

혼합유한요소를 통한 다공질매체의 요소분리해석

Analysis of Debonding between Mixed Finite Elements for Saturated Porous Media

탁 문 호¹⁾ · 이 장 근²⁾ · 반 호 기[†] · 강 재 모²⁾

Moonho Tak · Janggeun Lee · Hoki Ban · Jaemo Kang

Received: December 6th, 2016; Revised: December 28th, 2016; Accepted: January 20th, 2017

ABSTRACT : In this paper, we propose a new method to debond between mixed finite elements for porous media in ABAQUS (2014). ABAQUS just provides debonding algorithm for the u-p model using cohesive elements in standard version. However, this approach has a drawback that it is hard to simulate complex debonding problems like element separation, rigid body motion, and contact between separated elements in standard version. ABAQUS-explicit can resolve these complex problems, but cohesive elements for the u-p model cannot be applied. We introduce a new algorithm for debonding for porous media instead of using cohesive elements. In this method, subroutines VUMAT to apply constitutive models and VDISP to separate elements in ABAQUS are used to simulate debonding problems. In addition, a simple 2-D example is demonstrated in the ABAQUS-explicit solver.

Keywords : Debonding, Finite element method, Contact, Porous media

요 지 : 본 연구에서는 ABAQUS(2014)를 이용한 다공질 매체의 혼합유한요소해석에서 요소 간의 분리를 모사할 수 있는 방법을 제안한다. ABAQUS에서는 변위와 간극수압(u-p모델)의 자유도를 갖는 혼합유한요소의 분리를 standard(implicit) 버전 상에서 cohesive element와 함께 해석을 제안하지만, 요소 간의 이탈, 강체운동, 접촉 등과 같은 분리현상에 대해서는 경계조건 문제로 수치 해석상 한계가 있다. ABAQUS-explicit 해석에서는 경계조건 문제에 대해 자유롭지만 지금까지의 혼합요소 간의 분리를 제공하고 있지 않다. 그러므로, 본 연구에서는 ABAQUS-explicit 상에서 u-p 모델에 대한 분리를 모사할 수 있는 새로운 접근방법이 제안된다. VUMAT 서브루틴을 통하여 구성모델이 적용되고, 간극수압 변화에 따른 요소의 분리 조건을 판단한다. 그리고 VDISP 서브루틴을 통하여 요소의 분리를 발생시킨다. 이렇게 제안된 알고리즘은 간단한 2차원 다공질 매체 예제를 통하여 구현된다.

주요어 : 요소분리, 유한요소, 접촉요소, 다공질매체

1. 서 론

다공질 매체는 미시영역에서 고체, 액체, 기체 3상의 구성물질로 이루어진 재료이다. 그래서 다공질 매체에 관한 이론은 포화 또는 불포화된 지반을 모사하기에 적합하다. 이는 Terzaghi(1925)에 의해 처음 제안되었고, Biot(1941)에 의해 그 이론이 정립되었다. 이들은 1차원 압밀이론과의 비교를 통하여 검증되었는데, 현재는 3차원 지배방정식을 통하여 그 결과가 확장되고 있다.

다공질 매체에 대한 지배방정식은 연속체 역학을 기초로 유도된다. 일반적으로 미시영역에서 거시영역으로의 정보전달을 통하여 지배방정식을 정의하는데 부피비(Volume Fraction) 또는 REV(Representative Elementary Volume) 이론으로부터 거시영역의 지배방정식을 유도할 수 있다. 부피

비를 이용한 지배방정식에서는 Goodman & Cowin(1972), Bowen(1980)이 제안한 식이 대표적이고 REV 방식을 이용한 지배방정식으로는 Hassanizadeh & Gray(1979), Coussy(1995)가 제안한 식이 대표적이다.

지배방정식을 이용한 수치해석 또한 많은 연구가 진행되었다. 수치해석 중에서는 대표적으로 유한요소해석(Finite Element Method, FEM)을 꼽을 수 있는데, 앞에서 제안한 지배방정식들을 적용하기가 매우 수월하고 결과의 정확성이 매우 높은 장점을 갖고 있다. Zienkiewicz et al.(1980)은 혼합유한요소 기법을 사용하여 변위와 간극수압에 관한 해석적 방법을 제안하였는데, 다공질 매체에 대한 유한요소해석에서 많이 다루고 있는 u-p(displacement-pore pressure) 모델의 기초가 되는 접근방법이다. 또한 그들이 제안한 방법은 불포화된 다공질 매체에 대해 u-p-a(displacement -

1) Department of Civil and Environmental Engineering, Hanyang University

2) Geotechnical Division, Korea Institute of Construction Technology

† Department of Civil Engineering, Kangwon National University (Corresponding Author : hban@kangwon.ac.kr)

pore pressure - airpressure)로 확장할 수 있는 장점을 갖고 있다. 그러나 변위와 간극수압에 관한 방정식 차수의 차이로 인해 수치적 안정성은 매우 떨어지는 단점을 갖고 있다. 즉, 혼합유한요소 방정식을 선형화하여 풀어내는 과정에서 요소의 불연속성으로 구속조건에서의 역행렬 정의가 매우 제약적이다. 이를 해결하기 위해서 Park & Tak(2010)은 스테저드 방법을 제안하기도 하였다.

한편, 상용 유한요소해석 프로그램에서는 혼합유한요소를 사용하여 다공질 매체에 대한 해석이 가능하다. 가장 대표적으로 ABAQUS 프로그램을 꼽을 수 있는데, 재료 및 기하학 비선형 해석에서 매우 전문적으로 다룰 수 있다. 특히, 사용자가 재료구성방정식을 유도하고 적용하는 과정에서는 UMAT(ABAQUS-Standard)이나 VUMAT(ABAQUS-Explicit) 서브루틴을 적용을 통하여 무한한 확장성과 편리성을 제공한다.

현재까지 다공질 매체에 대한 이론, 수치적인 연구는 많이 진행되어왔다. 그리고 ABAQUS와 같은 상용프로그램도 간단한 포화된 다공질 매체의 거동에 대해서 비교적 정확하게 모사할 수 있는 단계까지 와 있다. 그러나 크랙이나 붕괴 등을 모사하기 위해서는 파괴역학, 손상역학, 충돌역학 등을 고려한 복잡한 구성모델링이 추가로 필요하다. 또한 이를 유한요소해석과 같은 수치적으로 풀기 위해서는 수치안정성을 고려한 요소 분리라는 특별한 기법이 필요하다. 크랙이나 붕괴 등을 모사할 수 있는 요소 분리기술은 수치안정성이 불안하여 다루기가 매우 까다롭다. 순수한 고체에 대한 요소분리는 ABAQUS를 포함한 대부분의 상용프로그램에서 지원을 하지만, 다공질 매체 재료를 고려한 혼합유한요소 분리 기술은 아직 초기단계에 머물러 있다. 수치적 안정성을 보장하는 standard(implicit) 버전에서만 지원을 하고 explicit 버전에서는 사용자의 알고리즘 개발과 코딩 능력을 요구한다. 본 연구에서는 ABAQUS-explicit 버전에서 지원이 미미한 다공질 매체 유한요소분리에 대해 새로운 알고리즘 개발을 통하여 모사하고자 한다. ABAQUS-explicit 버전은 요소 간의 이탈 및 붕괴 모사가 ABAQUS-implicit 버전보다 비교적 수월하다는 장점을 갖고 있으나 수치안정성의 이유로 혼합유한요소에 대한 분리는 적용을 안 하고 있다. 이는 재료에 대한 VUMAT과 하중에 대한 VDISP 서브루틴들의 개발을 통하여 모사가 가능하다.

2. 포화된 다공질 매체의 지배방정식

Biot(1941)이 제안한 포화된 다공질 매체에 대한 지배방정식은 질량평형방정식(mass balance equation)과 운동량평

형방정식(momentum balance equation)으로 나누어 정의할 수 있다. 질량평형방정식에서는 고체영역 안에서 유체유동에 관한 구성모델이 적용되고, 운동량평형방정식에서는 다공질 매체의 변형에 관한 구성모델을 적용할 수 있다.

2.1 질량 평형방정식

미시 구성물질이 고체, 유체로 구성되어 있고 고체영역을 기준으로 유체영역의 움직임을 상대적으로 고려할 때와 고체영역만을 고려할 때 연속방정식은 다음과 같이 각각 정의할 수 있다.

$$\frac{D^s n \rho^f}{Dt} + \nabla \cdot (n \rho^f \mathbf{v}^{fs}) + n \rho^f \cdot \mathbf{v}^s = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D^s (1-n) \rho^s}{Dt} + (1-n) \rho^s \nabla \cdot \mathbf{v}^s = 0 \quad (2)$$

여기서 n 는 공극률, ρ 는 밀도, \mathbf{v} 는 속도벡터를 나타내고 위치 s 와 f 는 각각 고체와 액체 영역을 나타낸다. 그리고 시간 미분항 $\frac{D^s}{Dt}$ 는 고체를 기준으로 물질시간도함수를 나타낸다. Eq. (1)과 Eq. (2)는 고체영역과 유체영역에 대한 연속방정식으로 고체 및 유체를 포함하는 전체영역에 대한 방정식은 합을 통하여 나타낼 수 있다. 이때 Biot(1941)이 제안한 상수 α 와 고체영역의 체적 탄성률 K^s , 유체영역의 체적 탄성률 K^f , 고체와 유체입자의 상대속도를 Darcy 법칙을 적용한 구성방정식들을 적용하면 Eq. (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{\alpha - n}{K^s} + \frac{n}{K^f} \right) \frac{\partial p^f}{\partial t} + \alpha \nabla \cdot \mathbf{v}^s + \frac{1}{\rho^f} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{k}}{\mu^f} (-\nabla p^f + \rho^f \mathbf{g}) \right) = 0 \quad (3)$$

여기서 \mathbf{k} 는 투수텐서, μ^f 는 동 점성계수, \mathbf{g} 는 중력 벡터를 나타낸다.

2.2 운동량평형방정식

거시 포화된 다공질 매체의 운동량평형방정식을 유도하기 위해서는 연속체의 가정으로부터 시작된다. 일반적인 연속체의 운동량평형방정식은 Eq. (4)와 같이 정의된다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (4)$$

여기서 $\boldsymbol{\sigma}$ 는 전응력 텐서를, ρ 는 전영역에서의 밀도, \mathbf{b} 는 체적력 벡터이다. 미시적 다공질 매체에서의 간극수압과 유

효율력의 관계를 Eq. (3)에 적용하면 Eq. (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla \cdot (\sigma' + I p^f) + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (5)$$

여기서 σ' 는 유효응력, \mathbf{I} 는 단위벡터이다.

2.3 유한요소를 위한 방정식

앞에서 소개한 Eq. (5)와 Eq. (3)에서 Dirichlet 조건과 Neumann 조건을 적용하면 Eq. (6)과 Eq. (7)과 같이 Weak Form 형태로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K}u - \mathbf{C}p^f = \mathbf{f}^s \quad (6)$$

$$\mathbf{C}\dot{u} - \mathbf{S}p^f + \mathbf{D}p^f = \mathbf{f}^f \quad (7)$$

여기서 u 는 변위, \mathbf{K} 는 강성매트릭스, \mathbf{C} 는 커플링매트릭스, \mathbf{S} 는 압축매트릭스, \mathbf{D} 는 투수매트릭스, \mathbf{f}^s 는 고체영역에 작용하는 하중, \mathbf{f}^f 는 유체의 유량이다. Eq. (7)은 시간에 따른 변위와 유체유동을 나타내는 식으로 지반에서는 압밀해석에 적용될 수 있다.

만약에 정적해석을 생각한다면 Eq. (7)에서 시간에 대한 첫 번째와 두 번째 항이 제거될 수 있다. 결국 Eq. (6)과 (7)은 Eq. (8)과 같이 시스템 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^s \\ \mathbf{f}^f \end{Bmatrix} \quad (8)$$

2.4 요소분리 알고리즘

ABAQUS에서는 시간해석의 방법에 따라 standard와 explicit 두 개로 나누어져 있다. 포화된 다공질 매체에 대한 해석은 standard 방법에서 CPE4P, CPE8P 등의 요소를 제공하고 있다. 그러나 충돌이나 파괴 등을 정확하게 모사할 수 있는 explicit 해석에서는 다공질 매체에 대한 요소를 제공하지 않아 VUEL이나 VUMAT 서브루틴을 사용하여 직접 요소를 만들어야 하는 불편함이 있다. ABAQUS에서 요소분리는 독립적인 요소끼리의 접촉문제를 다루는 분야 중 하나로 매 뉴얼에서는 요소 사이에 cohesive 요소를 추가하여 모사하는 것을 제안하고 있다. 그러나 다공질 매체에 대한 cohesive 모델들은 전 해석 과정이 매우 복잡하고 관련 메커니즘 식을 적용하기가 어렵다.

ABAQUS-implicit에서 cohesive 요소를 사용하는 방법과 다르게 ABAQUS-explicit에서의 *bond 옵션은 접촉하중의

허용범위만을 정하여 해석하는 매우 직관적인 방법이다. 이 옵션은 용접모델을 해석하기 위해 제공되는데 다공질 매체의 요소분리 현상에 대해서도 접목이 가능하다. *bond 옵션은 지정해준 절점에서 허용하중을 넘어섰을 경우에 인접 절점으로 부터 분리가 되는 현상을 모사한다. 이러한 해석의 직관성은 허용하중을 정확하게 알고 정의 했을 때 매우 큰 장점이 있는데, 유효응력이 0이 되는 시점, 즉 간극수압과 전 응력이 같아지는 시점에서 요소들의 분리조건 적용이 가능하다.

간극수압 영향에 의한 요소간의 분리 모사를 위해서 Fig. 1과 같은 절차를 따른다.

- 1) Pre-Processing 단계: 본 단계에서는 ABAQUS-CAE 모듈을 통하여 모델링을 시작하며, 모델링의 Part 단계에서는 분리가 되는 영역별로 독립적으로 모델링을 한다. 이때 분리가 되는 선(2차원)이나 면(3차원)에서는 절점들이 공유되어야 한다. Material 단계에서는 영역별로 재료 물성치를 정의하고 적용시킨다. 본 알고리즘에서는 각 Interaction별로 요소에서 발생하는 유효응력을 체크 해야 하므로 서브루틴 VUMAT을 사용한다. VUMAT 서브루틴을 적용하기 위해서 재료물성치들을 *User Material 항목을 사용하여 탄성계수와 프아송비, 밀도 등을 정의한다. Interaction 단계에서 *Surface Interaction을 정의한다. 이때 분리가 되는 접촉면에 대해 *Contact Pair를 통하여 Master Surface와 Slave Surface를 지정한다. 하중의 적용단계에서는 시간에 따른 하중의 변화를 적용시키

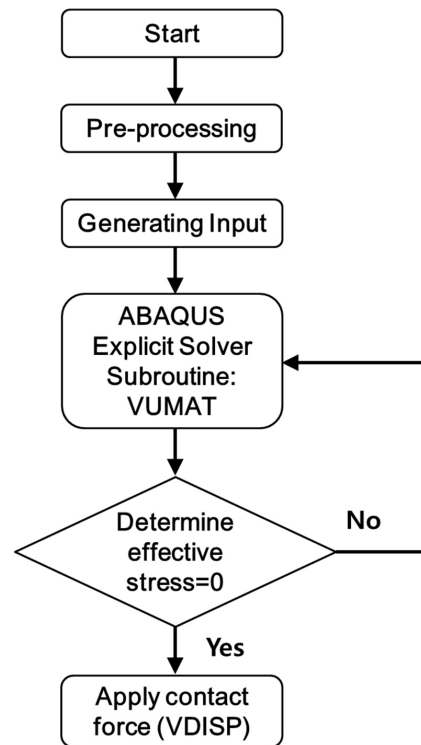


Fig. 1. Debonding algorithm

고, Step 단계에서 Explicit을 위한 시간간격을 정의한다.

- 2) input 파일 생성: Interaction에서 분리모델을 적용하기 위해서는 Pre-Processing 과정에서 생성되었던 Input 파일을 추가적으로 변경해야 한다. *Surface Interaction 항목에서 *Bond 옵션이 추가가 되어야 하는데 요소분리가 발생할 수 있는 영역에서의 절점셋, 법선한계하중, 전단한계하중, 요소분리시 허용변위 등을 결정한다.
- 3) ABAQUS Explicit Solver(VUMAT 사용): 서브루틴 VUMAT에서는 ABAQUS Solver가 계산했던 변형률 값들을 받아들이며 유효응력을 계산한다. 이때 재료의 탄성, 소성에 대해 코드를 작성할 수 있으며, 소성 한계면과 흐름이론 등을 통하여 허용응력의 업데이트 등을 수행할 수 있다.
- 4) 유효응력=0: VUMAT에서 계산된 유효응력이 0이 되는 시점을 판단한다. 모델의 모든 요소에서 유효응력을 체크하고 0에 가까운 값을 갖는 지점(요소)을 찾는다. 만약에 유효응력이 0이 되는 지점이 발생한다면 Step 5로 정보를 전달하고 유효응력이 존재하면 다시 ABAQUS Solver를 진행한다.
- 5) Contact Force 적용(VDISP): 서브루틴 VDISP에서는 Step 4 VUMAT에서 발생한 유효응력=0 지점의 정보를 받아서 Contact Force 하중을 적용시킨다. 하중의 값은 Step 2의 *Bond 옵션에서 정의한 한계하중보다 큰 임의 값을 적용시키며 하나의 시간간격에서 순간적으로 작용시킨다.

2.5 수치해석을 통한 검증

본 예제에서는 간극수압 변화에 따른 유효응력의 변화와 0 유효응력에서의 요소분리에 대한 알고리즘의 검증이 시도되었다. ABAQUS CAE 프로그램을 사용하여 2차원 모델에 대한 전처리 과정을 진행하였다. 모델은 Fig. 2와 같이 가로 40m, 세로 20m의 사각형 모델에 중앙에는 공동을 형성하였다. 총 16개의 독립영역에서 456개의 절점과 300개의 요소를 구성하였다. 각 요소는 4절점을 갖고 있는 CPS4R

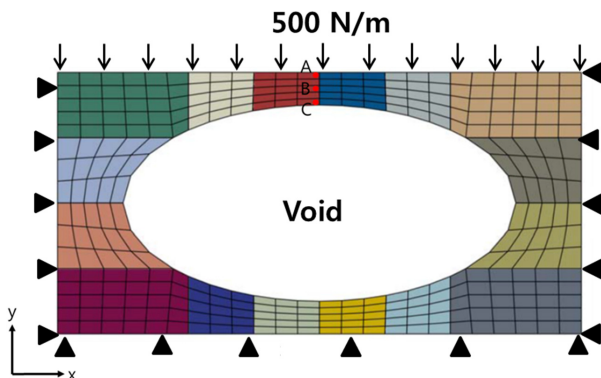


Fig. 2. 2D plane strain model

요소가 사용되었다. 모델의 가장 하단에는 각 방향에 대한 변위를 구속하였고, 모델의 좌우에는 수평방향에 대한 변위가 구속되었다. 재료의 모델을 위하여 VUMAT 서브루틴이 사용되었으며, 입력 값으로는 탄성계수가 3e6Pa과 프아송비 0.3을 적용시켰다. 각 독립영역 간의 접촉면에서는 총 16개의 *Bond 옵션을 사용하여 interaction을 정의하였으며, 면의 수직 및 수평 방향에 대한 한계하중은 모두 100,000kN로 설정하였다. 하중은 최상부에 모든 해석시간 동안에 5,000 N/m로 일정하게 작용시켰다. 모든 영역에서 간극수압을 고려한 초기 응력 값은 10kPa로 적용시켰다. 시간은 0.01초 간격으로 총 3초 동안 해석이 진행되었다.

Fig. 3과 4는 간극수압을 고려하지 않은 상태에서 하중을 작용시켰을 경우에 A, B, C 지점에서의 x, y방향 유효응력 값을 각각 나타낸다. 음의 값은 압축력, 양의 값은 인장력을 뜻한다. A에서는 하중 작용에 따른 요소끼리의 x방향의 압축응력이 증가하고 C에서는 x방향의 인장응력이 발생한다. y방향에 대한 유효응력은 시간에 따른 변화의 폭이 감소함을 볼 수 있다.

한편, Fig. 5와 6에서는 A, B, C 지점에서 간극수압이 매 시간간격 0.01초마다 1Pa씩 증가한다고 했을 때 debonding

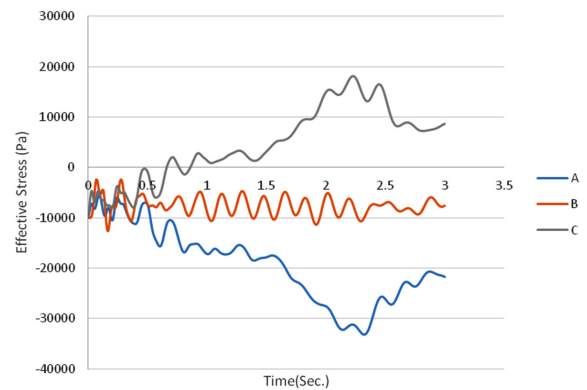


Fig. 3. Effective stress in x-direction when initial stress was applied

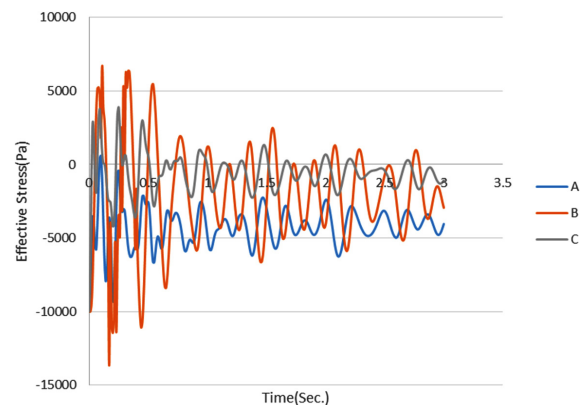


Fig. 4. Effective stress in y-direction when initial stress was applied

을 고려하지 않은 유효응력 그래프를 나타낸다. 각 지점에서 x방향 간극수압의 증가에 따른 압축유효응력이 인장유효응력으로 변하는 시점이 발생하는데 A지점에서는 2.66초, B지점에서는 1.45초, C지점에서는 0.64초에서 유효응력이 0이 된다. 유효응력이 0이 되는 지점을 요소의 분리가 되는 시점이라고 한다면, Fig. 1에서 제안한 알고리즘을 이용하여 유효응력이 0이 되는 요소에 대해 강제 하중을 작용시켜 분리시킬 수 있다. y방향 간극수압 증가에 따른 유효응력은 Fig. 4와 비교할 때 큰 차이를 보이지 않는다. 이는 A, B, C가 위치한 지점에서 y방향의 길이가 x방향의 길이보다 상대적으로 짧기 때문에 나타난 형상으로 보인다.

Fig. 5에서 보는 바와 같이 C 지점에서 유효응력 0가 가장 처음 발생하므로 요소분리 알고리즘(강제하중은 VDISP 서브루틴 이용)을 적용시키면 Fig. 7, 8과 같이 유효응력의 변화가 생긴다. Fig. 7은 0.64초에 요소분리가 진행됐을 때 x방향의 유효응력 변화에 대한 그래프이다. 요소분리 이전(Fig. 5)과 비교했을 경우 B지점에서는 인장유효응력이 증가하였고, 반대로 C지점에서는 압축유효응력이 증가하였다. 또한 B 지점에서의 유효응력 0 시점이 앞당겨진 것을 알 수 있다. y 방향에 대한 유효응력 변화도 x방향과 동일한 양상을 나타낼 수 있다. 즉, 한 절점에서의 분리는 다른 절점에서의 분리 환경에 매우 큰 영향을 미치는 것으로 판단할 수 있다.

Fig. 9, 10은 A, B, C지점에서의 요소들이 모두 분리된

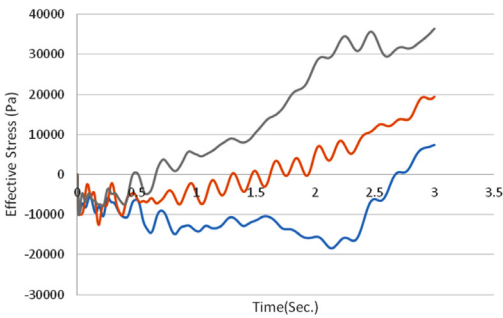


Fig. 5. Effective stress at A, B, and C in x-direction with pore pressure change

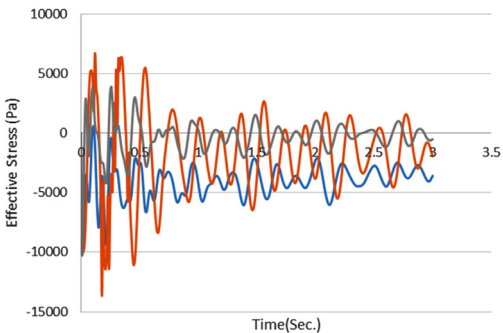


Fig. 6. Effective stress at A, B, and C in y-direction with pore pressure change

후 유효응력을 나타내고 있고 Fig. 11부터 14까지는 시간에 따른 A, B, C 지점에서의 x방향에 대한 유효응력과 요소분리를 그림으로 나타내고 있다.

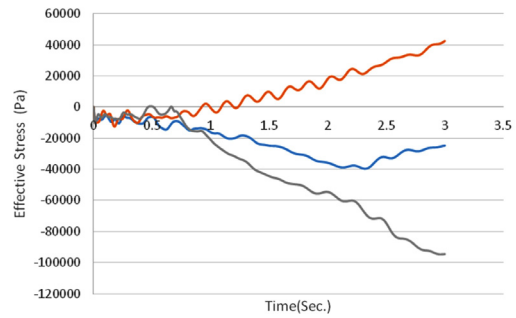


Fig. 7. Effective stress at A, B, and C in x-direction when debonding occurs at C

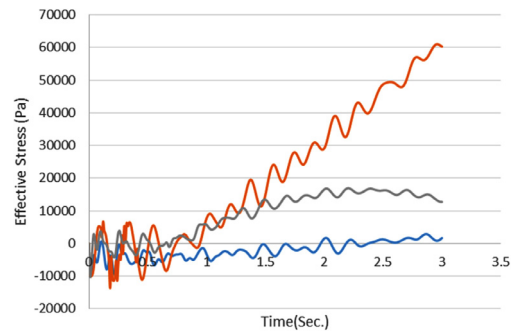


Fig. 8. Effective stress at A, B, and C in y-direction when debonding occurs at C

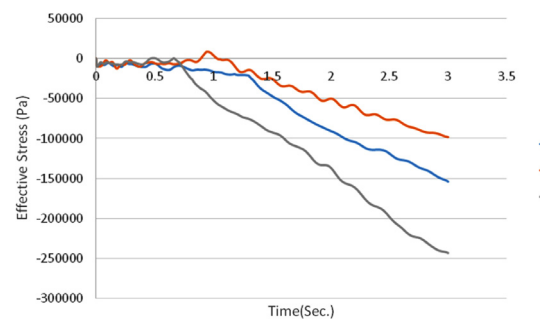


Fig. 9. Effective stress in x-direction when debonding occurs at A, B, and C

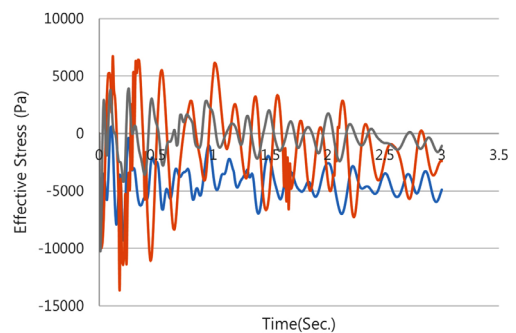


Fig. 10. Effective stress in y-direction when debonding occurs at A, B, and C

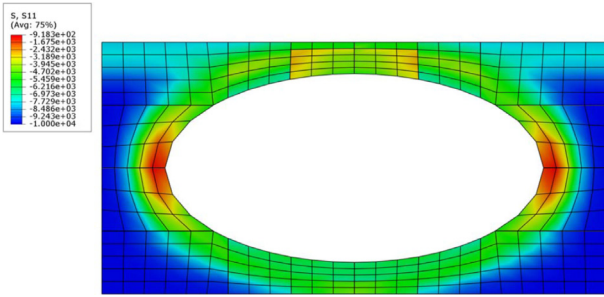


Fig. 11. Effective stress in x-direction at 0.1 sec

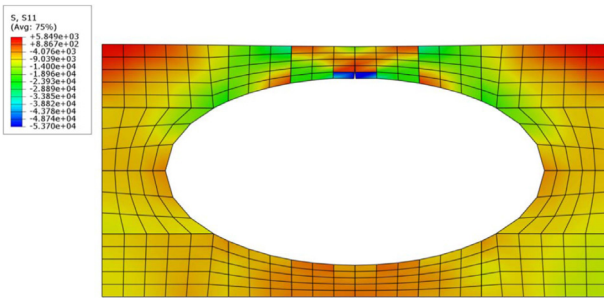


Fig. 12. Effective stress in x-direction at 1.0 sec

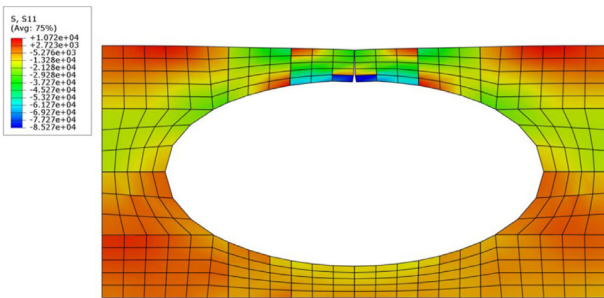


Fig. 13. Effective stress in x-direction at 1.4 sec

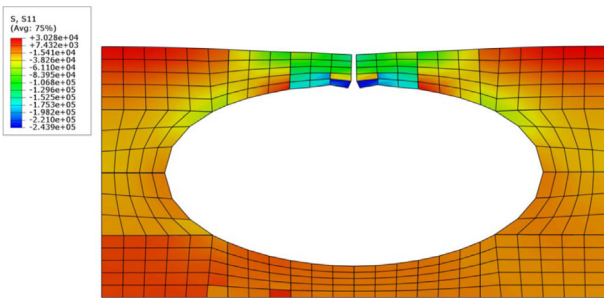


Fig. 14. Effective stress in x-direction at 3.0 sec

3. 결 론

본 연구에서는 다공질 매체에 대한 ABAQUS의 유한요소해석에서 요소분리 알고리즘을 제안하였다. ABAQUS 프로그램에서는 standard 버전에서만 cohesive 요소를 사용한 요소분리 방법을 제공하고 있다. 그러나 요소들의 이탈, 붕괴, 접촉 등의 복잡한 메커니즘을 고려한 해석에서는 수치적 안정성의 문제로 수렴된 결과를 얻기가 힘들다. 한편,

ABAQUS-explicit을 이용한 해석은 이러한 문제를 보다 정확하게 풀 수 있지만, 현재까지 다공질 매체를 다루는 해석적 방법은 제기되고 있지 않다. 이러한 어려운 점을 해결하기 위해, 본 연구에서는 ABAQUS-explicit 상에서 요소분리에 대한 기초 알고리즘을 제안하였다. *Bond 옵션과 VUMAT, VDISP 서브루틴을 이용하여 다공질 매체의 요소분리를 수행하였으며, 간단한 2차원 예제를 통하여 제안된 방법의 가능성을 검토하였다.

그러나, 수치해석 예제에서는 간극수압이 일정한 영역에서 시간에 따라 선형적으로 변화한다는 가정을 하였고, VUMAT 코드상에는 다공질 매체의 고체영역만을 고려한 Stress만이 계산되었다. 즉, 유효응력이 0가 되는 시점에서 요소가 분리되는 상황만을 고려하였다. 추후 연구에서는 복잡한 모델에 대해 전 영역에서의 간극수압 유동까지 고려해야 하고 검증이 필요하다. 이를 위해 현재 단순화된 VUMAT-VDISP 코드에서 다공질 매체 내 유체유동에 관한 서브루틴을 추가로 생성하고 연성해석을 진행할 예정이다.

감사의 글

본 연구는 한국건설기술연구원의 주요사업인 “도심지 재난 대응형 1차생명선 설계 시공 기술개발” 과제의 지원으로 이루어진 것으로 이에 감사 드립니다.

References

1. ABAQUS User Manual Version 6.16 (2014), Hibbt, Karlson & Sorenson, Inc., Pawtucket, R. I.
2. Biot, M. (1941) “General theory of three-dimensional consolidation”, Journal of Applied Physics, Vol. 12, No. 1, pp. 155~164.
3. Bowen, R. M. (1980), “Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures,” International Journal of Engineering Science, Vol. 18, No. 9, pp. 1129~1148.
4. Coussy, O. (1995), Mechanics of porous continua, Wiley, Chichester.
5. Goodman, M. and Cowin, S. (1972), “A continuum theory for granular materials”, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 44, No. 4, pp. 249~266.
6. Hassanizadeh, S. and Gray, W. (1979), “General conservation equations for multi-phase systems: Averaging procedure”, Advances in Water Resources, Vol. 2, pp. 131~144.
7. Park, T. and Tak, M. (2010), “A New Coupled Analysis for Nearly Incompressible and Impermeable Saturated Porous Media on Mixed Finite Element Method: I. Proposed Method”, KSCE Journal of Civil Engineering, Vol. 14, No. 1, pp. 7~16.
8. Terzaghi, K. (1925), “Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer grundlage”, Franz Deuticke, Leipzig und Wein, p. 399.
9. Zienkiewicz, O. C., Chang, C. T. and Bettess, P. (1980), “Drained, Undrained, Consolidating and Dynamic Behavior Assumptions in Soils”, Geotechnique, Vol. 30, No. 4, pp. 385~395.