

Penalized VIC 방법에서 장시간 유동 해석을 위한 원거리 와도 입자 처리

조 은 별,^{1,2} 이 승 재,^{*3} 서 정 천^{1,3}

¹서울대학교 조선해양공학과

²대한민국 해군

³서울대학교 해양시스템공학연구소

DISPOSAL OF FAR-FIELD VORTEX PARTICLES FOR LONG-TERM SIMULATIONS IN PENALIZED VIC METHOD

E.B. Jo,^{1,2} S.-J. Lee^{*3} and J.-C. Suh^{1,3}

¹Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Seoul National University

²Republic of Korea Navy

³Research Institute of Marine Systems Engineering, Seoul National University

A penalized VIC method offers an efficient hybrid particle-mesh algorithm to simulate an incompressible viscous flow passing a solid body in an infinite domain. In this manner, the computational domain needs to be restricted to a relatively small region to reduce computational cost which would be very high in case of using a large domain. In this paper, we present how to dispose of far-field particles to avoid an unnecessarily large computational domain. The present approach constraints expansion of the domain and thus prevents the incremental computational cost. To validate the numerical approach, a flow around an impulsively started sphere was simulated for Reynolds numbers of 100 and 1000.

Key Words : 와도 입자 처리(Vortex particle disposal), VIC 방법(Vortex-in-cell method), 페널티화 방법(Penalization method), 장시간 유동 해석(Long-term simulation)

1. 서 론

라그랑지안 보텍스 방법(Lagrangian vortex method)은 와도 이송 방정식(vorticity transport equation)을 지배방정식으로 한다. 와도를 기저로 하는 이러한 수치해석 방법은 비관성 및 관성 좌표계에서 지배방정식이 동일하고, 무한 원방에서 경계 조건이 자동으로 만족하며, 압력항을 포함하고 있지 않기 때문에 압력-속도 연성문제에서 근본적으로 자유롭다는 장점이 있다[1,2]. 또한, 유체 입자 이동을 직접 추적하는 라그랑지안 방법은 수치 확산(numerical diffusion)이 상대적으로 작으며, 비선형항인 대류항(convective term)을 포함하고 있지 않기 때

문에 이와 연관된 안정 조건(stability condition)을 만족시킬 필요가 없다는 장점이 있다[3]. 하지만 라그랑지안 보텍스 방법의 단점은 계산시간이 매우 오래 걸린다는 것이며, 이는 와도 입자의 이동속도는 모든 입자들 간의 상호작용에 의해 결정되는 Biot-Savart 적분 형태로 표현되기 때문이다. 계산시간 단축을 위한 대표적인 방법은 고속 멀티폴 방법(fast multipole method, FMM)[4]와 vortex-in-cell(VIC) 방법[5]이 있다. FMM은 라그랑지안 관점의 가속화 방법으로 다양한 N-body 문제에 적용되고 있으며, VIC 방법은 하이브리드 방법으로 와도 입자의 세기를 정규격자계(uniform grid)에 내삽하여 와도 입자의 속도를 계산하는 방법이다. FMM과 비교하여, VIC 방법의 장점은 복잡한 데이터 구조가 요구되지 않는다는 점과 병렬 연산에서 통신 부하가 차지하는 비율이 상대적으로 낮다는 것이다. 또한, VIC 방법은 최근 물체의 고착조건을 만족시키기 위한 penalization 방법[6]과 조합되면서 유동해석에 필요한 알고리즘을 단순화하였을 뿐만 아니라 전체 계산시간을 크게

Received: December 1, 2016, Revised: February 10, 2017,

Accepted: February 10, 2017.

* Corresponding author, E-mail: hul94@snu.ac.kr

DOI <http://dx.doi.org/10.6112/kscfe.2017.22.1.051>

© KSCFE 2017

단축하였다[7,8,9]. Penalization 방법은 가상경계법(immersed boundary method) 중 하나로 Navier-Stokes 방정식에 부가항을 추가하는 방법이다. Penalization 방법과 조합된 VIC 방법(이후 ‘penalized VIC 방법’으로 언급함)은 순수한 라그랑지안 방법과 달리 정규격자에서 와도 입자의 세기와 속도를 계산하기 때문에 종종 하이브리드 입자-격자 방법(hybrid particle-mesh method)으로 불린다.

Penalized VIC 방법에서 정규격자로 구성된 계산영역은 모든 와도 입자를 포함하도록 결정되며, 전체 계산시간과 소요 컴퓨터 메모리는 계산영역의 크기에 크게 의존한다. 효율적인 메모리 사용을 위해서 계산영역은 모든 와도 입자를 포함하는 최소 범위로 한정하고 계산영역의 경계조건은 Green 함수의 해를 이용하여 결정할 수 있다. Lee와 Suh[10,11]는 계산영역에 대한 경계조건을 빠르게 구하기 위해서 spline을 이용한 경계조건 추정방법[11]과 분할된 다수의 계산영역으로 전체 계산영역을 구성하는 다중영역(multiple domains)방법[10]을 제안하였다. 그들의 연구는 penalized VIC 방법에서 요구되는 컴퓨터 메모리의 감소와 계산속도 향상에 크게 기여하였다. 하지만 유동이 발달함에 따라 와도 입자들은 물체로부터 상당히 먼 거리까지 분포하게 되며, 이로 인한 전체 계산영역의 증가는 여전히 계산의 효율성을 저해하는 요인으로 작용하게 된다. 따라서 penalized VIC 방법에서 효율적으로 장시간 유동 해석을 수행하기 위해서는 계산영역의 불필요한 증가를 제한할 필요가 있다.

본 논문에서는 penalized VIC 방법에서 원거리의 와도 입자를 처리하는 방법을 소개하며, 순간적으로 출발하는 3차원 구에 대한 점성 유동해석을 수행하여 제안된 방법의 타당성을 보이고자 한다. 본 논문의 나머지는 다음과 같이 구성된다. 2장에서는 유동해석을 위한 지배방정식과 penalized VIC 방법을 간략히 기술한다. 3장에서는 원거리의 와도 입자에 대한 처리 방법을 소개하고, 4장에서는 순간적으로 출발하는 3차원 구에 대한 점성유동해석을 통하여 제안한 와도 입자 처리 방법의 효과를 확인한다. 마지막으로 5장에서 본 논문에 대한 결론을 내리며 마무리를 짓는다.

2. Penalized VIC 방법

Penalized VIC 방법에서 와도장은 식 (1)과 같이 N 개의 와도 입자로 표현된다.

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=1}^N \boldsymbol{\Gamma}_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (1)$$

여기서 $\boldsymbol{\Gamma}_p = \int \boldsymbol{\omega} dV \approx \boldsymbol{\omega} \omega^3$ 는 와도 입자의 세기를 의미한

다. 와도 입자의 성장(세기 변화)은 식 (2)와 같이 penalty 항을 포함하는 와도 이송 방정식에 의해 지배된다.

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \left[\frac{\lambda \chi}{1 - \lambda \chi \Delta t} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}) \right] \quad (2)$$

여기서 \mathbf{u}_s 는 물체의 속도이며, χ 는 mask 함수로서 물체 내부에서는 1이고 물체 밖에서는 0이 된다. λ 는 penalty 상수이며, 본 논문에서는 10^8 을 사용하였다. 식 (3)과 같이 와도 입자의 속도(\mathbf{u})는 유입 속도(\mathbf{U}_∞)와 와도가 유기하는 회전속도(\mathbf{u}_ω)로 표현될 수 있으며, 회전속도와 와도의 관계는 그들의 정의에 의해 식 (4)와 같이 정의된다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}_\omega \quad (3)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u}_\omega = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (4)$$

Penalized VIC 방법에서 식 (2)와 (4)는 모두 정규격자에서 풀이되며, 이를 위해 와도 입자의 세기는 식 (5)를 이용하여 입자(\mathbf{x}_p)에서 격자계(\mathbf{x}_g)로 내삽된다.

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_g) = \sum_p^N \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_p) W \left(\frac{\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_g}{h} \right) \quad (5)$$

여기서 h 는 격자간격이며, 아래첨자 p 와 g 는 각각 와도 입자 및 격자 상의 물리량을 의미한다. W 는 보간 함수이며, 본 연구에서는 아래와 같이 M_4' kernel을 사용하였다.

$$W = M_4'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{2}|x|^2 + \frac{3}{2}|x|^3, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{2}(2 - |x|)^2(1 - |x|), & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0, & 2 \leq |x| \end{cases} \quad (6)$$

식 (4)를 풀기 위한 경계조건은 식 (6)과 같이 Green 함수의 해를 이용하여 구할 수 있다.

$$\mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}_b) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_p)}{|\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_p|^3} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_p) dV_p \quad (7)$$

여기서 \mathbf{x}_b 는 계산영역 경계에 위치한 격자점을 의미한다. 식 (4)를 풀이기 위해 요구되는 경계조건을 빠르게 구하기 위해 spline 함수를 이용한 추정방법[10,11]을 적용하였다. 다

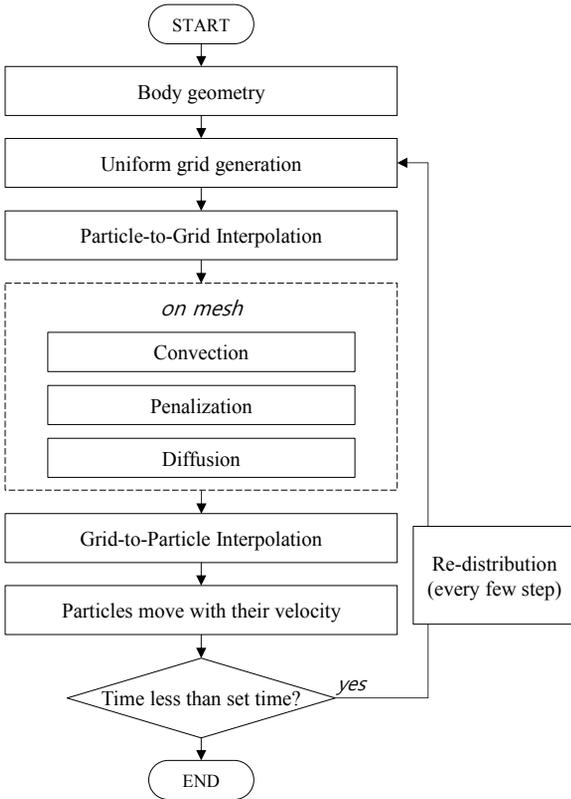
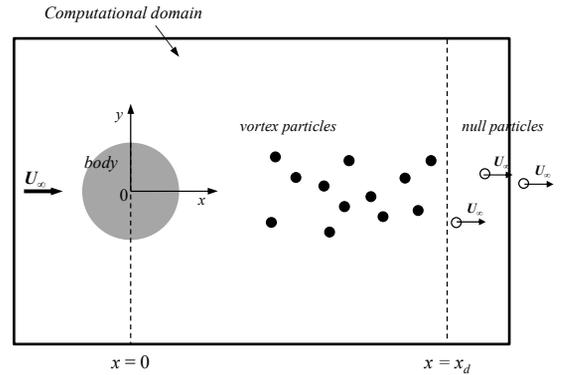


Fig. 1 Flow chart of penalized VIC method

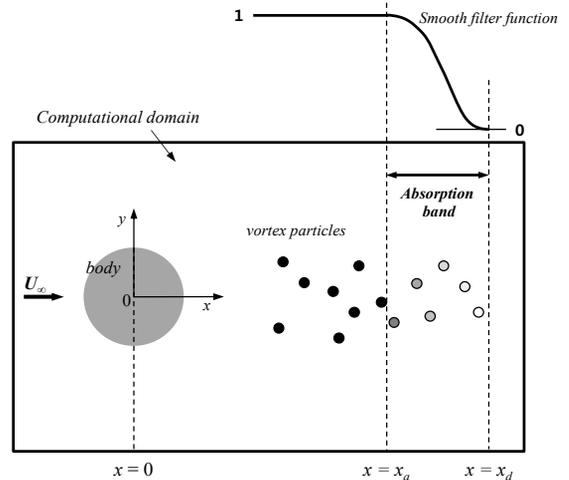
시 말해서, 일정한 간격으로 선택된 x_b 에서는 식 (7)을 이용하여 경계에서의 와도 속도를 구하고 나머지 격자점에서의 속도는 spline 함수를 이용하여 추정하였다.

Penalized VIC 방법의 해석 절차는 Fig. 1에 도시하였다. 먼저 격자계로 내삽된 와도장을 바탕으로 속도장이 구해진다. 식 (4)는 공개 library인 FFTW(Fastest Fourier Transform in the West)를 바탕으로 한 FFT solver를 사용하여 계산되며, 갱신된 속도장과 주어진 와도장을 이용하여 식 (2)에서의 확산항, 신축항, penalty 항을 격자계에서 계산한다. 최종적으로 와도 입자의 세기와 속도는 격자계에서 계산된 속도장과 와도장으로 부터 식 (5)를 이용하여 얻어지며 와도 입자들은 자신의 속도를 바탕으로 자유롭게 이동하게 된다.

본 연구에서는 와도 입자들이 서로 뭉쳐지거나 과도하게 멀어지지 않도록 5번의 시행마다 재분배(re-distribution)를 수행하였으며, 계산속도 향상과 컴퓨터 메모리의 효과적인 사용을 위해 병렬 컴퓨팅과 다중영역방법[10]을 사용하였다. 다중영역방법에서 전체 계산영역은 수개로 나뉘고, 각각의 계산영역은 다시 병렬 컴퓨팅을 위해 분할되어 프로세서(processor)에 할당된다.



(a) Huang's disposal approach[13]



(b) Mimeau's absorption approach[17]

Fig. 2 Schematics of (a) the disposal approach and (b) the absorption approach for handling far-field vortex particles

3. 원거리 와도 입자의 처리

앞서 설명한 바와 같이, penalized VIC 방법은 와도 입자의 성장과 속도를 계산하기 위해 격자계를 활용하며, 격자로 구성된 계산영역은 모든 와도 입자가 포함될 수 있도록 결정된다. 장시간 유동해석에서 와도 입자들은 물체로부터 상당히 멀리 떨어진 곳까지 분포하게 되므로 계산영역의 크기가 불필요하게 증가할 수 있다. 이러한 이유 때문에 Huang과 Huang[12]은 물체의 후류 방향으로 특정 위치(x_d)보다 떨어진 와도 입자들을 유동해석에서 제외하는 방법을 제안하였다. Fig. 2(a)에서 도시된 것과 같이 그들은 2차원 날개 주위 유동해석에서 와도 입자 처리 위치를 $x_d = 21c$ (c 는 2차원 날개의 코드길이이다.)로 설정하였으며, x_d 를 통과한 와도 입자들의

이동속도는 유입속도(U_∞)와 같고 세기는 유지된다고 가정하였다. 또한, Mimeau 등[13]은 후류 방향으로 특정 위치를 통과하는 와도 입자들의 세기를 부드러운 함수(smooth function) 식을 이용하여 서서히 감소시키는 방법을 제안하였다. Fig. 2(b)와 같이, 와도 입자의 세기는 흡수영역(absorption band) 내에서 서서히 감소된다.

앞서 설명한 두 가지 방식은 물체에 작용하는 힘을 구하는 방법과 밀접하게 관련된다. 라그랑지안 보텍스 방법에서 물체에 작용하는 힘(\mathbf{F})은 운동량(momentum) 평형으로부터 구해질 수 있다. 와도의 모멘트(moment)에 대한 적분은 운동량의 변화량이고, 따라서 물체에 작용하는 힘은 식 (8)과 같이 표현된다[14].

$$\mathbf{F} = -\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{N-1} \int_V \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} dV \right) \quad (8)$$

여기서 N 은 차원, V 는 유체 전체를 의미한다. 식 (8)을 이용하여 물체에 작용하는 힘을 구하기 위해서는 모든 입자가 고려되어야 하며, 이러한 이유 때문에 Huang과 Huang[12]은 x_d 를 통과한 와도 입자들을 완전히 삭제하지 않았다. 반면, penalized VIC 방법에서는 식 (8) 뿐만 아니라 물체 내부의 가상 속도에 의해 물체에 작용하는 힘을 구할 수 있다. 식 (9)는 penalized VIC 방법에서 물체 내부의 속도와 운동량 평형을 이용하여 물체에 작용하는 힘을 구하는 것을 보여준다.

$$\mathbf{F} = -\rho \int_V \lambda \chi (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}) dV \quad (9)$$

여기서 적분영역은 식 (8)과 동일하게 계산영역 전체를 의미하지만 실제로는 물체 밖에서 0이 되는 Mask 함수에 의해 물체 내부만 고려가 된다. Mimeau 등[13]은 식 (9)를 이용하기 때문에 원거리의 와도 입자를 인위적으로 삭제할 수 있었다. 또한 그들은 계산영역의 경계조건을 주기적 경계조건(periodic boundary condition)을 사용하기 위해 흡수영역을 사용하였다. 본 논문에서 사용하는 수치해석 방법은 Mimeau 등[13]과 같은 penalized VIC 방법을 사용하지만, 단일 계산영역과 주기적 경계조건을 사용하는 Mimeau 등[13]과 달리 계산영역을 다수의 영역으로 분할하고 각각의 계산영역의 경계조건은 Dirichlet 조건을 적용한다. 이러한 다중영역방법은 계산영역을 최소화할 수 있기 때문에 가용 컴퓨터 메모리의 효율적인 사용뿐만 아니라 계산시간 단축에도 효과적이다[10]. 결과적으로, 본 논문에서는 흡수영역 없이 x_d 를 통과한 와도입자를 강제적으로 삭제하고, 삭제된 와도 입자의 세기는 전체 순환 보존을 위해 전체 와도 입자들로 할당해 준다. Fig. 3는 본 논

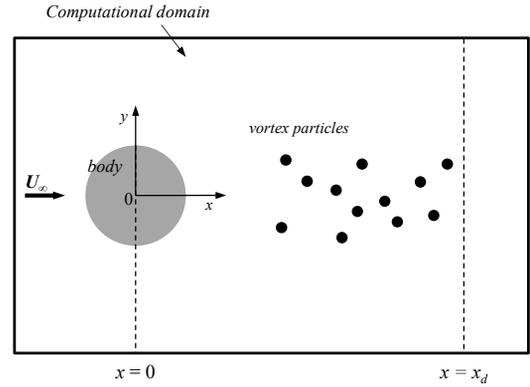


Fig. 3. Present approach for handling far-field vortex particles

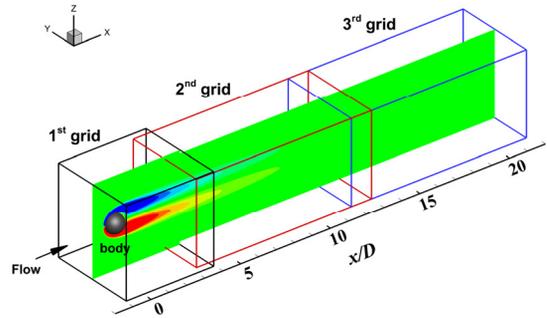


Fig. 4 Configuration of multiple computational domains

문에서 사용된 원거리의 와도 입자를 처리하는 방법을 도식적으로 보여준다.

4. 유동 해석

본 논문에서는 순간적으로 출발하는 구 주위의 점성 유동 해석을 통하여 원거리 와도 입자의 처리방법에 대한 유효성을 검증하고자 한다.

먼저 penalized VIC 방법의 적절성을 확인하기 위해서 원거리 와도 입자를 삭제하지 않고($x_d = \infty$) 구 주위의 유동을 해석하였으며, Fig. 4는 수치해석에 사용된 계산영역을 도식적으로 보여 준다. 해석 초기에는 하나의 계산영역만이 존재하며, 유동이 발달함에 따라 계산영역을 추가된다. 각각의 계산영역은 병렬연산을 위해 다시 작은 영역으로 분할되며, 계산영역 간에는 수치 오차를 줄이기 위한 중첩영역이 존재한다. 수렴성 시험을 통해 결정된 입력변수는 Table 1과 같다. 본 연구에서 유동 해석은 8개의 CPU(Intel Xeon64 3.3 GHz)를 사

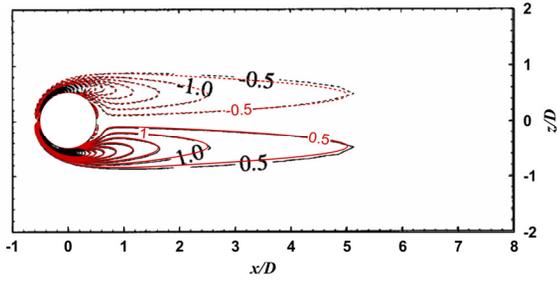


Fig. 5 Comparison of vorticity contours at a steady state on xz -plane. Note that the red and black lines depict the result of present method and that of Johnson and Patel[9], respectively

용하였으며 정상상태(Steady state)에 도달하기 위해 유동해석을 $T(=tU_\infty/D) = 15$ 까지 수행하였다. Table 2에서와 같이 계산된 결과는 다른 연구자의 결과와 잘 일치하고 있으며, 해석된 와도장은 Johnson과 Patel[15]의 해석결과와 동일함을 확인하였다(Fig. 5 참조).

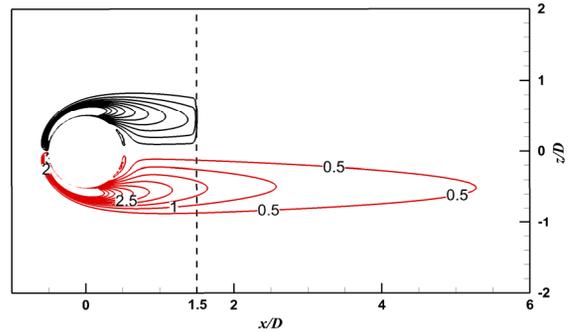
Fig. 6는 원거리의 와도 입자를 삭제하기 위한 위치 x_d 를 변화시키며 계산하였을 때의 와도장(vorticity contour)을 보여준다. 와도장은 $T = 15$ 에서 결과이며, 빨간색으로 표시한 선은 원거리 와도 입자를 처리하지 않은 결과를 나타낸다. 예상한 것과 같이 x_d 가 작을수록 물체 후류에서 와도장의 왜곡이 심하게 나타나며, x_d 의 증가(계산영역의 증가)에 따라 와도장의 왜곡 현상은 점차 줄어든다. 결과적으로 $x_d = 8.5D$ 이상에서의 와도장은 $x_d = \infty$ 인 와도장과 비교하여 잘 일치하고 있다. Fig. 7과 8은 x_d 변화에 따른 유선(streamline)과 항력계수(C_D)를 보여주며, $x_d = 8.5D$ 이상인 경우에는 결과의

Table 1 Computational parameters

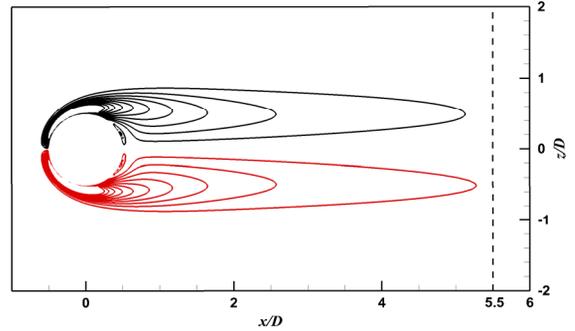
Reynolds number	$Re = U_\infty D / \nu$	100
Sphere diameter	D	1.0
Free-stream velocity	U_∞	(1, 0, 0)
Time step	Δt	0.005
Grid spacing	h	0.02
Particle size	σ	0.02

Table 2 Drag coefficient and wake shape at steady state

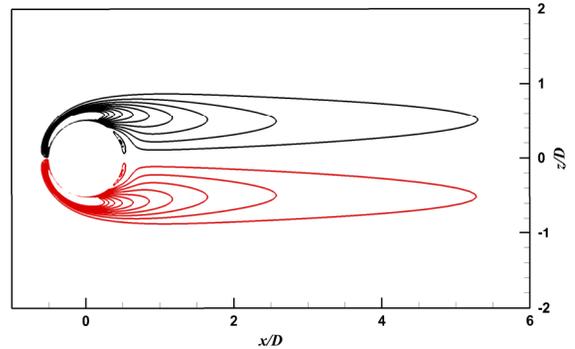
Author(s)	C_D	Wake length	Wake center
Taneda[16]	-	0.89	(0.75, 0.28)
Johnson & Patel[15]	-	0.89	(0.76, 0.29)
Fornberg[17]	1.09	-	-
Bagchi & Balachandar[18]	1.09	0.87	-
Present	1.09	0.88	(0.76, 0.28)



(a) $x_d = 1.5D$



(b) $x_d = 5.5D$



(c) $x_d = 8.5D$

Fig. 6 Comparisons of vorticity contours between w/o and w/ vortex particle disposal. Note that red lines are results for $x_d = \infty$

차이가 거의 없음을 알 수 있다.

와도 입자 처리에 따른 입자 개수의 변화는 Fig. 9에서 보여준다. 와도 입자가 처음으로 $x_d = 8.5D$ 를 통과하는 시점은 $T \approx 8$ 이다. 와도 입자 처리 방법을 적용한 경우에는 와도 입자의 수가 거의 일정하게 유지되고 있으나, 와도 입자 처리 방법을 적용하지 않은 경우에는 와도 입자가 계속 증가하게 된다. $T = 15$ 에서 $x_d = \infty$ 와 $x_d = 8.5D$ 에 대한 와도 입자

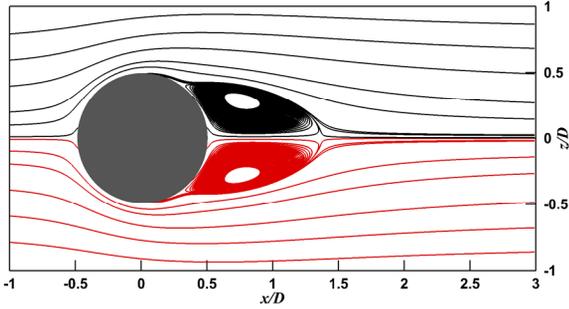


Fig. 7 Comparisons of streamlines between w/o and w/ vortex particle disposal. Note that black and red lines are results for $x_d = 8.5D$ and $x_d = \infty$, respectively

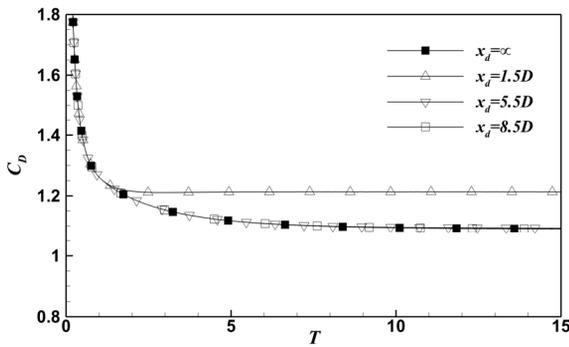


Fig. 8 Time evolution of the drag coefficient

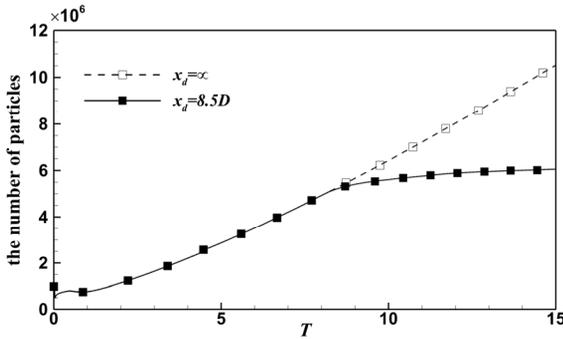


Fig. 9 The number of particles for $x_d = \infty$ and $x_d = 8.5D$

수는 각각 10^7 와 6×10^6 개이며, 약 4백만개의 입자수가 발생한다. 와도 입자 수의 증가는 계산의 필요한 메모리 사용의 증가와 계산시간 증가를 의미하며, 와도 입자의 분포가 상대적으로 넓어지게 됨으로 계산영역의 증가로 이어진다. 본 계산에서 와도 입자 처리를 적용하지 않은 경우($x_d = \infty$)에는 3개의 계산영역이 정의되었으며, 와도 입자 처리를 적용한 경우($x_d = 8.5D$)에는 2개의 계산영역이 정의되었다. y축

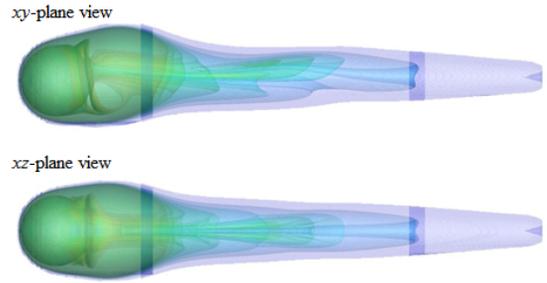


Fig. 10 Iso-contours of vorticity at $T = 8$ for $Re = 1000$

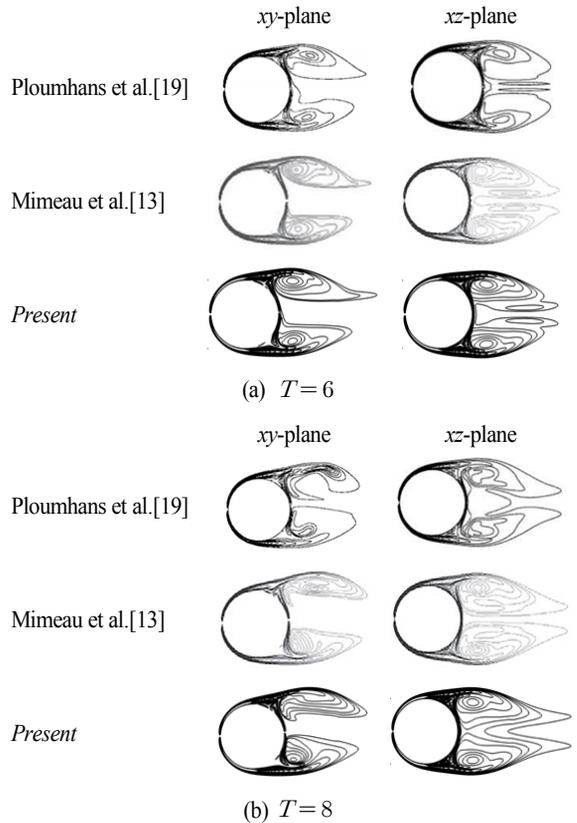


Fig. 11 Comparisons of vorticity contours for $Re = 1000$

과 z축 방향의 계산영역의 크기는 두 경우 모두 동일하였다. 계산영역과 와도 입자 수의 감소로 인하여 $T=15$ 까지의 실제 계산시간이 125시간($x_d = \infty$)에서 80시간($x_d = 8.5D$)으로 단축되었다.

추가적으로 제안한 원거리 와도 입자 처리방법을 검증하기 위해 레이놀즈 수 1000에서의 구 주위 점성 유동해석을 수행하였으며, 해석결과는 Fig. 10에서 보여준다. 유동해석은

$h = 0.004$ 와 $\Delta t = 0.002$ 에서 16개의 CPU를 사용하여 수행하였으며, $x_d = 8.5D$ 를 적용하였다. Fig. 11에서 보는 바와 같이 유사논문의 해석결과와 비교적 일치하였으며, $x_d = \infty$ 에 대한 결과와도 잘 일치하였다.

5. 결 론

Penalized VIC 방법은 하이브리드 입자-격자 방법으로 와도 입자의 세기 변화와 이동속도를 구하기 위해 정규격자를 사용한다. 이때, 정규격자로 구성된 계산영역은 와도 입자의 분포에 따라 결정된다. 계산영역의 증가는 해석시간과 소요 메모리 증가를 의미한다. 본 연구에서는 일반적인 Eulerian 관점의 수치해석방법과 같이 물체에서 멀리 떨어진 와도 입자를 단순히 삭제하여 계산영역을 한정하였으며, 이를 위해서 계산영역에 대해 Dirichlet 경계조건 적용하였다.

본 논문에서는 원거리의 와도 입자 처리방법을 순간적으로 출발하는 구 주위 유동해석에 적용하여 타당성을 검증하였으며, 해석결과를 물체로부터 충분히 떨어진 와도 입자는 전체 유동에 미치는 영향이 매우 작음을 보여주었다. 향후 연구의 방향은 유동해석 과정 내에서 스스로 계산영역을 한정하기 위한 기준을 설정하는 것이다.

후 기

본 논문은 산업원천기술개발사업(no.1044499)과 한국형 SGER사업 (NRF-2015R1D1A1A02061713)의 지원으로 수행되었으며, 많은 지원에 감사드립니다. 본 논문은 제1저자 조은별의 석사학위논문을 바탕으로 작성한 것을 밝힙니다.

References

- [1] 1931, Rosenhead, L., "The Formulation of Vortices from a Surface of Discontinuity," *Mathematical and Physical Character*, Vol.134, No.823, pp.170-192.
- [2] 2000, Cottet, G.-H. and Koumoutsakos, P., "Vortex Methods: Theory and Practice," *Cambridge University Press*.
- [3] 1986, Chorin, A.J., "Turbulence and Vortex Stretching on a Lattice," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol.39, pp.47-65.
- [4] 1987, Greengard, L. and Rokhlin, V., "A Fast Algorithm for Particle Simulations," *Journal of Computational Physics*, Vol.73, pp.325-348.
- [5] 1973, Christiansen, J.P., "Numerical Simulation of Hydrodynamics by the Method of Point vortices," *Journal of Computational Physics*, Vol.13, pp.363-379.
- [6] 1999, Angot, P., Bruneau, C.-H. and Fabrie, P., "A Penalization Method to Take into account Obstacles in Incompressible Viscous Flows." *Numerische Mathematik*, Vol.81, No.4, pp.497-520.
- [7] 2010, Rossinelli, D., Bergdorf, M., Cottet, G.-H. and Koumoutsakos, P., "GPU Accelerated Simulations of Bluff Body Flows Using Vortex Particle Methods," *Journal of Computational Physics*, Vol.229, pp.3316-3333.
- [8] 2014, Lee, S.-J. and Suh, J.-C., "Computation of Pressure Fields for a Hybrid Particle-Mesh Method," *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, Vol.51, No.4, pp.328-333.
- [9] 2015, Lee, S.-J., Lee, J.-H. and Suh, J.-C., "Numerical Investigation on Vortex Shedding from a Hydrofoil with a Beveled Trailing Edge," *Modelling and Simulation in Engineering*, Vol.2015, Article ID.565417.
- [10] 2014, Lee, S.-J. and Suh, J.-C., "A Multi-Domain Approach for a Hybrid Particle-Mesh Method," *Journal of Computational Fluids Engineering*, Vol.19, No.2, pp.72-78.
- [11] 2017, Lee, S.-J. and Suh, J.-C., "Fast Computation of Domain Boundary Conditions using Splines in Penalized VIC Method," *International Journal of Computational Methods*, Vol.14, No.2, 1750076(16 pages).
- [12] 2013, Huang, C.-J. and Huang, M.-J., "A Vortex Method Suitable for Long Time Simulations of Flow over Body of Arbitrary Geometry," *Computers and Fluids*, Vol.74, pp.1-12.
- [13] 2016, Mimeau, C., Cottet, G.-H. and Mortazavi, I., "Direct Numerical Simulations of Three-Dimensional Flows past Obstacles with a Vortex Penalization Method," *Computers and Fluids*, Vol.136, pp.331-347.
- [14] 1995, Koumoutsakos, P. and Leonard, A., "High-Resolution Simulation of the Flow around an Impulsively Started Cylinder using Vortex Method," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.296, pp.1-38.
- [15] 1999, Johnson, T.A. and Patel, V.C., "Flow past a Sphere up to a Reynolds Number of 300," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.378, pp.19-70.
- [16] 1956, Taneda, S., "Experimental Investigation of the Wake behind a Sphere at Low Reynolds Numbers," *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol.11, No.10, pp.1104-1108.
- [17] 1988, Fornberg, B., "Steady Viscous Flow past a Sphere at

- High Reynolds Numbers," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.190, pp.471-489.
- [18] 2002, Bagchi, P. and Balachandar, S., "Steady Planar Straining Flow past a Rigid Sphere at Moderate Reynolds Number," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.466, pp.365-407.
- [19] 2002, Ploumhans, P., Winckelmans, G.S., Salmon, J.K., Leonard, A. and Warren, M.S., "Vortex Methods for Direct Numerical Simulation of Three-Dimensional Bluff Body Flows: Application to the Sphere at $Re=300, 500$ and 1000 ," *Journal of Computer Physics*, Vol.178, pp.427-463.