그림 III-1]과 같이 원의 성질에서 학생들이 많이 접하는 선택형 문제와 선택형 문제의 술어 부분에 변화를 준 개방형 문제를 학생들에게 제시하였다. 두 문제의 내용을 동일하게 하여 문제 내용에 따른 추론의 변화를 통제하였다.

3. 자료 수집 및 분석 방법

학생들의 기억 효과를 지우기 위해 자료 수집은 두 차례에 걸쳐 이루어졌다. 첫 실험은 정규 수업이 끝난 후 연구 참여자 두 명과 연구자가 별도로 만나 진행하였다. 연구 참여자들에게 개방형 문제를 제시하고 스스로 생각한 것을 말하며 5분 정도 혼자 푸는 시간을 갖게 한 후 연구 참여자들이 서로 자신의 추론 과정을 이야기하여 문제를 해결하도록 하였다. 문제 해결 과정을 기록하기 위해 비디오, 오디오 기법을 활용하였으며, 이 과정에서 수집된 자료와 학생이 활동한 학습지를 바탕으로, 녹취록을 작성하여 연구 참여자들의 추론 특성을 분석하는 데 활용하였다. 선택형 문제 해결 자료는 2주가 지난 후 같은 방식으로 수집하였다.

추론 유형과 과정을 살펴보기 위해 녹취록의 내용에서 학생들이 말한 부분이 어떤 추론에 근거하였는지 Toulmin의 틀에 따라 연역, 귀납, 가추로 구분하고, 유형별 추론 빈도를 측정하였다. 그리고 Toulmin의 틀을 이용하여 학생들의 추론의 연쇄 과정도 분석하였다. 학생들이 어떤 추론을 활용했는지 알아보기 위한 판단으로 연구자는 실험 사후에 학생들과 인터뷰를 통하여 학생의 발화 근거가 연구자가 분석한 내용에 맞는지 확인하였다.

<table>
<tr><th>개방형 문제</th><th>선택형 문제</th></tr>
<tr><td>아래 그림과 같이 직선 AB가 점 T에서 서로 외접하는 두 원 O, O′의 공통인 접선이다. 이 조건으로 찾을 수 있는 성질을 모두 찾아라.

</td><td>오른쪽 그림과 같이 직선 AB가 점 T에서 서로 외접하는 두 원 O, O′의 공통인 접선일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?


① $\overline{PA}=\overline{PB}$
② $\overline{PT}=\frac{1}{2}\overline{AB}$
③ $\angle PAT=\angle PTA$
④ $\angle ATB=90°$
⑤ $\angle PBT=60°$</td></tr>
</table>

[그림 III-1] 학생들이 푼 문제

IV. 연구결과

1. 개방형과 선택형 문제 해결에 나타난 추론 유형

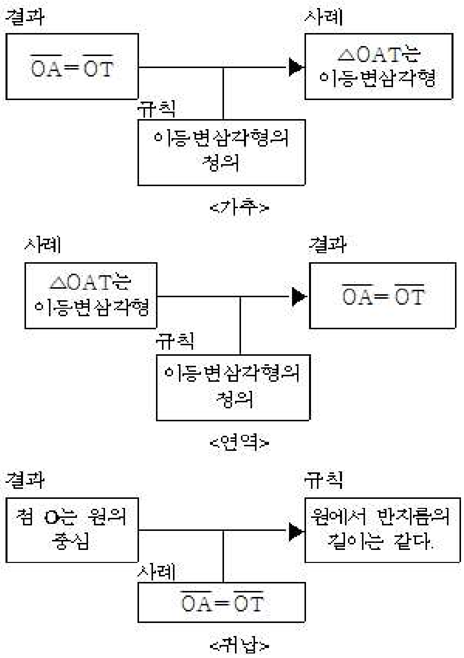
먼저, 개방형 문제 해결에서 학생들의 추론을 살펴본다. 개방형 문제 해결에서 학생들은 여러 가지 추측을 제시하였는데, $\triangle OAT$와 $\triangle O'BT$가 이등변삼각형, $\overline{OA} // \overline{O'B}$, $\angle AOT + \angle APT = 180^\circ$, $\angle ATB = 90^\circ$, $\overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 = \overline{AB}^2$ 등이다. 물론 이 사실을 발견하기까지 부수적으로 발견한 사실들도 있다. 이 다섯 가지를 발견하는 데 학생들이 활용한 추론의 유형을 정리해보면 다음과 같다.

먼저 $\triangle OAT$가 이등변삼각형임을 알아낸 에피소드에서 어떤 추론이 나타났는지 알아본다. 학생들은 문제의 그림을 보자마자 원의 중심 O와 점 A, B, T를 연결하였고 $\triangle OAT$는 이등변삼각형이라고 했다. 이 가추가 옳음을 보이고자 연역과 귀납 각각의 방법으로 정당화를 시도하였다.

<에피소드1: $\triangle OAT$이 이등변삼각형임을 추측>

2. 학생L: 이등변삼각형인 거 **[가추]**
3. 연구자: 이등변삼각형이 나왔어요? 어떤 게 이등변삼각형이에요?
4. 학생L: 삼각형 AOT
5. 학생K: 여기서 우리가 알 수 있는 건?
6. 학생L: 선분 OA랑 OT랑 같아. **[연역]**
7. 연구자: 왜요?
8. 학생L: 반지름이니까요. **[귀납]**

에피소드 1에서 나타난 추론 유형을 보면, 학생 L은 $\overline{OA} = \overline{OT}$를 보고 이등변삼각형의 정의에 의해 $\triangle OAT$는 이등변삼각형이라는 것을 가추해낸다. 그리고 그로부터 알 수 있는 것이 무엇인지에 대한 학생 K의 질문에 학생 L은 이등변삼각형의 정의에 의해 $\overline{OA} = \overline{OT}$임을 연역하고, 그 이유를 묻자 점 O가 원의 중심이고 $\overline{OA} = \overline{OT}$이므로 원에서 반지름의 길이는 같다는 것을 귀납한다. 이를 Toulmin의 틀에 따라 정리하면 [그림 IV-1]과 같다. 하나의 사실을 발견해나가는 학생들의 짧은 발화에서도 다양한 추론 유형이 등장했음을 볼 수 있다.



[그림 IV-1] 에피소드1에 나타난 추론 유형

에피소드1 이후 학생들은 원 O'에서도 동일한 방법으로 $\overline{O'B} = \overline{O'T}$, $\triangle O'BT$는 이등변삼각형임을 추론하였다.

다음으로, 학생들이 원의 반지름($\overline{OA}$, $\overline{O'B}$)과 원의 접선($\overline{AB}$)이 수직으로 만난다는 성질을 통해 $\overline{OA} // \overline{O'B}$를 찾아낸 에피소드를 살펴본다.

<에피소드2: $\overline{OA} // \overline{O'B}$을 추측>

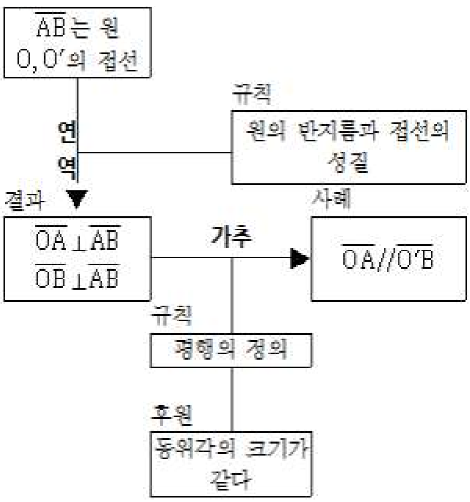
14. 학생L: 선분 AO와 BO'는 평행하다. **[가추]**
15. 연구자: 왜? 왜 평행해요?
16. 학생K: 여기 AO가 반지름인데 이것은 접선

AB와 수직이고, BO′도 반지름으로 접선과 수직이라서요. **[연역]**

17. 연구자: 어? 그래서요? 평행하다는 것은 무엇을 보여야 하죠?
18. 학생L: 엇각? 엇각이 같음을 보이면 되요. **[연역]**
19. 학생K: 동위각이 같아요.(그림에 각을 표시하며.. 여기, 여기) 그래서 평행해요. **[귀납]**

학생L: (끄덕거림)

가추에 의해 $\overline{OA}//\overline{O'B}$라고 말한 학생에게 연구자는 왜 평행하냐고 물었고 학생 K는 동일한 접선 AB에 두 반지름이 모두 수직으로 만남을 연역하였다. 이에 연구자는 평행의 조건을 직접적으로 말하라고 요구하였고, 학생 L은 연역에 의해 엇각이 같다고 대답하고, 학생 K는 그림에서 엇각이 아닌 동위각이 같음을 귀납적으로 발견하여 설명하였고 학생 L도 이에 동의하였다. 에피소드2에 나타난 학생들의 추론에서 발췌문 14~19를 연쇄적으로 나타내면 [그림 IV-2]와 같다.



[그림 IV-2] 에피소드2에 나타난 추론 유형

[그림 IV-1]에서 유형을 각각 제시한 것과 달리 [그림 IV-2][1]는 추론의 연쇄 과정을 보여주기 위해 두 가지 추론의 연쇄 과정을 함께 제시하였다. 즉 $\overline{OA} \perp \overline{AB}$, $\overline{O'B} \perp \overline{AB}$라는 결과에 의해 $\overline{OA}//\overline{O'B}$ 성질을 발견하는 가추를 하였고, $\overline{OA} \perp \overline{AB}$, $\overline{O'B} \perp \overline{AB}$라는 결과는 $\overline{AB}$가 원 O, O′의 접선이라는 결과를 보고 원의 반지름과 접선의 성질에 의해 연역해낸 결과이다.

위와 같은 과정에 따라 개방형 문제 해결에서 나타난 학생들의 추론 유형 빈도를 <표 IV-1>과 같이 정리하였다. 연역, 귀납, 가추가 모두 등장하였고, 연역, 가추, 귀납의 순서로 빈도가 높았다.

<표 IV-1> 개방형 문제 해결에서 나타난 추론 유형별 빈도

추측된 내용	연역	귀납	가추
△OAT가 이등변삼각형	1	1	1
$\overline{OA}//\overline{O'B}$	2	1	1
$\angle AOT + \angle APT = 180^\circ$	1		1
$\angle ATB = 90^\circ$ $\overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 = \overline{AB}^2$	4		1

다음으로 선택형 문제 해결에 나타난 추론 유형을 살펴본다. 학생 K가 주로 발화했으며 학생 L은 옆에서 동의하는 제스처만 취하였다. 개방형 문제해결과 달리 선택형 문제의 주어진 답지는 학생 K의 추론의 출발점이 되었다. 학생 K는 주어진 ①~⑤의 내용을 차례대로 확인하며 문제를 해결하였는데, 쉬운 내용이 제시된 답지의 참, 거짓을 판별한 후 ①~④가 모두 옳은 내용이므로 나머지 ⑤는 참, 거짓을 판별하지 않고 답이라고 썼다.

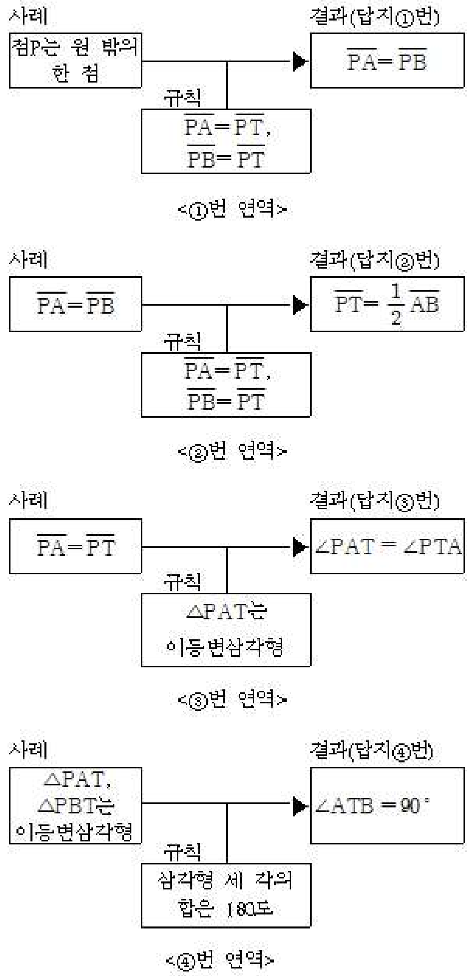
1) 추론의 흐름은 위에서 아래로, 왼쪽에서 오른쪽으로 진행된다.

<에피소드3: 선택형 문제의 답지 해결 추론>

54. (학생K가 ①부터 차례대로 확인하며 참, 거짓을 확인하고 있다.)
55. 연구자: 선생님한테 어떻게 풀었는지 설명해주세요.
56. 학생K: (①의 제시문을 그림에서 확인하며) 여기 AP길이랑 PT길이가 같고..
57. 연구자: 왜 같아요?
58. 학생K: 원 밖에 한 점에서 접선을 그었을 때 한 점과 접점까지의 길이가 같기 때문에.
59. 학생K: 그다음에 AP랑 PT랑 같고 PT랑 PB랑 같으니까 AP=BP라서 ①번 맞아요. **[연역]**
    AB는 PT의 두 배라서 ②번도 맞아요. **[연역]**
    그리고 PA=PT이니까 이등변삼각형이라서 $\angle PAT = \angle PTA$예요(③). **[연역]**
    $\angle PAT = \angle PTA = a$, $\angle PBT = \angle PTB = b$라 하면 네 개 다 더하면 180도이므로 $a+b=90$이라서 ④번도 맞아요. **[연역]**
    그래서 답은 ⑤번은 틀렸어요.
60. 연구자: ⑤번은 왜 틀렸어요?
61. 학생K: 나머지가 다 맞았으니까..(웃으며..) 60도라는 조건이 없어서?

개방형 문제에서는 제시된 성질이 없어 학생들이 창조적으로 성질을 추측하고 이를 정당화하는 추론 유형을 보였으나 선택형 문제에서 학생의 추론 유형은 한정적이었다. 학생들의 발화는 모두 주어진 답지의 성질을 보고 그 성질이 맞는지 확인하는 연역 추론만 나타났다. 선택형 문제 해결에 나타난 학생들의 추론 유형을 정리하면 [그림 IV-3]과 같다.

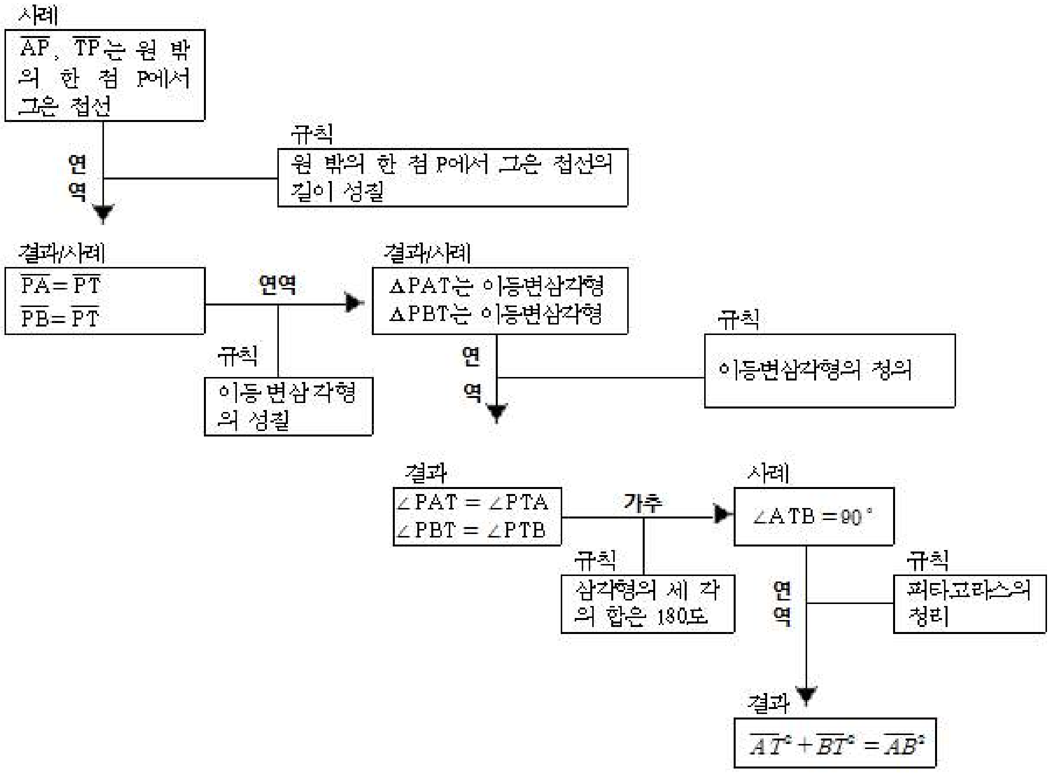
원의 성질이라는 동일한 내용에 대해 개방형 문제와 선택형 문제 해결에서 학생들이 보인 추론의 유형은 달랐다. 개방형 문제에서는 연역, 귀납, 가추가 다양하게 등장하였고, 특히 가추가 많이 나타났다. 하지만 선택형 문제 해결에서는 답지마다 참, 거짓을 판단하기 위한 연역 추론만 사용되었을 뿐이다.



[그림 IV-3] 선택형 문제 해결에 나타난 추론 유형

2. 개방형과 선택형 문제 해결의 추론 과정

개방형 문제 해결에서 학생들의 추론은 꼬리에 꼬리를 물고 계속 확장되는 연쇄적 모습을 보였다. 추론 과정 중 오류가 발생하더라도 그것을 반성적으로 보면서 추론을 이어갔다. 예를 들어, $\overline{AP}$, $\overline{TP}$가 원 밖의 한 점 P에서 그은 접선이라는 사례에 대한 관찰로부터 시작하여



[그림 IV-4] 개방형 문제 해결에 나타난 추론의 과정 일부

$\angle ATB=90^\circ$임을 가추하고 이를 기반으로 $\overline{AT}^2+\overline{BT}^2=\overline{AB}^2$임을 연역해낸 과정을 나타내면 [그림 IV-4]2)와 같다. 학생들은 연역에 의해 도출한 사실에 근거하여 새로운 수학적 사실을 계속 연역해 나갔고 가추에 의해 $\angle ATB=90^\circ$임을 알아내기도 했으며 이에 따라 $\overline{AT}^2+\overline{BT}^2=\overline{AB}^2$를 연역하였다. 이 추론 과정이 하나의 에피소드를 형성하며 단절되지 않고 서로 이어진 연쇄가 되었다. 학생들이 $\angle ATB=90^\circ$를 가추하고 이를 정당화하는 과정에서 생긴 오류를 수정하는 과정은 에피소드 4와 같다. 발췌문 43번에서 학생들은 각 APT가 90도라고 추론하면서 사각형 AOTP가 정사각형이라고 결론을 내렸다가 무언가 잘못되었다고 생각한다. 이때 학생들이 오류를 스스로 찾도록 기다리다가 연구자는 학생들이 추론한 것을 순서대로 짚어주고 학생들은 자신들의 추론을 되돌아보고 잘못된 부분을 찾아내 처음에 가추한 $\angle ATB=90^\circ$를 찾아내었다. 여기서 학생들의 추론은 꼬리에 꼬리를 물고 계속 확장되는 연쇄적 모습을 보였고 오류가 발생했을 때 반성적 사고를 하며 추론을 이어간 것을 확인할 수 있다.

2) 추론의 연쇄에서 주장(claim)이 자료가 되기도 하므로, 왼쪽에는 주장, 오른쪽에는 자료를 써서 '결과/사례'라고 나타내었고, 주장과 자료가 동일할 때는 '/' 없이 썼다. 그리고 [그림 IV-4]에서는 학생들이 보인 오류는 생략하고 오류를 수정한 옳은 추론의 과정만 제시하였다.

<에피소드4 : 추론 중 오류 수정 과정>

25. 학생L: $\angle \mathrm{ATB}=90^{\circ}$

(중략)

34. 연구자 : 이제 왜 $\angle \mathrm{ATB}=90^{\circ}$ 인지 다시 생각해볼까요?
35. 학생L : 아~맞다~~
36. 학생L : 아! 삼각형ATP는 우선 이등변삼각형이에요. 삼각형BTP도 이등변삼각형
37. 연구자 : 아 그거 찾았군요. 왜 그렇죠?
38. 학생L : 원 밖에 한 점 p에서 접선을 그으면 그 길이가 같아서. PA랑 PT랑 길이가 같아요.
39. 학생K : 그럼 두 밑각이 같으니까 각 PAT랑 PTA랑 같아요..
40. 연구자 : 그럼 여기(각 PAT) 세모, 저기(각 PTA) 세모(각에 표시하며)
41. 학생L : 어?!
42. 학생K : 아! 그럼 여기도 세모..(각 PTB와 각 PBT를 가리키며)
43. 학생L: (각의 크기를 세모라고 표시한 후) 그럼 4×세모는 180도. 따라서 세모는 45도. 따라서 각 ATB는 90도. 어? 그럼 각 APT가 90도??(말도 안 된다는 표정으로...)
44. 학생K: 90도? 90도처럼 안 생겼는데..
45. 학생L: 여기가(각 OAP) 90도인데? 그럼 AOTP가 정사각형이구나?
46. 연구자: 정사각형? 뭔가 오류가 있는 것 같은데? (두 학생은 한참 고민한다..)
    자! 여기까지 찾았어요. 원 밖에 한 점이 있어요. 그 점에서 접선을 그었어요. 그리고 그 길이가 같아요. 그래서 이등변 삼각형이 되었고 두 밑각이 같아요. 그랬더니 여러분이 그럼 여기도 세모.. (각 PTB와 각 PBT를 가리키며)라고 했어요. 자~! 여기부터 다시 생각해 봅시다.
    (한참 기다렸다가... 각 PTB와 각 PBT를 가르키며) 왜 여기도 세모, 세모일까요?
    이등변삼각형의 옆 변의 길이가 같으면 두 밑각도 같나요?
47. 학생L: 아니! 아니에요. 어? 누가 그랬지? 하하하
48. 연구자: 그럼 어떻게 해야 할까요? 각 PAT랑 PTA랑 세모로 표시했다면, 각 PTB와 각 PBT는 다른 모양으로 표시하면 되겠죠.
49. 학생K: 아.
50. 학생L: 아, 그럼 각 ATB는 90도이지만 각 PTA가 45도는 아니다.
52. 연구자 : 그렇죠. 각 PTA가 45도가 아닌 것은 찾았어요. 이제 원래 하고자 했던 $\angle \mathrm{ATB}=90^{\circ}$ 를 찾아볼까요?
53. 학생L : 큰 삼각형 ATB에서 $\angle PAT=\angle PTA=a$, $\angle PBT=\angle PTB=b$라 하면 네 개 다 더하면 180도이므로 $a+b=90$이기 때문에. 성립. 아! 그럼 피타고라스도 성립해요. $\overline{AT}^2+\overline{BT}^2=\overline{AB}^2$예요.
54. 연구자 :그렇죠.. 또 다른 성질도 찾았네요.

반면 선택형 문제에서는 [그림 IV-3]에서 보이듯 주어진 제시문이 참인지 거짓인지 판단하기 위한 연역만 단절되어 이루어졌고 그 이후의 어떤 추론 과정도 존재하지 않았다. 이로써 학생들의 사고가 확장되지 못함을 알 수 있다.

3. 개방형 문제 해결에서 추론을 증진시키기 위한 교사의 역할

학생들에게 익숙한 선택형 문제의 술어 부분만 바꾸어 개방형 문제를 학생들에게 제시하였더니 학생들의 추론의 유형이나 과정이 더욱 풍성해졌다. 개방형 문제를 맞닥뜨린 학생들은 처음에는 문제 해결에 어려움을 겪었다. 평소에 구조화된 문제, 폐쇄형 문제를 자주 접해 왔기 때문에 문제 해결의 목표가 정해져 있지 않은 문제에서 주어진 조건으로부터 어떤 방향으로 나아가야 하는지 우왕좌왕하였다. 발견할 수 있는 수학적 사실이 몇 개나 있는지 알 수 없기에 추론을 그만두어야 할지 계속 해야 할지 모르는 것이다. 교사는 이런 상황에 개입하였다. 학생들은 원 안의 성질을 몇 개 추론하고 문제의 해답을 다 찾은 것처럼 마무리하는 마음으로 앉아있었다. 이때 발췌문 20에서 성질을 더 찾아보라는

교사의 발문에 두 학생 모두 의아한 표정을 지었다. 그러나 발췌문 22처럼 교사가 주어진 그림을 해석하는 다른 시선을 제공하는 안내를 하자 학생들은 원 밖의 성질에도 관심을 갖기 시작했다. 학생 L은 $\angle ATB = 90^{\circ}$를 가추 하더니 그 이유를 묻자 이유를 설명하기 전 $\angle AOT + \angle APT = 180^{\circ}$라는 성질까지 가추 하였다.

여기서 우리는 개방형 문제 해결에서 교사의 역할을 생각해볼 수 있다. 개방형 문제는 목표가 보이지 않기 때문에 학생들이 결과를 예측하기 어렵고 중도에 포기하기 쉽다. 이런 경우 학생들이 다양한 추론을 할 수 있도록 교사는 격려의 역할을 할 수 있다. 이미 발견한 것에 머물지 말고 계속 정진하고 더 탐구하도록 격려해야 하는 것이다. 학생들끼리의 상호작용에서는 이런 역할을 스스로 수행하기가 쉽지 않기 때문에 교사에게 필요한 역할이다.

그리고 교사는 정당화를 요구하는 촉진의 역할을 하였다. <에피소드5>의 발췌문 26, 28, 30에서 교사는 학생이 자신이 가추한 성질에 대해 정당화하는 과정을 거치도록 가추한 이유를 계속 묻고 있다. 개방형 문제 해결에서 학생들은 연역뿐 아니라 가추, 귀납의 개연적 추론을 활용하기 때문에 자신의 추론 결과가 옳은지 점검하고 나아가야 한다. '왜?'라는 질문이 필수적인데, 개방형 문제 해결에 낯선 학생들에게 이런 추론의 촉진을 외적으로라도 부여해야 한다.

<에피소드5: 다양한 성질을 추론하도록 촉진하는 교사의 역할 >

20. 연구자: 맞아요. 또?
21. 학생L: 또? (또 있냐는 듯이..)
22. 연구자: 지금 여러분은 원 안만 확인하고 있어요. 원 밖의 점에 주목해보세요.
23. 학생L: 음..
24. 학생K: 어려워요...
25. 학생L: $\angle ATB = 90^{\circ}$
26. 연구자: 왜 90도인가요?
27. 학생L: 음..
28. 연구자: 느낌?
29. 학생L: 아니에요.. 맞아요!
30. 연구자: 왜요?
31. 학생L: 아! $\angle AOT + \angle APT = 180^{\circ}$에요.

또한 교사는 오류를 발견하도록 안내하는 역할을 할 수 있다. <에피소드4>의 발췌문 43-50에서 두 학생은 $\angle ATB = 90^{\circ}$를 가추해내고 이를 설명할 때 삼각형 ATP와 삼각형 BTP가 이등변삼각형이라는 것을 연역하면서 이등변삼각형의 정의인 두 밑각이 같다는 규칙에 따라 $\angle PAT = \angle PTA$와 $\angle PBT = \angle PTB$를 찾아내었다. 하지만 이 네 각이 모두 같다는 잘못된 가추를 한다. 그리고 사각형 AOTP가 정사각형이 된다는 결론을 내면서 자신들의 생각에 오류가 있다는 것을 발견한다. 이에 교사는 발췌문 46에서 학생들의 추론 과정 전체를 돌아보게 하였고 학생 스스로 오류를 찾고 다시 $\angle ATB = 90^{\circ}$가 참이 되는 이유를 연역하도록 하였다.

위의 사례에서 보듯이 개방형 문제 해결을 진행하는 데 있어 교사는 격려, 촉진, 안내의 역할을 하였다. 두 학생이 함께 참여한 문제 해결이므로, 학생 상호 간에 이러한 역할을 맡는 것이 더 바람직하지만 개방형 문제에 낯선 학생들에게는 이러한 역할이 무리이므로 교사가 그 역할을 담당하였다. 하지만 학생들이 개방형 문제 해결에 익숙해지고 교수학적 상황에서 비교수학적 상황으로 전이된다면 교사의 역할은 학생들에게 양도되는 것이 바람직할 것이다(Brousseau, 1997).

V. 결론 및 제언

본 연구는 개방형 문제와 선택형 문제에서 나타난 학생들의 추론을 유형과 과정 측면에서 비

교하였다. 개방형 문제 해결에서는 다양한 추론 유형이 등장하였고 연역이 8번, 가추가 4번, 귀납이 2번 나왔다. 문제의 내용이 원의 성질에 대한 기하 영역이므로 추론의 유형에서 연역이 많이 등장했을 수 있다. 하지만 선택형 문제 해결에서는 답지의 내용이 참인지 거짓인지 판별하기 위한 연역만 등장한 것과 비교하여 볼 때, 동일한 내용이더라도 과제 유형에 따라 학생들에게 요구되는 추론의 내용과 유형이 달라짐을 본 연구를 통해 확인할 수 있었다.

그리고 본 연구의 사례에서 개방형과 선택형 문제에 대한 학생의 추론 과정은 큰 차이를 보였다. 개방형 문제 해결에서 [그림 IV-4]의 추론 과정에서 알 수 있듯이 학생들의 추론은 스스로 찾아낸 성질을 바탕으로 하여 다른 성질을 찾아내며 추론에 따른 주장이 다른 추론의 데이터가 되는 과정이 연쇄적으로 일어났으며 <에피소드 4>에서 오류를 수정하기 위해 학생들은 자신의 사고 과정을 돌아보았다. 그러나 선택형 문제 해결에서 학생들은 답지 4개의 내용을 각각 추론하여 연쇄적인 과정이 보이지 않았고, 나머지가 참이므로 ⑤번은 틀렸다며 정답이라고 하였다. 이처럼 선택형 문제와 개방형 문제의 추론과정을 비교해볼 때 반성적 사고를 유도하고 자신의 사고 과정을 돌아보면서 새로운 추론을 시작하도록 하는 반영적 추상화가 이루어지기에는 선택형 문제보다 개방형 문제가 더 도움이 될 것이다.

교사는 학생들의 추론 능력을 향상시키기 위해 정형화된 문제에서 탈피하여 학생들이 다양한 사고를 할 수 있도록 개방형 문제를 제시할 필요가 있다. 이러한 개방형 문제 해결에 학생들이 참여하는 것은 추론이나 여러 측면에서도 중요하므로 본 연구에서와 같이 교사는 교과서나 참고서의 선택형 문제를 변형하여 개방형 문제로 바꾸어 제시하는 것이 학생들의 추론 교육에 더 바람직할 것이다. 또한 학생들이 개방형 문제를 해결할 때 교사의 적절한 역할이 필요하다. 학생들에게 다소 낯선 개방형 문제 해결에서 교사는 계속 도전하게 하는 격려, 정당화를 요구하는 촉진, 오류를 발견하게 하는 안내의 역할을 담당할 수 있다. 하지만 이러한 역할은 점차 학생들이 자기주도적 학습이나 협력 학습에서 모둠 내의 역할로 양도되는 것이 바람직할 것이다.

학생들은 문제 해결에 필요한 자원을 문제에 주어진 조건이나 평가 문항과 관련된 단원 내용으로 제한하는 경향이 있다. 그래서 문제에 주어진 어떤 단서와 연결된 수학 개념이 있으면 그것에만 한정한다. 하지만 본 연구에서 학생들은 주어진 문제가 원의 성질임에도 불구하고 그 단원 내용에 얽매이지 않고 자신이 찾을 수 있는 성질을 모두 찾기 위해 노력하였고, 이를 통해 두 선분이 평행하다는 것과 피타고라스 정리를 찾아내었다. 즉 개방형 문제 해결을 통해 수학의 여러 개념을 연결하는 창의·융합의 내적 연결 역량까지 도모할 수 있었다.

본 연구는 학생들의 추론 유형을 연역, 귀납, 가추로 살펴보았다. 학생들의 추론 유형을 분석한 결과 귀납보다 가추가 더 많이 활용되고 있음을 관찰할 수 있었다. Pedemonte & Reid(2011)는 가추가 연역의 전 단계에서만 역할을 하는 것이 아니라 계산, 이해, 문제해결 등 다양한 유형의 문제에서 학생 스스로 수학적 사실을 추측하도록 돕는 역할을 한다고 하였는데, 본 연구를 통해 문제해결에서 학생 스스로 수학적 사실을 추측하는 데 가추가 많이 쓰인다는 것을 알 수 있었다. 하지만 가추의 주장은 결론에 타당성을 제공하기는 하지만 확실함을 제공하지는 않는다. 즉, 가추를 통해 오류가 생길 수 있다. 그러나 교사의 안내를 통해 학생들이 더욱 깊이 사고하고 참인 결론을 찾으려 노력하는 기회가 주어진다면, 학생들은 가추를 통해 문제를 해결할 새로

운 아이디어를 떠올리고 개념과 성질을 찾아냄으로써 추론 이외에도 문제해결이나 창의·융합 등의 역량도 키울 수 있을 것이다.

본 연구의 결과를 토대로 다음의 제언을 하고자 한다.

첫째, 개방형 문제를 학교 교육에서 더 많이 활용해야 한다. 본 연구에서 학생들은 개방형 문제 해결을 통해 자신들의 사고를 스스로 확장시키고 오류를 찾아 다시 옳은 방향으로 문제를 해결해 가면서 수학을 하는 즐거움을 보였다. 수학에 대한 부정적인 인식이 팽배한 현 시점에서 학생들이 개방형 문제 해결을 통해 다양한 성질들을 찾으며 수학하는 즐거움을 알아간다면 수학에 대한 정의적 영역의 성취 또한 긍정적으로 변화될 것이다. 한편 2015 개정 수학과 교육과정에서는 과정 중심 평가를 강조하고 있는데, 이에 따라 기존의 선택형 평가 문항은 학생들의 추론 활동이 활발히 진행될 수 있는 개방형 문제의 제시로 변화될 필요가 있다. 그리고 평가뿐 아니라 수업 중에도 교과서 문제의 적절한 재구성을 통해 학생들 스스로 탐구할 수 있는 개방형 문제가 제시될 필요가 있다.

둘째, 가추라는 추론 유형에 대해 교사가 미리 고려하고 수업에서 지도하려는 노력이 필요하다. 가추가 수학의 학습과 문제 해결에 중요한 역할을 할 수 있다는 견해는 새로운 것이 아니다. von Glasersfeld(1998)는 학습자의 새로운 행동을 자극하고 구성하는 데 도움을 주는 합의로 가추를 설명하면서 가추가 창의력의 원동력이라고 하였다. 의학, 과학, 범죄추리 등 다양한 분야에서도 가추를 많이 사용하고 있다. 그러나 수학에서 이를 인식하는 교사는 매우 부족한 상황이다. 이에 교사의 인식 개선이 필요하다. 교사는 학생들의 가추 활동이 얼마나 중요한지 인식해야 한다. 그리고 학생들의 가추 활동에 도움이 되도록 수업을 계획하고 학생들이 스스로 사고하도록 안내해야 한다.

참고문헌

강윤수, 김민주(2013). 문제해결 과정에서 나타난 고등학생들의 수학적 추론 특성. **학교수학, 16**(1), 241-263.

고상숙, 노지연(2007). 중학교 기하단원의 개방형 문제에서 학생의 문제해결과정의 사고 특성에 관한 연구. **학교수학, 10**(3), 303-322.

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책8].

권오남, 박정숙, 박지현, 조영미(2005). 개방형 문제 중심의 프로그램이 수학적 창의력에 미치는 효과. **수학교육, 44**(2), 307-323.

김남희(2002). GSP를 활용한 수학수업에서의 추론지도. **교육논총, 17**(1), 17-33.

김선희, 이종희(2002). 수학적 추론으로서의 가추법. **수학교육학연구 12**(2), 275-290.

김선희(2004). **수학적 지식 점유에 관한 기호학적 고찰**. 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.

김선희, 김기연(2004). 수학적 모델링 과정에 포함된 추론의 유형 및 역할 분석. **학교수학, 6**(3), 283-299.

도종훈(2007). 개방형 문제를 어떻게 만들 것인가?; 두 개의 개방형 문제 제작을 중심으로. **한국학교수학회논문집, 10**(2), 221-235.

민득자, 정영옥(1999). 열린 문제를 통한 수학과 교수 학습 방법 연구. **진주교육대학교 과학교육연구원 25**, 12월, 149-166.

박교식(1991). 수학 학습-지도 원리의 고찰(V) 귀납적 원리에 대하여. 제7회 수학교육학 세미나.

변은진, 전평국(2001). 개방형 문제를 활용한 평가가 수학적 창의력에 미치는 효과. **수학교육학술지, 11**(1), 259-277.

우정호(1998). **학교 수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판부.

이두원(1997). 찰스 퍼스의 커뮤니케이션 사상에 대한 연구-기호 세계의 속성과 논리 중심으로. 한국기호학회 엮음. **삶과 기호**(pp.432-454). 서울: 문학과 지성사.

이성범(2001). **추론의 화용론-언어와 추론-**. 한국문화사.

이윤경(2016). **고등학교 확률·통계 수업담화 분석 -Mehan의 이론, Toulmin의 논증패턴, Peirce의 가추법을 중심으로-**. 영남대학교 대학원 박사학위논문.

Liszka, J. J. (2013). **퍼스 기호학의 이해**. (이윤희 옮김). 한국외국어대학교 출판부.

Peirce, C. S. (2006). **퍼스의 기호 사상**(김성도, 편역.). 서울: 민음사.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics, Didactique des Mathématique*, 1970-1990, Kluwer Academic Publishers.

Conner, A. M., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A. & Francisco, R. T.(2014). Identifying kinds of reasoning in collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16.* 181-200.

NCTM(2000). *Principles and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Nohda, N.(1995). Teaching and evaluating using "open-ended problem" in classroom. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 27*(2), pp. 57-61.

Pease, A., Aberdein, A. (2011). Five theories of reasoning: Interconnections and applications to mathematics. *Logic and Logical Philosophy, 20*(1-2), 7-57.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational studies in mathematics, 66*(1), 23-41.

Pedemonte, B., & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational studies in mathematics, 76*(3), 281-303.

Pehkonen, E. (1997). *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (Research Report 176). Helsinki, Finland: University of Helsinki.

Reid & Knipping (2010). *Proof in mathematics education*. Netherland: Sense Publishers.

Peirce, C. S. (1931-1935). Collect papers of Charles Sanders Peirce Vols Ⅶ-Ⅷ. B. Arthur (Ed.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Peirce, C. S. (1958). Collect papers of Charles Sanders Peirce Vols Ⅰ-Ⅵ. C. Hartshorne& P. Weiss (Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics*. Prinston University Press.

Sawada, T.(1997). Developing Lesson Plans. In J. Becker, & S. Shimada(Eds.), *The open-ended approach : A new proposal for teaching mathematics*(pp.23-35). National Council of Teacher of Mathematics.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 27*(2), p.68-74.

Smith, E. P., and Henderson, K. B.(1959). Proof. In P. S. Jones(Ed.), *The growth of mathematical ideas, grades K-12*(24th Yearbook of the NCTM, pp.111-181). Washington, DC: NCTM.

Thompson(1998). Open-ended tasks: Akey to mathematics assessment. In G. W. Brinht & J. M. Joyner(Eds.), Classroom assessment mathematics, pp. 273-278, New York: University Press of America.

Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

von Glasersfeld, E. (1998). Scheme theory as a key to the learning paradox. Invited paper presented ar the 15th Advanced Course, Archives Jean Piaget, Philadelphia, PA. Retrieved from UMass/SRRI von Glasersfeld archives#258.

A Comparison of Students' Reasoning Shown in Solving Open-Ended and Multiple-Choice Problems

Lee, Myoung Hwa (Graduate School, Kangwon National University)
Kim, Sun Hee (Kangwon National University)

This study conducted an analysis of types of reasoning shown in students' solving a problem and processes of students' reasoning according to type of problem by posing an open-ended problem where students' reasoning activity is expected to be vigorous and a multiple-choice problem with which students are familiar. And it examined teacher's role of promoting the reasoning in solving an open-ended problem. Students showed more various types of reasoning in solving an open-ended problem compared with multiple-choice problem, and showed a process of extending the reasoning as chains of reasoning are performed. Abduction, a type of students' probable reasoning, was active in the open-ended problem, accordingly teacher played a role of encouragement, prompt and guidance. Teachers posed a problem after varying it from previous problem type to open-ended problem in teaching and evaluation, and played a role of helping students' reasoning become more vigorous by proper questioning when students had difficulty reasoning.

* Key Words : open-ended problem(개방형 문제), reasoning(추론), Toulmin, deduction(연역), induction (귀납), abduction(가추)

논문접수 : 2017. 2. 10
논문수정 : 2017. 3. 12
심사완료 : 2017. 3. 17