

## 일정 온도 벽면을 갖는 수평 환형공간 내의 유체의 자연 대류에서의 삼중해

유 주 식\*

안동대학교 기계교육과

### TRIPLE SOLUTIONS IN NATURAL CONVECTION OF A FLUID IN A HORIZONTAL ANNULUS WITH CONSTANT TEMPERATURE WALLS

Joo-Sik Yoo \*

Dept. of Mechanical Engineering Education, Andong Nat'l Univ.

*Natural convection of a fluid with the Prandtl number of 7(water) in a horizontal annulus with constant temperature walls is numerically investigated. The inner cylinder is hotter than the outer cylinder. The flows are classified by the number of eddies in a half annulus. It is found that dual or triple solutions exists above a critical Rayleigh number for an annulus with a aspect ratio  $D_i/L = 4$ . Transitions of  $3 \rightarrow 1$  and  $2 \rightarrow 1$  eddy flow occur with decrease of Rayleigh number. However, reverse transitions of  $1 \rightarrow 3$  and  $1 \rightarrow 2$  eddy flow do not occur with increase of Rayleigh number, and no hysteresis phenomenon is observed. In the regime of triple solutions, the 3 eddy flow has the largest mean Nusselt number value and the 1 eddy flow has the smallest value.*

**Key Words :** 자연대류(Natural Convection), 수평 환형공간(Horizontal Annulus), 균일 온도(Constant Temperature), 삼중해(Triple Solutions)

### 1. 서 론

수평 환형공간에서의 자연 대류 문제는, 흥미로운 유동 형태와 열에너지 저장 시스템, 케이블 냉각 등의 넓은 공학적 응용으로 인해 많이 연구되어온 기본적인 모델 중의 하나이다. 이에 대한 연구들은 Gebhart 등[1]과 등[2]에 의해 포괄적으로 조사되었다.

환형공간 내 자연대류에 대한 기존 연구에서 많이 보여준 기본적인 유동은 쿨팍 모양 또는 초승달 모양의 소용돌이(eddy)이다. 이 유동에서 유체는 따뜻한 안쪽 실린더를 따라 상승하여 차가운 바깥쪽 실린더를 따라 흘러내린다. 이에 따라 환형공간 꼭대기 부근의 유체는 위로 올라간다(Upward

flow[3]). 그런데 Yoo[3,4]는 이 기본적인 유동 외에 어떤 임계값 이상의 Rayleigh 수에서 환형공간 꼭대기 부근에 정방향에 가까운 작은 소용돌이가 형성되는 유동을 발견하였다. 즉, 어떤 임계값 이상의 Rayleigh 수에서 이중해(dual solutions)가 존재한다는 것을 보였다. 새롭게 발견된 유동에서는 작은 소용돌이가 형성됨으로써 환형공간 꼭대기 부근의 유체가 아래로 내려간다(Downward flow[3]).

이후에 Yoo[5]는 일정 열유속 벽면을 가지고 있는 환형공간에서 이중해를 보였고, 이중해의 특성에 미치는 Prandtl 수 ( $Pr$ )의 영향을 조사하였다. 그런데 최근 Hu 등[6]은 일정 열유속 벽면을 가지는 환형공간에서  $Pr = 0.7$ 인 유체의 자연대류를 조사하여 Yoo[5]가 보여준 이중해 외에 또 하나의 새로운 해를 발견하였다. Hu 등[6]이 발견한 것은 환형공간의 위 부분에 두 개의 소용돌이가 형성되는 유동이다. 이 유동에서 환형 꼭대기 부근의 유체는 위로 올라간다. 즉, Hu 등[6]은 일정 열유속 벽면을 가지는 환형공간에서 어떤 임계값 이상의 Rayleigh 수에서는 3중해가 존재한다는 것을

Received: January 26, 2017, Revised: March 13, 2017,

Accepted: March 13, 2017.

\* E-mail: jsyoo@andong.ac.kr

DOI <http://dx.doi.org/10.6112/kscfe.2017.22.1.110>

© KSCFE 2017

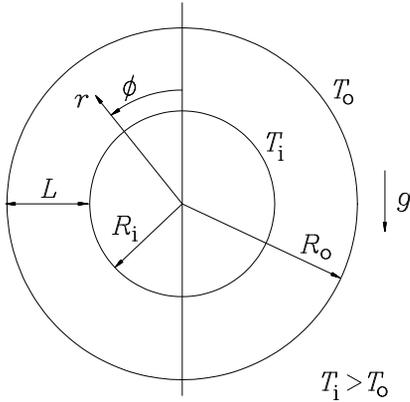


Fig. 1 Problem configuration

보였다.

여기에서는 일정온도 벽면을 가지고 있는 환형공간에서의 자연대류에서  $Pr = 7$ 인 유체(물)를 고려하여 새로운 해의 존재를 조사하였다. 환형공간의 모양을 나타내는 변수  $D_i/L = 4$ 에서  $Hu$  등[6]과 유사한 3중해를 발견하였다.  $D_i$ 와  $L$ 은 각각 안쪽 실린더 지름과 환형공간의 틈새 간격이다.

### 2. 해 석

Fig. 1과 같이 일정한 표면 온도( $T_i, T_o$ )를 유지하고 있는 두 개의 무한히 긴 수평 실린더 사이에 있는 유체를 고려한다. 안쪽 실린더 온도는 바깥쪽 실린더 온도보다 높다 ( $T_i > T_o$ ). Boussinesq 근사를 사용하여 부력 항을 제외하고 유체에서의 밀도 변화를 무시하며, 그 외의 다른 물성치들은 모두 일정하다고 가정한다[7]. 질량 보존방정식, 운동량 방정식 및 에너지 방정식을 길이, 시간, 속도, 압력 및 온도차  $T - T_o$ 의 특성값을 각각  $L, L^2/\kappa, \kappa/L, \rho_0 \kappa^2/L^2, \Delta T = T_i - T_o$ 로 하여 무차원화 시킨다.

유동함수(stream function)  $\Psi$ 와 와도(vorticity)  $\omega$ 에 대한 무차원 지배 방정식과 경계 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \mathcal{J}(\Psi, \omega) + Pr \nabla^2 \omega - Pr Ra \left( \sin \phi \frac{\partial \theta}{\partial r} + \cos \phi \frac{\partial \theta}{r \partial \phi} \right) \quad (1)$$

$$\omega = -\nabla^2 \Psi \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathcal{J}(\Psi, \theta) + \nabla^2 \theta \quad (3)$$

이상에서  $Pr = \nu/\kappa$ 와  $Ra = \alpha g \Delta T L^3/\kappa \nu$ 는 각각 Prandtl 수와 Rayleigh 수를 나타낸다. 그리고 와도( $\omega$ )와 유동함수( $\Psi$ ) 및 Jacobian은 다음과 같이 정의된다.

$$\omega = \frac{\partial}{r \partial r}(rv) - \frac{\partial}{r \partial \phi}(u) \quad (4)$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{r \partial \phi}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (5)$$

$$\mathcal{J}(f, g) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial r} \right) \quad (6)$$

이상에서  $u, v$ 는 각각 반경방향( $r$ )과 각도방향( $\phi$ )의 속도를 나타낸다. 그리고 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \quad \text{at } r = r_i \quad (7)$$

$$\theta = 1 \quad \text{at } r = r_i \quad (8)$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \quad \text{at } r = r_o \quad (9)$$

$$\theta = 0 \quad \text{at } r = r_o \quad (10)$$

각도방향( $\phi$ )으로는 다음과 같이 환형공간의 중심을 지나는 수직 축에 대한 대칭 조건을 적용한다.

$$\Psi = \omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \quad \text{at } \phi = 0, \pi \quad (11)$$

유체 유동이 없는 경우의 순수한 전도(conduction)에 의한 열전달률은 다음과 같이 된다.

$$N_{cond} = \frac{1}{\ln(r_o/r_i)} \quad (12)$$

그리고 국부 Nusselt 수(local Nusselt number)를 다음과 같이 실제적인 열플럭스(heat flux)를  $N_{cond}$ 로 나눈 값으로 정의한다.

$$N_i(\phi) = -\left(r \frac{\partial \theta}{\partial r}\right) / N_{cond} \quad \text{at } r = r_i \quad (13)$$

$$N_o(\phi) = -\left(r \frac{\partial \theta}{\partial r}\right) / N_{cond} \quad \text{at } r = r_o \quad (14)$$

평균 Nusselt 수  $\overline{N}_i$ 와  $\overline{N}_o$  는 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{N}_i = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi N_i(\phi) d\phi \quad (15)$$

$$\overline{N}_o = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi N_o(\phi) d\phi \quad (16)$$

정상 상태에서  $\overline{N}_i$ 와  $\overline{N}_o$  는 같은 값( $\overline{Nu}$ )을 가진다.

식 (1)-(11)의 방정식은 Yoo[3]에서 사용한 것과 같은 유한차분법을 사용하여 푼다. 식 (1)과 (3)을 차분화시키는 데 있어서는 시간 미분 항과 확산 항에 대해 Dufort-Frankel의 방법[8]을 적용하고 Jacobian 항에 대해서는 중앙 미분을 사용한다. 각도방향( $\phi$ )으로는 균일 격자를 이용하고 반경방향( $r$ )으로는 다음과 같은 좌표 확장을 이용한다.

$$r = r_i + \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\tanh\{C(2\eta - 1)\}}{\tanh C} \right] \quad (17)$$

with  $C = 1.4, \quad 0 \leq \eta \leq 1$

여기에서 고려하는 환형공간은  $D_i/L = 4$ 이며 사용한 ( $r \times \phi$ ) 격자계는 ( $25 \times 65$ )이다. 이 격자계는 여러 가지의 격자계를 시험한 다음 충분하다고 생각한 것을 택한 것이다. 본 연구에서 조사한 Rayleigh 수의 범위는  $Ra < 10^4$ 이다.  $Ra = 10^4$ 일 때 격자계에 따른  $\overline{Nu}$ 와  $\Psi_{max}$ 의 차이가 ( $25 \times 65$ )와 ( $45 \times 65$ )에서는 각각 0.1%, 1.2%이고, ( $25 \times 65$ )와 ( $25 \times 129$ )에서는 각각 0.0%, 0.01%이다.

### 3. 결과 및 논의

먼저 Fig. 2에  $D_i/L = 4, Pr = 7, Ra = 8000$ 에서 구한 3중해를 도시하였다. Fig. 2에서 (a), (b), (c)는 환형공간을 수직으로 이등분한 부분에서 각각 1, 2, 3 개의 소용돌이(eddy)를 가진다. 앞으로는 (a), (b), (c)와 같은 유동 형태를 각각 1, 2, 3 eddy 유동으로 부르기로 하겠다.

Fig. 2(a)의 유동은 초승달 모양(crescent shape)의 소용돌이를 보여주며 환형공간의 자연대류에서 일어나는 가장 기본적인 유동이다. 여기에서 유체는 따뜻한 안쪽 벽면을 따라 위로 올라가서 차가운 바깥쪽 벽면을 따라 아래로 흘러내린다. Rayleigh 수가 작을 때는 언제나 이와 같은 유동이 일어난다.

Fig. 2(b)의 유동은 서로 반대 방향으로 회전하는 2개의 소용돌이를 보여준다. Fig. 2(a)와는 달리 여기에서는 환형공

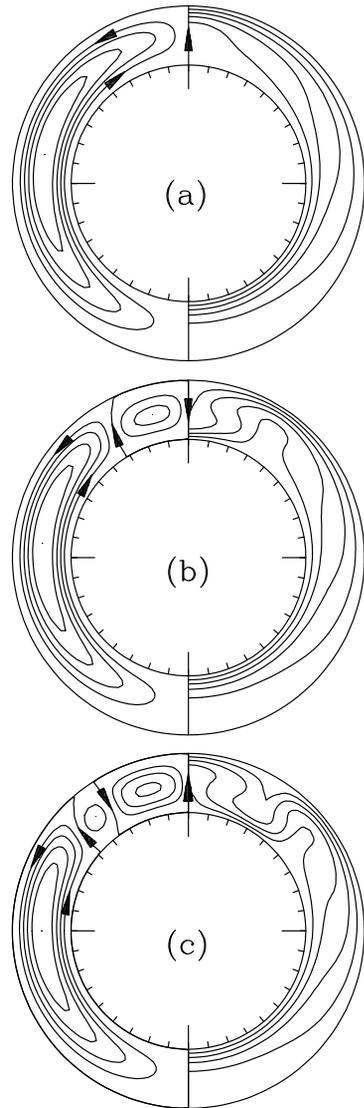


Fig. 2 Streamlines(left) and isotherms(right) of the triple solutions at  $Ra = 8000$ . The flows of (a), (b) and (c) have 1, 2 and 3 eddies in a half annulus, respectively.

간의 정상부분( $\phi = 0$ )의 유체가 아래로 내려간다.

그리고 Fig. 2(c)는 3개의 소용돌이로써 구성되는 유동을 보여준다. 환형공간의 틈새가 작을 때는 Fig. 2(c)의 유동이 쉽게 구해졌다. 그러나  $D_i/L \leq 3$ 에서는 이와 같은 유동이 구해지지 않았다. 즉, 환형공간의 틈새가 클수록 3 eddy 유동을 구하기가 어려워진다. 여기에서는  $D_i/L = 4$ 인 환형공간에서 일어나는 유동의 특성을 조사하였다.

Rayleigh 수가 작을 때는 언제나 Fig. 2(a)와 같은 1 eddy

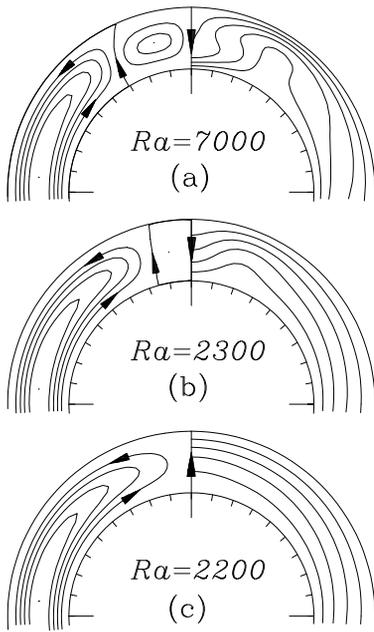


Fig. 3 Transition from 2 eddy to 1 eddy flow with decrease of Rayleigh number

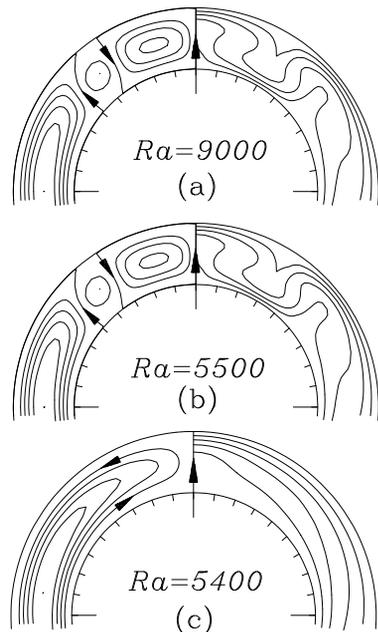


Fig. 4 Transition from 3 eddy to 1 eddy flow with decrease of Rayleigh number

유동이 일어난다. 그러나 큰 Rayleigh 수에서는 Fig. 2(b),(c)와 같은 2, 3 eddy 유동이 일어날 수 있다. Rayleigh 수의 범위에 따른 해의 종류를 Table 1에 나타내었다.  $5500 \leq Ra \leq 9000$ 에서는 3중해가 존재하며,  $2300 \leq Ra \leq 5400$ 에서는 2중해가 존재한다.

Fig. 3와 Fig. 4에 Rayleigh 수의 감소에 따른 유동의 변화 양상을 도시하였다. 먼저 Fig. 3는 2 eddy 유동으로부터 1 eddy 유동으로의 천이를 보여준다.  $Ra$ 가 감소함에 따라 환형공간 꼭대기( $\phi = 0$ ) 부근의 소용돌이의 크기와 세기가 점점 작아져서 어떤 임계 Rayleigh 수( $2200 < Ra_{cl} < 2300$ ) 이하에서는 이 소용돌이가 사라지고 마침내 1 eddy 유동이 확립된다.

Fig. 4는 3 eddy 유동으로부터 1 eddy 유동으로의 천이를 보여준다. 2→1 eddy 유동으로의 천이와는 달리  $Ra$ 가 감소하여도 환형공간 상부에 있는 두 개의 소용돌이는 거의 같은 형상을 유지하며 Fig. 3와 달리 약간 급격하게 3→1 eddy

유동으로의 천이가 일어난다.

다음에 Fig. 5에 Rayleigh 수에 따른  $\Psi_{max}$  과  $-\Psi_{min}$  의 값을 도시하였다. 벽면에서의 유동함수 값이 0이므로  $-\Psi_{min}$  의 값은 환형공간의 위 부분에 존재하는 작은 소용돌이의 세기(strength)를 나타내는 하나의 척도로 볼 수 있다. 즉, 1 eddy 유동에서  $\Psi_{min} = 0$ 이며,  $-\Psi_{min}$  의 값이 클수록 더 강한 소용돌이가 형성된다. Fig. 5에서 (a.2)와 (b.2)는 각각 2 eddy 유동과 3 eddy 유동의  $-\Psi_{min}$  의 값을 나타낸 것이다. 유동의 형태가 변화하는 천이점 부근에서  $-\Psi_{min}$  의 거동을 살펴보면 2 eddy 유동에서 1 eddy 유동으로의 천이는 비교적 완만하게 일어나는 반면 3 eddy 유동에서 1 eddy 유동으로의 천이는 상대적으로 급격하게 일어난다는 것을 알 수 있다. 임계점 부근인  $Ra = 2300$ 에서 2 eddy 유동의  $\Psi_{min}$  의 값은  $-0.75$ 이고,  $Ra = 5500$ 에서 3 eddy 유동의  $\Psi_{min}$  의 값은  $-1.67$ 이다. 그리고 2 eddy 유동과 3 eddy 유동은 각각  $Ra = 2200$  과  $Ra = 5400$ 에서  $\Psi_{min} = 0$ 이 되고 1 eddy 유동으로 변화한다.

이상에서 논의한 바와 같이 소용돌이 수( $N_{eddy}$ )로써 유동 형태를 구분하여 유동의 분기 현상을 Fig. 6에 나타내었다. Fig. 6는  $1000 \leq Ra \leq 9000$ 에서 다음과 같은 현상을 보여 주고 있다. 1 eddy 유동을 초기조건으로 사용하면  $Ra$ 를 증

Table 1 Number of solutions as a function of Rayleigh number

Rayleigh number	Number of solutions	Number of eddies in a half annulus
$5500 \leq Ra \leq 9000$	3	1, 2, 3
$2300 \leq Ra \leq 5400$	2	1, 2
$Ra \leq 2200$	1	1

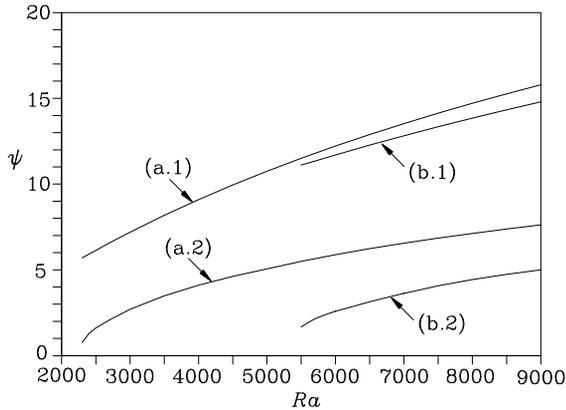


Fig. 5 Maximum and minimum values of stream function as a function of Rayleigh number: (a.1) and (a.2) represent  $\psi_{\max}$  and  $-\psi_{\min}$  of 2 eddy flow, respectively. (b.1) and (b.2) represent  $\psi_{\max}$  and  $-\psi_{\min}$  of 3 eddy flow, respectively.

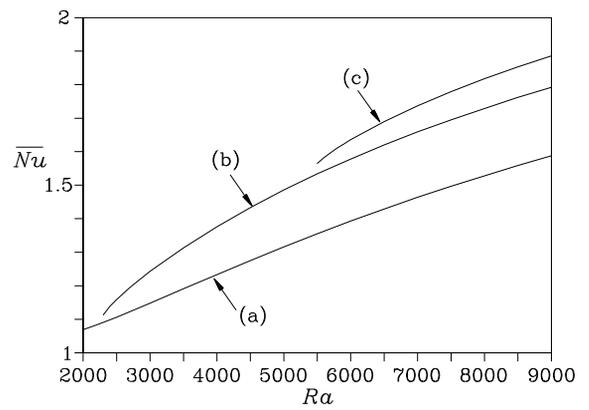


Fig. 7 Mean Nusselt number( $\overline{Nu}$ ) as a function of Rayleigh number: (a), (b) and (c) represent  $\overline{Nu}$  of 1, 2 and 3 eddy flow, respectively.

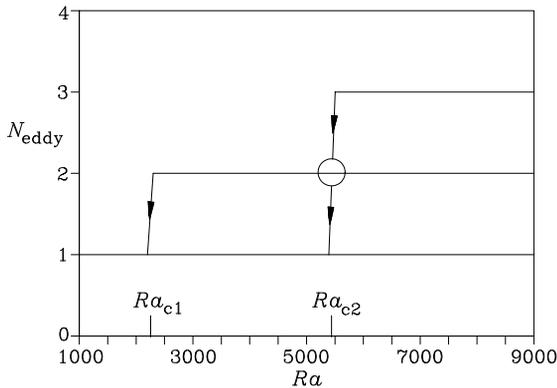


Fig. 6 Bifurcation diagram showing the solution branches as a function of Rayleigh number.  $Ra_{c1}$  and  $Ra_{c2}$  represent the critical Rayleigh number at which transition of 2→1 and 3→1 eddy flow occur, respectively.

가시키거나 감소시켜도 언제나 1 eddy 유동이 얻어진다. 그러나 2 eddy 유동을 초기조건으로 하여  $Ra$ 를 감소시키면  $Ra = Ra_{c1}$ 에서 1 eddy 유동으로의 천이가 일어나고,  $Ra$ 를 증가시키면 2 eddy 유동이 유지된다. 그리고 3 eddy 유동을 초기조건으로 하여  $Ra$ 를 감소시키면  $Ra = Ra_{c2}$ 에서 1 eddy 유동으로의 천이가 일어나고,  $Ra$ 를 증가시키면 3 eddy 유동이 유지된다.  $Ra$ 를 감소시킬 때 3 eddy 유동에서 2 eddy 유동으로의 천이는 일어나지 않는다. 유동 형태의 천이가 일어나는 임계 Rayleigh 수는  $2200 < Ra_{c1} < 2300$ 과  $5400 < Ra_{c2} < 5500$ 의 범위에 있다. Rayleigh 수를 증가시

키면 언제나 같은 형태의 유동이 유지되며 이력현상(hysteresis phenomenon)은 관찰되지 않았다.

유체유동을 지배하는 방정식은 비선형이므로 유체역학 문제에서는 다중해(multiple solutions)가 존재할 가능성이 있으며 여러 시스템에서 다중해에 대한 연구가 수행되어 왔다 [9-11].

끝으로 Fig. 7에 Rayleigh 수에 따른 평균 Nusselt 수( $\overline{Nu}$ )의 거동을 도시하였다. Fig. 7에서 (a), (b), (c)는 각각 1, 2, 3 eddy 유동의  $\overline{Nu}$ 를 나타낸다. 세 유동의  $\overline{Nu}$ 의 크기를 비교해보면 3중해가 존재하는 영역에서  $\overline{Nu}$ (3 eddy) >  $\overline{Nu}$ (2 eddy) >  $\overline{Nu}$ (1 eddy)이며, 2중해가 존재할 때  $\overline{Nu}$ (2 eddy) >  $\overline{Nu}$ (1 eddy)이라는 것을 알 수 있다. 즉, 모든 경우에 대해 소용돌이 개수가 많은 유동이 이보다 적은 개수의 유동보다 더 큰 평균 Nusselt 수를 가진다.

#### 4. 결 론

따뜻한 안쪽 실린더와 차가운 바깥쪽 실린더를 가지는 수평 환형 공간에서  $Pr = 7$ 인 유체(물)의 자연대류를 수치적으로 조사하였다. 유한차분법을 사용하여 안쪽 실린더 지름( $D_i$ )과 환형공간의 틈새( $L$ )의 비가  $4(D_i/L = 4)$ 인 환형 공간에서 3중해를 발견하였다. 유동 형태를 소용돌이의 개수에 따라 1, 2, 3 eddy 유동으로 분류하였다. 어떤 임계 Rayleigh 수 이상에서는 2중해와 3중해가 존재한다. Rayleigh 수를 감소시키면 3 eddy 유동에서 1 eddy 유동으로의 천이와 2 eddy 유동으로부터 1 eddy 유동으로의 천이가 일어난

다. 그러나 Rayleigh 수를 증가시켜도 1 eddy 유동으로부터 3 eddy 유동의 천이와 1 eddy 유동으로부터 2 eddy 유동으로의 천이는 일어나지 않는다. 3→1 eddy 유동으로 천이가 일어나는 임계 Rayleigh 수는 2→1 eddy 유동으로 천이가 일어나는 임계 Rayleigh 수보다 크다. Rayleigh 수를 증가시키면 언제나 같은 형태의 유동이 유지된다. 2중해가 존재할 때 2 eddy 유동이 1 eddy 유동보다 더 큰 평균 Nusselt 수를 가진다. 3중해가 존재할 때 3 eddy 유동의 평균 Nusselt 수가 가장 크고 1 eddy 유동의 평균 Nusselt 수가 가장 작다.

## 후 기

이 논문은 2015학년도 안동대학교 연구비에 의하여 연구되었음.

## References

- [1] 1988, Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R.L. and Sammakia, B., "Buoyancy-induced flows and transport," *Springer-Verlag*, pp.761-771.
- [2] 2010, Angeli, D., Barozzi, G.S., Collins, M.W. and Kamiyo, O.M., "A critical review of buoyancy-induced flow transitions in horizontal annuli," *Int. J. Thermal Sciences*, Vol.49, pp.2231-2241.
- [3] 1996, Yoo, J.-S., "Dual steady solutions in natural convection between horizontal concentric cylinders," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol.17, pp.587-593.
- [4] 1999, Yoo, J.-S., "Prandtl number effect on bifurcation and dual solutions in natural convection in a horizontal annulus," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.42, pp.3275-3286.
- [5] 2003, Yoo, J.-S., "Dual free-convective flows in a horizontal annulus with a constant heat flux walls," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.46, pp.2499-2503.
- [6] 2015, Hu, Y., Li, D., Shu, S. and Niu, X.D., "Study of multiple steady solutions for the 2D natural convection in a concentric horizontal annulus with a constant heat flux walls using immersed boundary-lattice boltzmann method," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.81, pp.591-601.
- [7] 1982, Drazin, P. and Reid, W., "Hydrodynamic stability," *Cambridge University Press*, pp.35-37.
- [8] 1972, Roache, P.J., "Computational fluid dynamics," *Hermosa*, pp.53-64.
- [9] 1982, Benjamin, T.B. and Mullin, T., "Notes on the multiplicity of flows in the Taylor experiment," *J. Fluid Mech.*, Vol.121, pp.219-230.
- [10] 2003, Erenburg, V., Gelfgat, A. Yu., Kit, E., Bar-Yaseph, P.Z. and Solan, A., "Multiple states, stability and bifurcations of natural convection in a rectangular cavity with partially heated vertical walls," *J. Fluid Mech.*, Vol.492, pp.63-89.
- [11] 2016, Yoo, J.-S., "Multiple Solutions in Natural Convection Between Two Horizontal Plates with Small Magnitude Non-Uniform Temperature in the Upper Plate," (in Korean) *Journal of Computational Fluids Engineering*, Vol.21, No.3, pp.64-70.