한국학교수학회논문집 제 20 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 20, Number 4, 445-464, December 2017

분석적 방법을 통한 삼각형의 내접원, 외접원에서 사면체의 내접구, 외접구로의 유추적 발견

김근배[1)]· 최옥환[2)] · 박달원[3)]

본 연구에서는 공간도형을 학습한 고등학교 3학년 자연계열 학생들을 대상으로 Geogebra를 활용한 분석적 방법을 통해 삼각형의 내접원, 외접원 작도에서 사면체의 내접구, 외접구 작도로의 유추적 발견 과정을 분석하였다.

학생 10명을 연구 대상으로 선정하여 분석적 방법을 경험한 학생들과 그렇지 않은 학생들에 대해서 본집단과 비교집단으로 각각 5명씩 구성하여 사면체의 내접구, 외접구 작도 과정을 살펴보았다. 본집단과 비교집단 모두 삼각형의 내접원, 외접원 작도에 대한 정확한 사전지식이 학습되어 있으나 사면체의 내접구, 외접구 작도를 어려워하였다. 하지만 분석적 방법으로 Geogebra를 활용해 삼각형의 내접원, 외접원의 작도과정을 거꾸로 찾아가며 작도방법을 탐구한 본집단의 학생들은 스스로 작도방법을 유추하여 사면체의 내접구, 외접구의 작도방법을 찾아내는 유추적 발견이 가능하였다.

Geogebra를 통해 시각화가 이루어짐으로써 도형의 조작과 탐구가 가능하였고 변화과정을 직접 살펴봄으로써 학습자 자신의 유추 과정을 즉각적으로 확인하고 피드백 할 수 있었다. 또한 추론 결과에 대한 정당성을 부여할 수 있었을 뿐만 아니라 기하 탐구에 대한 수학적 태도에 긍정적인 영향을 주었다.

주요용어 : 분석적 방법, Geogebra, 내접원, 외접원, 내접구, 외접구, 유추

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학은 오랜 역사를 거치는 동안 인류 문명 발전의 원동력이 되어 왔고 세계화·정보화가 가속화되는 현재뿐만 아니라 미래 사회 구성원들에게 필수적인 역량을 제공한다. 학생들은 수학을 통해 생활에서의 수학적 규칙성과 구조의 아름다움을 음미할 수 있고, 더 나아가 수학의 지식과 기능을 활용하여 수학 문제뿐만 아니라 실생활 문제를 해결하고 다른 교과의 문제까지도 창의적으로 해결할 수 있다.

---

* MSC2010분류: 97G50, 97Q30
1) 대전용산고등학교 (countblow@naver.com)
2) 충북여자고등학교 (choiok1833@hanmail.net)
3) 공주대학교 (dwpark@kongju.ac.kr), 교신저자

NCTM(2000)에서는 ‘추론과 증명’ 규준에서 학생들이 추론과 증명을 수학의 가장 근본적인 측면으로서 인식하고, 수학적 논쟁과 증명 능력을 개발하고 평가할 수 있어야 한다고 주장하고 있다.

그러나 학생들의 증명의 본질에 대한 이해나 증명 능력은 매우 낮은 수준으로, 증명의 의미와 필요성을 인식하지 못하고 있음이 보고되고 있다(우정호, 2003).

분석법은 증명 방법을 찾을 수 있는 좋은 방법의 하나로 제안되어 왔었고 작도나 증명 문제를 해결하는데 유용하게 사용될 수 있는 방법이지만 종이에 3차원 그림을 정확히 작도하는 것은 쉽지 않고 한번 그리고 나면 수정하기가 어려워 많은 시간과 노력을 필요로 한다. 하지만 21세기에 접어들면서 급속도로 컴퓨터 관련 산업이 발달함에 따라 정치, 경제, 사회, 문화에서도 큰 변화가 이루어지고 있다. 교육 현장인 학교에서 이루어지는 수학교육에도 활발한 교수학습 매체의 변화 바람이 일어나고 있으며 최근 대두되고 있는 Geogebra는 그 변화 역할의 한 축을 맡고 있다.

Geogebra는 Geometry(기하학)과 Algebra(대수학)이 합쳐져서 만들어진 단어로 기하, 대수, 미적분, 통계 및 이산수학을 쉽게 다룰 수 있는 무료로 사용 가능한 교육용 수학 소프트웨어이다. 특히 대수와 기하를 접목하여 이를 유용하게 활용할 수 있다는 큰 장점이 있으며 메뉴들도 다른 여러 프로그램에 비하여 부족할 것이 없고 학교 현장에서 사용하기에 필요한 도구들이 거의 들어가 있다.

지오지브라는 2002년 오스트리아 잘츠부르크의 마르쿠스 호헨바터에 의해 개발되었다. 그는 자신의 석사논문 주제로 DGS(Dynamic Geometry Software)와 CAS(Computer Algebra System)가 결합된 기능을 갖는 소프트웨어를 구현하였다.

이후 지오지브라의 개발은 Austria Academy of Science의 지원 하에 마르쿠스 호헨바터의 박사 논문 프로젝트로 진행되었다. 2006년 이후로 지오지브라의 개발은 미국의 플로리다 아틀란틱 대학에서 계속되었고, 그 곳에서 마르쿠스 호헨바터 박사는 미국 과학 재단(NSF; National Science Foundation)의 지원 하에 교사 연수 프로그램을 진행하였다(최경식, 2013).

이처럼 Geogebra가 최근 크게 대두되는 이유 중에 하나가 시각화를 통한 조작활동인데 문제의 이해, 접근, 풀이에서 학생들이 도형을 조작하거나 변형하면서 관련 이미지를 생성하여 문제해결의 결정적인 힌트를 지필환경에서보다 쉽게 얻을 수 있는 장점이 있다.

시각적 이미지는 보다 높은 추상적 단계에 도달하기 위한 하나의 수단으로써 도형의 개념과 명제들 사이의 형식적인 관계에 대한 이해와 문제에 대한 분석을 도와줌으로써 귀납, 유추, 분석 등의 추론을 가능하게 해준다(류현아, 2008).

유추가 수학 교육에서 중추적 역할을 수행하고 있음은 최근 교육과정을 통해서도 확인할 수 있다. 유추라는 용어가 교육과정에 포함된 것은 2007 개정 교육과정부터이다. 2007 개정 교육과정 및 2009 개정 교육과정에서는 ‘수학적 과정’의 하위 요소로 수학적 추론을 제시하였으며 여전히 추론 교육을 강조하였다. 또한 교수·학습 방법에서는 유추를 통하여 교수·학습할 것을 강조하고 있으며, 유추의 고유 특성을 인정하여 귀납과 분리하여 제시하고 있다(정미미, 2014).

2015 개정 교육과정에서는 수학적 사실을 발견하기 위한 추론의 하위 요소로 ‘관찰과 추측’을 두고 그 의미를 관찰과 탐구 상황에서 귀납, 유추 등의 개연적 추론을 사용하여 수학적 사실을 추측하는 능력이라 정하였으며 유추하기의 기능을 강조하고 있다.

교육부(2015)에 의하면 현 고등학교 3학년은 2009 개정 교육과정에 해당되는 학년으로 기하영역과 관련하여 중학교 때 삼각형의 내심과 외심의 작도방법 및 성질을 학습한 후 고등

학교에 입학해서 수학I-평면부터 기하와 벡터-공간을 학습한다. 이 과정에서 평면에서 공간으로 차원을 한 단계 더 확장을 하는 과정에서 자연스럽게 유추 학습이 이루어진다.

본 연구에서는 분석적 방법을 통한 2차원 삼각형에서 내심, 외심을 경험한 학생들과 그렇지 않은 학생들이 3차원 사면체의 내접구, 외접구로의 유추활동을 Geogebra로 확인하고 분석하고자 하였다.

이를 위해 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

연구문제 1. 삼각형의 내심, 외심을 분석적 방법을 경험한 학생들과 그렇지 않은 학생들이 사면체의 내접구, 외접구로의 유추가 어떻게 나타나는가?

연구문제 2. Geogebra가 분석적 사고를 통한 유추활동에 어떻게 긍정적으로 작용하는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 분석적 방법

실제적인 문제해결에서 전형적으로 유용한 발견과 발명과 규칙, 발견과 발명의 전략과 전술, 곧 발견술에 대한 연구는 그리스 시대까지 거슬러 올라가는 오랜 역사를 가지고 있다.

수학적 발견술 가운데 가장 강력하면서 가장 오래전부터 사용되어 온 방법은 분석법(analysis)이다. 분석법은 기원전 6세기경에 Pythagoras 학파의 수학자들에 의하여 사용되었으며 분석법을 처음으로 체계적으로 정리한 사람은 기원전 3세기경의 그리스 수학자 Pappus이다(우정호, 2000).

분석법은 역행적 추론이라고도 불리는 데, 찾고자 하는 것을 이미 찾은 것처럼, 증명해야 할 것을 참인 것처럼 가정하고, 바라는 결과가 이루어지기 위해 어떤 조건이 있어야 하는지를 묻고 이러한 과정을 계속 반복하여 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 것에 도달하는 방법이다. 이와 반대의 과정으로 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 명제에서 출발하여 논리적으로 자연스러운 과정을 따라 마지막에 찾고자 하는 것이나 증명해야 할 명제에 이르는 과정을 종합이라고 한다. 종합은 가정으로부터 결론을 논리적으로 유도하는 연역적인 증명이라 할 수 있다(김현라, 2014).

즉, 분석은 풀이 계획을 발견하는 과정이고 종합은 그 계획을 실행하는 과정이다. 증명문제에서 분석의 과정을 거꾸로 되밟는 연역과정인 종합이 곧 증명이다(우정호, 2000).

강윤수, 서은정(2009)의 연구에 따르면 삼각형의 외접원(내접원)에서 '두 변의 수직이등분선(각의 이등분선)의 교점에서 세 꼭짓점(변)에 이르는 거리가 같은 이유'를 묻는 연구에서는 분석적 방법이 유의미하게 작용하였다.

2. 유추

유추(類推)란 부분적인 유사성을 바탕으로 어떤 대상에 대하여 성립하는 성질이나 관계 체계로부터 그와 유사한 대상의 성질이나 관계 체계를 추측하게 하며, 부분적인 닮음을 근

거로 하여 어떤 상황에 대한 개념적 지식이 다른 유사한 상황으로 전이되어 관련된 개념적 지식을 형성하게 하는 형태의 개연적 추론을 말한다(우정호, 1998).

다시 말해서 '어떤 대상 A가 성질 $a_1, a_2, \cdots, a_n, x$를 갖고 있고 대상 B가 성질 $a_1, a_2, \cdots, a_n$을 갖고 있을 때 대상 B는 아마도 성질 x를 갖고 있을 것이다'라고 추측하는 인지조작이다.

Poincaré는 과학자들이 실험을 통해 과학적 법칙을 발견하듯이, 수학자들은 유추를 통해 수학적 법칙을 발명한다고 설명한다. 이미 오랫동안 알려진 지식이면서도 서로 다른 것처럼, 서로 관련이 없는 것처럼 다루어지다가 유추에 의해 적절히 연결됨으로써 분명한 관계가 드러나고 그것이 곧 수학적인 발견으로 연결된다는 의미이다(이경화, 2009). 수학자들은 경험적 판단을 통한 유추, 귀납적 추론의 방법으로 기존의 사실로부터 새로운 사실을 발견하고 이를 정당화하여 올바른 결론을 이끌어 왔다.

English(2004)는 유추는 수학교육에서 광범위하게 사용될 수 있는데, 수학적 법칙을 발견하기 위해서는 관찰된 사례의 공통적인 성질에 주목하여 일반적인 법칙을 추측하는 귀납 추론이 필요하며, 유추는 귀납 추론을 위한 중요한 도구가 된다(우정호, 2004; 반은섭, 2012; 재인용)

Polya(1986)는 문제의 제기가 수학을 창조하는 결정적 사고 단계이며 문제를 제기하고 형식화하는데 학생참여가 학습동기를 유발시켜 줌은 물론이고 올바른 과학적 태도를 가르치는 것이라고 강조한다. 그러나 문제를 발견하고 형식화하는 과정은 학교수학에서 대부분 결여되어 있으며 이는 학생들이 주어지는 수학 문제를 수동적으로 받아들이고 단순계산과 반복연습을 통한 답을 구하는 수준에 머무르게 하는 중요한 원인이 되고 있다. Polya는 문제 발견과정의 부재로부터 발생되는 학교수학의 이러한 문제점이 유추를 통해 보완될 수 있음을 보이고 있다(이승우, 2002; 재인용).

수학적 사고과정에서는 귀납, 유추, 추측이 있은 다음 증명이 뒤따른다. 수학적으로 사고한다는 것은 그것이 비록 하찮은 것이라고 하더라도 수학적 발견을 하는 것이고, 그것은 답을 구하는 문제이건 증명하는 문제이건 문제를 해결하는 것이다. 따라서 Polya는 귀납과 유추에 의한 '사려 있는 추측'을 통한 발견적 사고와 문제해결 교육의 중요성을 강조였으며 발견술은 방법적 지식이며, 이는 시범, 모방과 실행, 질문과 권고로 이루어진 언어의 미묘한 구사법, 곧 대화법에 의한 조력에 의하여 습득될 수 있다(우정호, 2000).

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구대상

대전광역시 소재인 Y고등학교 3학년 자연계열 174명 중 본 연구에 참여하기를 원하는 학생 30명을 모집하였다. 이 중에서 적합한 연구대상을 선정하기 위해 다음 두 가지 유형을 선정하였다.

첫째, 사면체의 내접구와 외접구 작도 방법을 정확히 알고 있는 학생들은 이미 작도방법에 대한 지식을 습득하고 있기 때문에 분석적 방법을 통한 사면체의 내접구와 외접구의 작

도 방법을 삼각형으로부터 유추적으로 발견해내는 본 연구방향과 부합하지 않는다.

둘째, 삼각형의 내접원과 외접원 작도가 완전히 불가능한 학생들은 공간에 만들어지는 사면체의 성질을 탐구하기 전에 삼각형의 내접원과 외접원의 작도방법 탐구 및 삼각형의 합동과 닮음 성질을 학습하는 것이 우선이므로 이보다 높은 수준인 사면체의 내접구와 외접구의 접근에 상당한 어려움이 있다.

희망자 30명에 대해 사전테스트를 실시한 후 그 결과를 위 기준에 근거하여 해당 유형에 속하는 학생들을 제외시키고 남은 학생 중 기하와 벡터 성적이 비슷한 10명에 대해 연구를 진행하였다.

2. 연구절차

30명을 대상으로 실시한 사전테스트 문항구성은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 사전테스트 문항구성

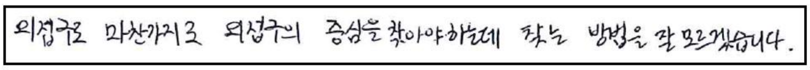
분류	문항번호	세부 문항
삼각형	1-(1)	삼각형의 내접원의 작도방법을 서술하시오.
	1-(2)	삼각형의 외접원의 작도방법을 서술하시오.
사면체	2-(1)	사면체의 내접원의 작도방법을 서술하시오.
	2-(2)	사면체의 외접원의 작도방법을 서술하시오.

사전테스트는 15분 동안 실시하였으며 응답학생 30명 중 문항번호 2-(1) 또는 2-(2)를 맞힌 학생들은 1-(1), 1-(2) 문항을 모두 맞혔으며 응답자의 43.3%에 해당하는 13명의 학생이 1-(1), 1-(2)의 작도방법은 정확히 설명하였지만 2-(1), 2-(2)의 문항에 접근하지 못하였다.

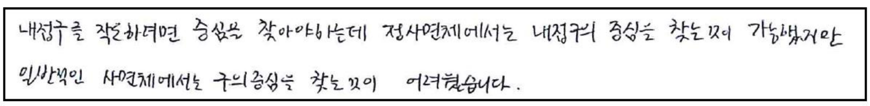
<표 Ⅲ-2> 사전테스트 응답결과

맞힌 문항개수	0문항	1문항	2문항	3문항	4문항	합계
정답 인원(명)	4	8	13	4	1	30

즉, 2차원에 나타나는 삼각형의 내접원과 외접원의 정확한 작도방법을 이미 학습하여 알고 있으나 3차원에 나타나는 사면체의 내접구와 외접구를 작도할 수 없는 학생이 13명으로 나타났고 면담결과 이들 학생 대부분은 다음과 같은 생각을 갖고 있음을 확인하였다.


외접구도 마찬가지로 외접구의 중심을 찾아야 하는데 찾는 방법을 잘 모르겠습니다.

[그림 Ⅲ-1] 2문항만 맞힌 학생의 응답결과 중 일부


내접구를 작도하려면 중심을 찾아야하는데 정사면체에서는 내접구의 중심을 찾는 것이 가능했지만 일반적인 사면체에서는 구의 중심을 찾는 것이 어려웠습니다.

[그림 Ⅲ-2] 3문항만 맞힌 학생의 응답결과 중 일부

본 연구는 고등학교 교육과정 중 기하와 벡터-공간도형과 직접적으로 관련이 있기 때문에 사전테스트 2문항을 맞힌 13명의 학생 중 3학년 1학기 때 실시한 기하와 벡터 정기고사를 기준으로 성적이 비슷한 학생 10명을 선정하였다. 10명을 5명씩 나누어서 A그룹, B그룹으로 분류하였으며 그 분류 기준은 <표 Ⅲ-3>과 같다.

<표 Ⅲ-3> A, B그룹 분류 기준

	A그룹	B그룹
학생 수	5명	5명
분석적 방법을 통한 유추 유무	×	○
Geogebra 유무	○	○

신동선, 류희찬(1998)에 의하면 분석법은 작도나 증명 문제를 해결하는 강력한 방법이지만 기존의 지필 환경에서는 작도 활동을 하는데 방법적인 한계가 있다. 정확한 그림을 그리기가 어렵고 한번 그려진 그림을 조작할 수 없기 때문에 충분히 훈련이 되어 있지 않으면 정확한 작도와 이를 통한 증명문제 해결이 어렵다.

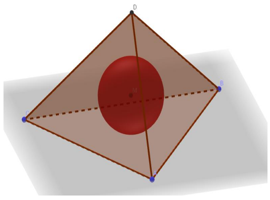
삼각형의 내접원, 외접원과 달리 사면체의 내접구와 외접구는 지필 환경에서 자세한 작도과정을 나타내기 어려울뿐더러 분석법으로 도형탐구에 한계가 있기 때문에 두 그룹 모두 Geogebra를 활용하였으며 사전에 Geogebra 조작법에 관한 수업을 30분씩 2회 진행하였다.

A그룹과 B그룹 모두 완성된 사면체의 내접구를 Geogebra로 먼저 제시하고 학생들이 이를 여러 방향에서 관찰, 꼭짓점을 이동시키는 조작활동을 통해 정사면체의 내접구의 움직임을 보며 사전테스트에서 발견하지 못한 사면체의 내접구의 작도방법을 스스로 발견하게 하였다. 그 다음 사면체의 외접구에 대해서 같은 방법으로 연구를 진행하였다.

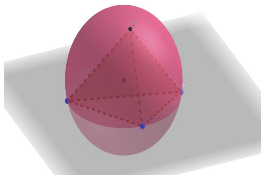
그러나 A그룹은 비교집단으로 완성된 사면체의 내접구, 외접구를 Geogebra로 탐구해보고 새로운 사면체의 내접구와 외접구를 작도하게 하였으며 B그룹은 본집단으로 A그룹과 같은 과정 이후 삼각형의 내접원과 외접원의 작도과정을 분석적 방법으로 살펴보고 그 작도방법을 사면체로 유추하여 사면체의 내접구와 외접구를 작도하는 연구절차를 <표 Ⅲ-4>과 같이 구성하였다.

<표 Ⅲ-4> A그룹과 B그룹 연구 진행절차

그룹	절차
A	1) 제시된 사면체의 내접구 관찰 → 작도 방법 발견 → 직접 사면체의 내접구 작도 및 확인 2) 제시된 사면체의 외접구 관찰 → 작도 방법 발견 → 직접 사면체의 외접구 작도 및 확인
B	1) A 1)과 동일 2) A 2)와 동일 3) 삼각형의 내접원 관찰 → 분석적 방법으로 삼각형의 내접원 작도과정 추적 → 사면체의 내접구 작도방법 유추 → 새로운 사면체의 내접구 작도 및 확인 4) 삼각형의 외접원 관찰 → 분석적 방법으로 삼각형의 외접원 작도과정 추적 → 사면체의 외접구 작도방법 유추 → 새로운 사면체의 외접구 작도 및 확인



[그림 Ⅲ-3] 완성된 사면체의 내접구



[그림 Ⅲ-4] 완성된 사면체의 외접구

A그룹과 B그룹 각각 4차시, 6차시로 연구가 진행되었고 2차시를 블록으로 묶어 2회, 3회로 수업이 이루어졌다. 진행 중에도 필요한 경우 연구자가 학습자에게 질의를 통하여 학생들의 사고 과정을 분석하였다.

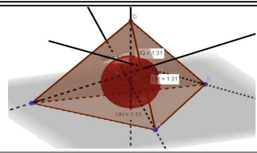
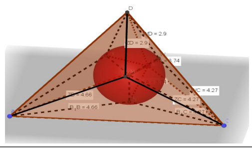
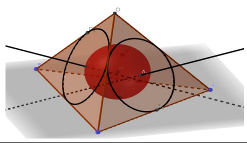
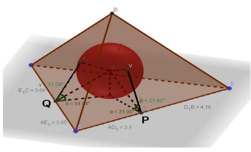
Ⅳ. 연구 결과

1. 삼각형의 내접원에서 사면체의 내접구로의 유추

분석적 방법을 경험하지 못한 A그룹 5명의 학생에 대해서 Geogebra로 [그림 Ⅲ-3]을 제시하고 스스로 조작해보며 작도방법을 찾도록 하였으나 <표 Ⅳ-1>에 제시된 조작활동까지 하고 사면체의 내접구의 작도방법을 아무도 찾지 못하였다.

A그룹 학생의 미완성 결과를 유형별로 P1, P2, P3, P4로 분류하였다.

<표 Ⅳ-1> A그룹 학생 5명의 내접구 사전 조작활동

학생	사면체의 내접구 작도 활동	Geogebra 조작화면
A1	[P1 유형] 사면체의 각 꼭짓점에서 다른 면에 내린 수선의 교점이 내접구의 중심이라 추측한 활동	
A2	[P2 유형] 내접구의 중심의 사면체 각 면 위로의 정사영이 그 면에서 어떤 점이 되는지 탐구한 활동	
A3	[P3 유형] 각 면의 내접원의 중심에서 그 면에 수직으로 그은 직선들의 교점이 내접구의 중심이라 추측한 활동	
A4	[P4 유형] 내접구의 중심에서 삼수선의 정리로 사면체 변 위의 한 점을 찾고 그 점에서부터 각의 이등분선의 교점이 내접구의 중심이라 추측함. 하지만 변 위의 점을 어떻게 찾는지 고민하다가 탐색을 포기한 활동	
A5	[P3 유형]	A3와 동일

5명의 학생 중 내접구의 작도방법에 가장 근접한 학생은 A4학생이다. 면담결과 A4학생은 사면체 각 변 위의 점을 P, Q라 할 때 점 P, Q를 찾기만 하면 아래와 같은 순서로 사면체의 내접구가 작도가능하다고 주장하였다.

① 교선 위의 점 P에서 교선을 포함하는 각각의 평면에 수직인 선을 작도한다.

② 마찬가지 방법으로 Q에서 각각의 평면에 수직인 선을 작도한다.

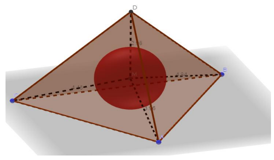
③ 두 선의 교점이 사면체의 내접구의 중심이 된다.

하지만 사면체의 내접구가 없는 상황에서 변 위의 점 P, Q를 찾는 방법을 도저히 찾아낼 수가 없어 작도를 할 수 없었다고 응답하였다.

A그룹 학생 5명에 대한 응답은 A3, A5학생이 같은 생각으로 접근을 하였으며 나머지 학생들도 작도방법을 찾는 과정이 명확한 기준 없이 각자 다른 생각을 갖고 접근하였다.

한편, 분석적 방법을 경험한 학생들이 속한 B그룹의 사전 조작활동 및 유형별 응답인원은 <표 Ⅳ-2>, <표 Ⅳ-3>과 같이 나타났고 추가적으로 P5유형을 분류하였다.

<표 Ⅳ-2> B그룹 학생 5명의 내접구 사전 조작활동

학생	사면체의 내접구 작도 활동	Geogebra 조작화면
B1	[P1 유형]	A1와 동일
B2	[P3 유형]	A3와 동일
B3	[P4 유형]	A4와 동일
B4	[P5 유형] 내접구의 중심에서 사면체의 각 꼭짓점으로 선분을 연결하여 길이를 측정하는 활동	
B5	[P2 유형]	A2와 동일

<표 Ⅳ-3> A, B그룹의 유형별 응답인원수

유형	[P1 유형]	[P2 유형]	[P3 유형]	[P4 유형]	[P5 유형]	합계
인원(명)	2	2	3	2	1	10

사면체의 내접구가 주어졌을 때 학생들은 여러 가지로 자기의 추측을 검증해보려고 시도하였으며 이 중 [P2 유형]의 응답으로 분류되는 학생이 2명으로 전체의 20%를 차지했으며 이 2명은 사면체의 내접구의 중심에서 사면체의 각 꼭짓점으로 선을 이어보고 성립하는 다른 성질들을 찾아보려고 하였음을 알 수 있었다.

A그룹, 차별화된 B그룹에 대한 연구로 분석적 방법을 통한 삼각형의 내심의 작도방법을 찾기 위해 연구자와 학생들이 나눈 대화의 일부를 발췌하여 정리하였다.

연구자 : Geogebra에 삼각형의 내접원이 나타나있는데 내심의 작도방법을 거꾸로 살펴보면서 내심을 어떻게 찾을 수 있을까?

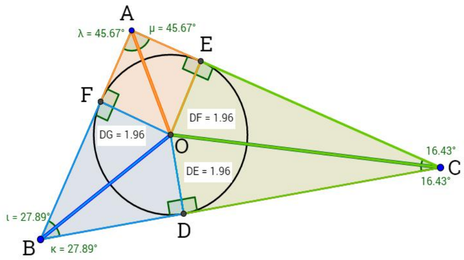
일동 : 각의 이등분선의 교점이요

연구자 : 각의 이등분선이라는 건 어떻게 알 수 있을까?

B2 : 내심에서 각 변에 수선을 내리면 이것처럼 합동인 직각삼각형 3쌍이 나타나요. 그래서 화면처럼 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$가 각의 이등분선이 되요.

연구자 : 왜 합동이 된다고 생각했니?

B2, B5 : 내접원은 각 변에 접해서 수직이고 내접원의 반지름이 일정하니깐 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$를 공통으로 하는 합동인 직각삼각형이 2개씩 3쌍 만들어져요.



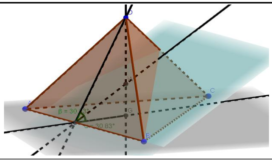
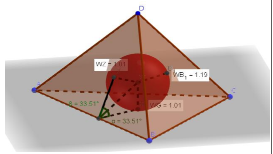
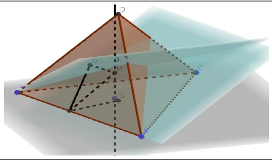
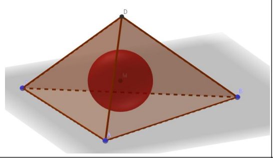
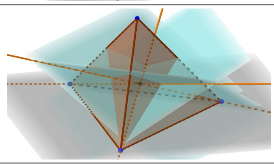
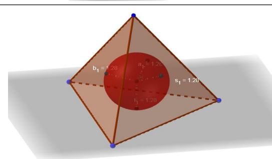
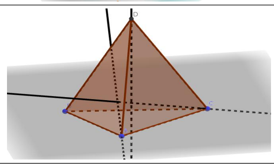
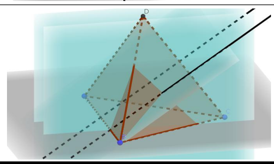
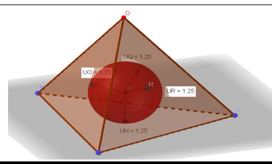
[그림 Ⅳ-1] 삼각형의 내접원 작도의 분석적 방법의 접근화면

연구자 : 방금 살펴본 방법을 사면체에도 적용시켜 내접구를 작도해보자.

학생들은 삼각형의 내심이 각의 이등분선의 교점이 된다는 사실에 대한 이유를 발견하기 위해 완성되어 있는 삼각형의 내심으로부터 출발해 각의 이등분선의 발견까지 삼각형의 내심 작도과정을 역으로 찾아가는 경험을 하였다.

사면체의 내접구를 이와 같은 방법으로 접근하여 작도 과정을 발견하기 위해 처음 제시된 [그림 Ⅲ-3]의 완성된 사면체의 내접구를 다시 분석하고 새로운 사면체의 내접구를 직접 작도하게끔 목표를 설정하게 하였다. 이 때 유추과정에서 어떤 사항을 활용할지를 학습지에 정리하며 Geogebra로 탐구할 시간을 40분 동안 갖게 한 뒤 결과를 발표하게 하였다.

<표 Ⅳ-4> 분석적 방법을 통한 사면체의 내접구 작도 결과

학생	사면체의 내접구 작도 과정	작도 결과	작도 설명	완성 여부
B1			꼭짓점에서 변, 면에 수선을 내려 삼수선의 정리에 해당하는 변끼리의 각의 이등분선을 작도	×
B2			꼭짓점에서 삼수선의 정리로 면의 이등분면을 3개 작도하여 교점 발견	○
B3			꼭짓점에서 삼수선의 정리로 면의 이등분면을 3개 작도하여 교점 발견	△
B4		좌동	꼭짓점에서 다른 면으로 수선을 내려 교점 발견	×
B5			각의 이등분면 작도를 위해 각의 이등분선 2개를 작도하여 평면 작도 후 교점 발견	○

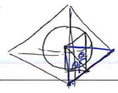
Geogebra로 만나는 두 면을 이등분하는 면을 작도하는 것이 직접적으로 불가능하기 때문에 학생들에게 큰 부담으로 작용되어 상당부분의 시간이 할애되었다. 만나는 면의 이등분면을 작도하는 방법에 대해 B그룹 학생들 모두 어려워하여 교육과정에서 배우는 이면각, 이면각의 크기, 삼수선의 정리를 연구자가 다시 상기시켜주어 학생들에게 교육과정 내용 적용의 기회를 제공하였다.

B5 학생의 경우에는 정사면체 내접구를 작도할 때 각 면을 이등분하는 면의 교점이 내접구의 중심이라는 추측을 하고 이를 Geogebra로 확인을 하려 하였으나 Geogebra를 다루는 기술이 많이 미비하여 연구자의 도움을 얻어 이면각의 크기를 측정하는 방법을 활용해 복잡하지만 이면각의 크기를 이등분하는 직선 2개를 작도하고 그 직선 2개로 결정되는 평면을 나타내었다.

B3 학생은 처음에 B1 학생의 방법으로 접근을 하였으나 구가 내접하지 않는다는 것을 알고 고민하던 중 B2 학생의 만나는 면의 이등분면의 작도 방법 질문을 듣고 이등분면의 작도로 방향을 잡아 완성한 경우이기 때문에 △로 평가하였다.

결과적으로 B그룹 5명의 학생 중 3명이 정사면체의 내접구를 정확히 작도해냈으며 그 3명 학생은 아래와 같은 사고과정으로 작도를 시도하였다고 서술하였다.

<표 Ⅳ-5> 분석적 방법을 통한 내접구의 유추 사고과정 서술 내용

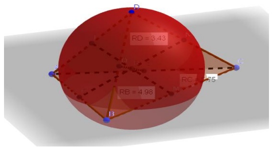
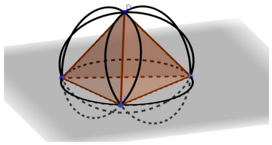
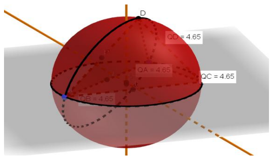
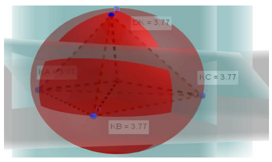
학생	서술 내용
B2	삼각형의 내접원의 **작도방법을 거꾸로 탐구**해가며 찾은 방법을 사면체의 내접구 작도로 유추할 때 어떤 사항을 활용할 수 있을지 적어보자. 삼수선 정리를 이용하여 만나는 면의 이등분 선을 하나 찾고 그 선과 다른 점을 포함하는 평면을 각각 만들어서 평면들이 만나는 점을 찾아보겠다. 
B3	삼각형의 내접원의 **작도방법을 거꾸로 탐구**해가며 찾은 방법을 사면체의 내접구 작도로 유추할 때 어떤 사항을 활용할 수 있을지 적어보자. 삼각형은 3개의 선으로 이루어져있고 사면체는 4개의 면으로 이루어져 있다. 삼각형에서 만나는 2개의 선이 이루는 각을 이등분한다면, 사면체에서는 면이 2개가 만나기 때문에 만나는 2개의 면이 이루는 이면각을 이등분하는 면이 필요하다. 따라서 이 면들이 만나는 곳을 찾으면 내접구를 작도할 수 있을 것 같다.
B5	삼각형의 내접원의 **작도방법을 거꾸로 탐구**해가며 찾은 방법을 사면체의 내접구 작도로 유추할 때 어떤 사항을 활용할 수 있을지 적어보자. 2차원에서 선이 모여 삼각형이 되었다면 3차원은 면이 모여 사면체가 된다. 삼각형이 각의 이등분선의 교점이라면 사면체는 면의 이등분선 또는 면을 이등분하는 면들의 교점이 될 것이다.

3명 학생 모두 평면에서 공간으로 확장을 할 때 직선이 평면으로 확장되는 변화에 주목하여 스스로 작도를 시도하였다는 점에서 분석적 방법을 통한 유추적 발견과정이 이루어졌음을 확인할 수 있다.

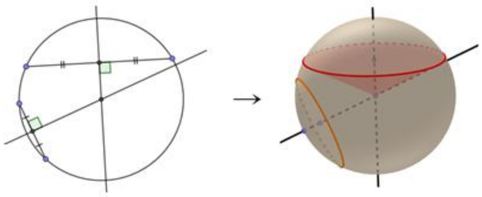
2. 삼각형의 외접원에서 사면체의 외접구로의 유추

분석적 방법을 경험하지 못한 A그룹 5명의 학생에 대해서 Geogebra로 [그림 Ⅲ-4]가 나타난 사면체의 외접구를 제시하고 스스로 조작해보며 작도방법을 찾도록 하였으나 A그룹 학생 5명 중 1명이 완성된 Geogebra를 통해 사면체의 외접구 작도방법을 정확히 발견하였으며 2명은 우연의 일치로 찾았고, 나머지 2명은 <표 Ⅳ-6>에 제시된 활동까지 진행하였다. A그룹 학생의 미완성 결과를 유형별로 Q1, Q2로 분류하였다.

<표 Ⅳ-6> A그룹 학생 5명의 외접구 사전 조작활동

학생	사면체의 외접구 작도 활동	Geogebra 조작화면
A1	[Q1 유형] 꼬인 위치에 있는 변의 중점끼리 연결한 교점이 외접구의 중심이라 추측하고 이를 찾고자 하는 활동	
A2	[Q2 유형] Geogebra의 세 점을 지나는 원을 작도하는 아이콘으로 삼각형의 외접구만 작도한 활동	
A3	삼각형의 외심에서 그 면에 수직으로 그은 선들의 교점이 외접구의 중심이 된다는 것을 작도하는 활동	
A4	각 변의 수직이등분 평면의 교점이 외접구의 중심이 된다는 것을 작도하는 활동	
A5	A3와 동일	A3와 동일

A그룹 5명의 학생 중 A4 학생이 새로운 사면체의 외접구 작도가 과정부터 결과까지 정확히 인지를 한 상태로 이루어졌다. A4 학생과 다른 방법을 탐구한 A3, A5 학생은 내접구 작도를 시도한 방법처럼 삼각형마다 외접원을 작도하고 그 외접원에서 수직으로 그은 선들의 교점을 외접구의 중심으로 생각하였지만 이는 면담결과 우연으로 외접구의 중심을 찾은 상황이었다. 사실 이 추론은 [그림 Ⅳ-2]처럼 1학년 때 학습했던 2개 현의 수직이등분선의 교점으로 원의 중심을 찾을 수 있는 방법을 3차원으로 유추하여 구 위에 2개의 원의 중심을 각각 지나고 그 원을 포함한 평면에 수직이 되는 직선의 교점으로 구의 중심을 찾을 수 있는 방법으로 응용되었다.

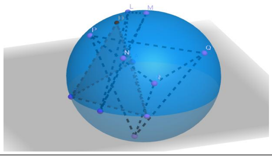
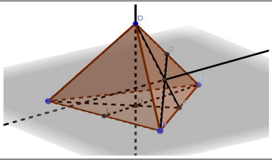


[그림 Ⅳ-2] 원의 중심 찾기에서 구의 중심 찾기로의 유추

A4학생은 평면에서 선이 공간에서 평면으로 확장되는 사실을 상기하여 각 변을 수직이등분하는 평면으로 교점을 찾은 결과 정사면체의 외접구 작도가 가능하였다.

한편, 분석적 방법을 경험한 학생들이 속한 B그룹에서는 2명이 정확한 작도를 완성하였다. 학생들의 사전 조작활동 및 유형별 응답인원은 <표 Ⅳ-7>, <표 Ⅳ-8>과 같이 나타났고 추가적으로 Q3, Q4유형을 분류하였다.

<표 Ⅳ-7> B그룹 학생 5명의 외접구 사전 조작활동

학생	사면체의 외접구 작도 활동	Geogebra 조작화면
B1	[Q3 유형] 여러 개의 사면체가 이루는 선분의 교점이 외접구의 중심이라 추측하고 이를 찾고자 하는 활동	
B2	A4와 동일	A4와 동일
B3	[Q1 유형]	A1과 동일
B4	[Q4 유형] 삼각형의 무게중심에서 면에 수직으로 그은 선들의 교점이 외접구의 중심이라 추측하고 이를 찾고자 하는 활동	
B5	A4와 동일	A4와 동일

<표 Ⅳ-8> A, B그룹의 유형별 응답인원수

유형	[Q1 유형]	[Q2 유형]	[Q3 유형]	[Q4 유형]	합계
인원(명)	2	1	1	1	5

[Q1 유형]에 해당하는 응답자가 2명으로 나타났다. 삼각형 외심을 작도할 때 각 변의 중점에서 수직으로 그은 선을 긋는 과정에 착안하여 사면체에서도 각 변의 중점을 택했지만 수직인 선을 하나만 작도하기가 어려워 꼬인 위치에 중점과 연결시키면 수직에 가깝게 나올 것이라는 추측으로 조작하였다고 응답하였다.

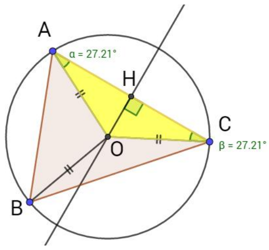
A그룹과 차별화된 B그룹에 대한 연구로 삼각형의 분석적 방법을 통한 작도방법을 찾기 위해 연구자와 학생들이 나눈 대화의 일부를 발췌하여 정리하였다.

연구자 : Geogebra에 삼각형의 외접원이 나타나있는데 외심의 작도방법을 거꾸로 살펴보면서 외심을 어떻게 찾을 수 있을까?

일동 : 변의 수직이등분선의 교점이요.

연구자 : 변의 수직이등분선은 어떻게 찾을 수 있을까?

B1, B3 : 외심에서 각 꼭짓점으로 선을 이으면 삼각형 AOC가 이등변 삼각형이 되어 옆에 각이 같아요.



[그림 Ⅳ-3] 삼각형의 외접원 작도의 분석적 방법의 접근화면

연구자 : 외심에서 삼각형의 변으로 어떤 작도를 할 수 있을까?

B3 : 수선의 발을 내리면 선분 OH가 선분 AC에 수직이 되요.

B5 : 이등분은 어떻게 해요?

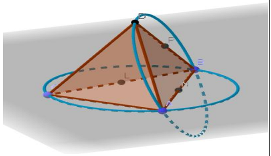
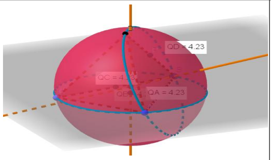
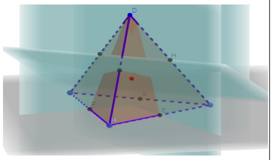
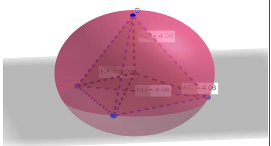
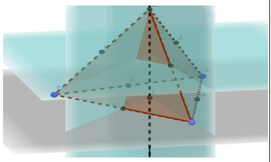
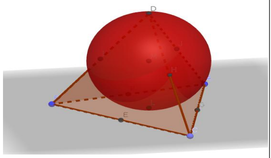
B2 : 삼각형 AOH와 삼각형 OCH가 합동이라 H가 점 A,C의 중점이 돼서 자동으로 이등분 조건도 만족해요.

연구자 : 방금 살펴본 방법을 사면체에도 적용시켜 외접구의 작도를 해보자.

학생들은 삼각형의 외심이 변의 수직이등분선이 된다는 사실에 대한 이유를 발견하기 위해 완성되어 있는 삼각형의 외심으로부터 출발해 변의 수직이등분선의 발견까지 삼각형의 외심 작도과정을 역으로 찾아가는 경험을 하였다.

처음 제시된 [그림 Ⅲ-4]의 완성된 사면체의 외접구를 다시 분석하고 새로운 사면체의 외접구를 직접 작도하게끔 목표를 설정하게 하였다. 사면체의 내접구 방법과 마찬가지로 이때에도 유추과정을 적으며 어떤 사항을 활용할지를 학습지에 정리하며 Geogebra로 탐구할 시간을 40분 동안 갖게 한 뒤 결과를 발표하게 하였다.

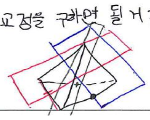
<표 Ⅳ-9> 분석적 방법을 통한 사면체의 외접구 작도 결과

학생	사면체의 외접구 작도 과정	작도 결과	작도 설명	완성 여부
B1			삼각형 외심에서 면에 수직으로 그은 선들의 교점 발견	△
B2			변의 수직이등분 평면의 교점 발견	○
B3	B2와 동일	B2와 동일	B2와 동일	○
B4			꼭짓점에서 평면에 내린 수선과 중점 3개를 포함하는 평면의 교점 발견	×
B5	B2와 동일	B2와 동일	B2와 동일	○

사면체의 내접구 작도와 달리 Geogebra로 각 변의 수직이등분 평면의 작도가 직접적으로 가능하기 때문에 학생들의 조작활동이 수월하게 이루어졌으며 B1 학생은 유추적 발견으로 평면을 생각한 것이 아니라 외심에서 면에 수직인 선을 그어 외접구의 중심을 발견한 활동으로 우연의 일치로 결과론적으로는 참이지만 유추적 과정이 아니기 때문에 △로 평가하였다.

B그룹 5명의 학생 중 작도과정을 포함하여 3명이 정확히 외접구를 작도해냈으며 아래와 같은 사고과정으로 작도를 시도하였다고 서술하였다.

<표 Ⅳ-10> 분석적 방법을 통한 외접구의 유추 사고과정 서술 내용

학생	서술 내용
B2	삼각형의 외접원의 **작도방법을 거꾸로 탐구**해가며 찾은 방법을 사면체의 외접구 작도로 유추할 때 어떤 사항을 활용할 수 있을지 적어보자. 선의 중점을 찾고 선에 수직이 되도록 평면을 그린다. 여러개 평면을 그려서 교점을 구하면 될거 같다. 
B4	삼각형의 외접원의 **작도방법을 거꾸로 탐구**해가며 찾은 방법을 사면체의 외접구 작도로 유추할 때 어떤 사항을 활용할 수 있을지 적어보자. 삼각형의 외심을 찾을 때 변의 수직이등분선의 교점으로 찾았는데 사면체는 입체니깐 외접구의 중심을 찾을 때는 변의 수직이등분선이 아니라 수직이등분면을 생각해서 교점을 찾아야 중심을 찾을 수 있을 것 같다
B5	삼각형의 외접원의 **작도방법을 거꾸로 탐구**해가며 찾은 방법을 사면체의 외접구 작도로 유추할 때 어떤 사항을 활용할 수 있을지 적어보자. 변을 수직이등분하는 직선 2개를 그리면 평면의 결정조건으로 평면을 만들수 있다. 이 방법을 계속해나가서 평면끼리 교점을 구하면 외접구의 중심일 것이다.

B2, B3, B5 학생 모두 같은 유추사고 과정을 경험했음을 알 수 있다.

위 3명의 학생 모두 사면체의 내접구 작도 활동 경험을 바탕으로 사면체의 외접구 작도에서도 마찬가지로 직선이 평면으로 확장되는 변화에 주목하여 스스로 작도를 시도하였다는 점에서 분석적 방법을 통한 유추적 발견이 이루어졌다.

3. Geogebra환경이 정사면체 내접구, 외접구 작도에 미치는 영향

연구대상에 속한 A그룹, B그룹 학생 10명은 중학교 때 교실의 지필환경에서 삼각형의 내심과 외심을 학습하고 실제로 학습지와 문제지에 작도를 한 경험이 있었으며 작도 과정에 아닌 작도 환경 자체에 대해서는 어려움을 느끼지 않았다고 한다. 하지만 기하와 벡터 공간도형 단원부터 3차원 문제를 다룰 때 지필환경에서 입체도형을 다루는 것에 어려움을 느끼고 있었으며 이는 본 연구과정에서도 학생들이 가지는 어려움으로 인식되었지만 Geogebra를 활용하기에 보다 편리한 조작과 도형의 움직임을 관찰할 수 있는 시각적 효과를 가져온다는 것이 확인되었다.

종이에 그리려니 구와 사면체가 겹쳐서 헷갈렸고 너무 복잡하게 생각되었다.
그런데 지오지브라로 나타내니 색깔도 조절이 가능했고 그림을 변형할 수 있어서 유용하였다.

[그림 Ⅳ-4] 지필환경과 Geogebra환경에 대한 학생들의 소감문1

평소에 공간도형도 그렇고 문제를 풀때는 3차원 그림을 그리기가 너무 어려워서 2차원으로 겨우 나타내고
문제를 풀고 했는데 수업에 참여하면서 지오지브라를 알게 되었고 프로그램 사용법만 조금 익히고 나니
여러가지 방법으로 도형을 움직여 보면서 관찰할 수 있어 좋았다. 그리고 문제풀이 과정이나 도형을
그리는 과정을 거꾸로 찾아가볼수 있어서 너무 신기했다.

[그림 Ⅳ-5] 지필환경과 Geogebra환경에 대한 학생들의 소감문2

Ⅴ. 결론 및 논의

본 연구결과를 바탕으로 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

첫째, 분석적 방법을 경험하지 못한 A그룹 학생들은 사면체의 내접구의 중심, 외접구의 중심을 찾는 활동에서 계획이나 절차 없이 무작위로 알고 있는 지식이 생각날때마다 그 방법을 동원하여 구의 중심을 찾으려고 하였으며 혹여나 우연의 일치로 외접구가 완성되었을 때는 절차보다 결과적으로 완성되었다는 것에만 의미를 두고 작도가 완벽히 이루어졌다고 생각하였다.

분석적 방법을 통해 삼각형의 내접원, 외접원의 작도과정을 거꾸로 찾아가보며 특징 및 성질을 분석해 탐구한 작도방법을 사면체의 내접구, 외접구로 유추를 시켰다. 그 결과 사전테스트에서 확인된 시작이 거의 불가능했던 사면체의 내접구, 외접구의 작도에 접근 및 조작이 가능할 수 있게 되었고 동시에 2차원과 3차원의 변화에 대해 자연스럽게 인지할 수 있었다.

삼각형의 내심은 각의 이등분선의 교점이다. 각의 이등분선은 두 변이 이루는 각을 이등분한 선을 일컫는데 이를 사면체의 내접구 작도로 유추할 때는 두 변이 두 면으로 확장되고 따라서 교점이 교선으로 확장되기 때문에 두 면이 이루는 각을 이등분하는 면의 교선을 작도하겠다는 유추적 발상이 핵심으로 작용하게 된다. 여기서 사면체의 내접구의 중심은 점이기 때문에 교선들의 교점을 찾기 위해 각을 이등분하는 면에서 교선을 찾고 다시 교선에서 교점을 찾는 단계로 정사면체의 내접구의 중심을 찾는 활동이 이루어졌다. 다만 Geogebra로 두 면이 이루는 각을 이등분하는 면을 직접적으로 작도할 수 있는 작도버튼이 없기 때문에 기하와 벡터에서 학습하는 이면각, 이면각의 크기, 삼수선의 정리의 내용이 필요하였다.

삼각형의 외심은 변의 수직이등분선의 교점이다. 이를 사면체의 외접구 작도로 유추할 때는 변의 수직이등분선이 변의 수직이등분평면으로 확장되고 따라서 교점이 교선으로 확장되기 때문에 변의 수직이등분평면을 작도하겠다는 유추적 발상이 핵심으로 작용하게 된다. 여기서 사면체의 내접구 작도방법과 마찬가지로 외접구의 중심은 점이기 때문에 교선들의 교

점을 찾는 활동이 더 이루어졌다. Geogebra로 변의 수직이등분평면을 매우 쉽게 작도할 수 있기 때문에 분석적 방법을 통한 유추적 발상만 할 수 있다면 정사면체의 외접구 작도는 내접구 작도보다 작도과정이 수월하였음이 학생들 응답결과 및 작도완성 인원, 작도 시간 단축으로 확인되었다.

또한 사면체의 외접구 작도에 있어 삼각형의 외접원 작도뿐만 아니라 사면체의 내접구 작도방법과 비교하며 간접적 유추가 이루어지기도 하였다는 점에서 이전 경험이 재구성되어 적용되었다.

이로써 A그룹과 B그룹에서 분석적 방법의 유무에 따라 유추과정이 어떻게 일어날 수 있는지를 살펴볼 수 있었다.

둘째, Geogebra를 활용하여 도형을 직접 관찰하고 조작해볼 수 있다는 점에서 학생들이 호기심을 갖고 접근하는 환경을 조성할 수 있었다. 또한 사전테스트에서 시작이 거의 불가능했지만 Geogebra로 도형의 회전, 길이와 각의 측정, 작도과정의 관찰 등의 조작활동을 스스로 해봄으로써 즉각적인 피드백이 가능하여 문제해결을 위한 반성적 사고가 원활히 이루어질 수 있었다. 이 과정에서 내접구와 외접구라는 확신을 가지고 추론결과에 대한 정당성을 부여할 수 있었고 더 나아가 공간도형에 대한 자신감을 증진시키는 계기로 이어졌다.

그리고 무엇보다 학생이 작도한 과정을 역추적해가면서 작도의 출발점을 찾아가는 활동이 가능하여 분석적 방법의 접근으로 자연스럽게 이어질 수 있었기에 학생 중심의 분석적 방법을 통한 유추활동이 가능하였다.

또한 내접구, 외접구가 됨을 확인하는 과정에서 구의 반지름을 쉽게 측정해보고 꼭짓점의 움직임을 통해 사면체에 접하는 구의 변화를 살펴보며 풀이에 대한 확신을 가지게 할 수 있었다. 이는 지필환경에서 2개 이상의 3차원 도형의 작도의 어려움 및 작도 후 관찰의 어려움 등 지필환경에서의 한계를 Geogebra로 해결할 수 있다는 것에 시사점을 준다.

본 연구자는 이번 연구를 통해 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구는 대전 Y고등학교 3학년 특정 학생 10명을 대상으로 연구를 진행하였기에 다른 환경에서는 본 연구결과와 다른 결과가 나타날 수 있다.

둘째, 수학교육에서는 유추에 의한 발견학습의 교육 범위가 상당히 넓게 진행될 수 있고 학생의 수학적 사고력을 증진시킬 수 있다는 점에서 여러 수학 단원과 내용에 대해서도 유추에 의한 발견학습의 추가적인 연구가 필요하다.

참고 문헌

강윤수, 서은정 (2009). 삼각형의 내·외심 지도방법 연구. **한국학교수학회 논문집, 12**(3). pp.171-188.

교육부 (2015). **2015 중·고등학교 교육과정 수학**(교육부 고시 제2015-74호)

김현라 (2014). **유추와 분석법을 활용한 초등수학영재들의 정사각형 분할에 관한 연구**. 한국교원대학교 석사학위 논문.

나귀수 (2009). 분석법을 중심으로 한 기하 증명 지도에 대한 연구. **대한수학교육학회지, 19**(2). pp.185-206.

나귀수 (2014). 수학 교사의 증명과 증명 지도에 대한 인식 - 대학원에 재학 중인 교사를 중심으로. **한국수학교육학회지, 28**(4). pp.513-528.

류현아 (2008). **중등 기하문제 해결에서 시각화와 추론 과정**. 건국대학교 박사학위 논문.

박경미 (2015). 2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정(교수·학습 방법 및 평가) 개발 연구. 한국과학창의재단.

신동선, 류희찬 (1998). **수학교육과 컴퓨터**. 경문사.

우정호 (1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울대학교 출판부.

우정호 (2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울대학교 출판부.

우정호 (2003). 역사발생적 수학교육 원리에 대한 연구(1) - 증명의 의미 지도의 역사발생적 전개. **대한수학교육학회지<학교수학>, 5**(4). pp.401-420.

우정호 (2004). **학교수학의 교육적 기초(증보판)**. 서울대학교 출판부.

이경화 (2009). 수학적 지식의 구성에서 유추적 사고의 역할. **대한수학교육학회지, 19**(3). 355.

이승우 (2002). 학교수학에서의 유추와 은유. **대한수학교육학회지, 12**(4). pp.523-542.

반은섭 (2012). 유추 조건에 따른 수학적 문제 해결 효과. **한국학교수학회, 15**(3). pp.535-563.

정미미 (2014). **수학교육에서 유추적 사고에 관한 연구**. 고려대학교 박사학위 논문.

최경식 (2013). **지오지브라 바이블**. 교우사.

English, L. D. (2004). *Mathematical and analogical reasoning of young leaders.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya. G. (1986). **어떻게 문제를 풀 것인가**. 우정호 역(2005). 교우사.

The Analogical Discovery from Inscribed and Circumscribed Circles of a Triangle to Inscribed and Circumscribed Spheres of a Tetrahedron Through the Analytical Method

Kim, Keun-Bae[4) · Choi, Ok-Whan[5) · Park, Dal-Won[6)

Abstract

This study targeting 10 high school 3rd grade students who have studied space figures in natural sciences track analyzes the process of analogical discovery from the construction of inscribed and circumscribed circles of a triangle to that of inscribed and circumscribed spheres of a tetrahedron through the analytical method using Geogebra.

The subjects are divided into two groups of five, the experimental group consisting of those who have experienced analytical method and the comparative group consisting of those who haven't. This research analyzing the process of constructing inscribed and circumscribed spheres of a tetrahedron. Although students of both groups all have an accurate preliminary knowledge of inscribed and circumscribed circles of a triangle, they have difficulty in constructing inscribed and circumscribed spheres of a tetrahedron. However, the students of experimental group who have studied the constructing process of inscribed and circumscribed circles of a triangle in reverse using analytical method and Geogebra can perform analogical discovery finding out the way to construct inscribed and circumscribed spheres of a tetrahedron using analogy by themselves.

They can control and explore space figures by visualization. Also, they can immediately examine and provide feedback on the analogizing process of their own. In addition, the process affects the attitude of students toward mathematics positively as well as gives validity to the result of analogy.

Key word : Analytical method, Geogebra, inscribed circle, circumscribed circle, inscribed sphere, circumscribed sphere, analogical discovery

Received November 13, 2017
Revised December 19, 2017
Accepted December 20, 2017

---

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97G50, 97Q30

4) DaeJeon Yongsan High school (countblow@naver.com)
5) ChungBuk Girl's High school (choiok1833@hanmail.net)
6) KongJu University (dwpark@kongju.ac.kr), Corresponding Author