대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 1, 89 ~ 112. Feb 2017

동적 기하 환경을 활용한 문제 해결 과정에서 변수 이해 및 일반화 수준 향상에 관한 사례연구[1)]

반 은 섭* · 류 희 찬**

본 연구에서는 삼차방정식 $x^3+4x=32$의 기하학적 해법을 사례로 하여 삼차방정식 $x^3+ax=b$를 기하학적으로 해결하는 일반화 과정을 분석했다. 연구 결과, 동적 기하 환경을 활용한 문제 해결 과정에서 변수를 동적으로 이해하면서 이미 제시한 일반해를 재해석하고, 더 나아가 또 다른 일반해를 제시할 수 있게 되어 일반화의 수준이 향상되었다. 결론적으로, 문제 해결 과정에서 동적 기하 환경이 변수 이해 및 일반화 수준 향상과 관련해 학생 중심 탐구 수단으로서 유의미한 역할을 할 수 있다는 교수학적 시사점을 도출할 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

중세 시대 아랍의 수학자 Omar Khayyam(1048-1131)은 삼차방정식을 체계적으로 분류하고 원뿔곡선들의 교점을 활용하여 $x^3+ax=b$ 형태를 포함한 삼차방정식의 기하학적 해법을 제시하였다 (Connor, 1956; Khayyam, 2008; Mardia, 1999). 또한 반은섭 · 신재홍 · 류희찬(2016)은 삼차방정식에 대한 Omar Khayyam의 해법을 재조명하고, 좌표평면에서 구현된 원뿔곡선들의 교점을 이용한 기하학적 해법으로 재해석하여 교수학적으로 활용할 수 있는 방법을 제시한 바 있다.

삼차방정식 $x^3+ax=b$를 기하학적으로 해결하기 위해서는 구체적인 예를 통하여 일반적인 삼차방정식의 해법을 인식하는 귀납 및 일반화의 전략이 필요하며, 방정식에 변수가 포함되어 있기 때문에 문자와 식의 대수적 조작 능력은 물론, 변수 및 일반화에 관한 대수적 사고가 중요하게 작용할 것이다(우정호, 2007; Dindyal, 2007; Mitchelmore, 2002; Wagner & Kieran, 1989).

하지만, 다수의 선행 연구에서 일반화 과정에 대한 인지적인 어려움이 보고되고 있으며, 이는 변수를 인식하고 활용하는 수준과 관련이 있다는 것을 공통적으로 확인할 수 있다(김남희, 2004; 우정호, 2007; 장혜원 · 강정기, 2013; 조영주 · 김경미, 2010; 지영명 · 유연주, 2014; De Giessen, 2002; Drijvers, 2001; Ursini & Trigueros, 2004). 한편, 변수가 포함되어 있는 일반화의 사고 전략과 추론 과정에서 시각화를 구현할 수 있는 동적 공학 도구의 필요성을 주장한 연구 결과를 확인할 수 있다(장혜원 · 강정기, 2013; 조영주 · 김경미, 2010; Arcavi, 2003; Barbosa, Palhares & Vale, 2007; Becker & Rivera, 2005; Goldin, 2002; Yilmaz, Argün & Keskin, 2009).

이와 같은 연구 결과를 바탕으로 본 연구에서

* 홍덕고등학교, hymnes@naver.com (제1 저자)
** 한국교원대학교, hclew@knue.ac.kr (교신저자)
1) 본 논문은 제1 저자의 박사학위 논문의 일부 내용을 재구성한 것임.

는 반은섭 외(2016)가 Omar Khayyam의 해법을 재해석하여 제시한 삼차방정식 $x^3+ax=b$에 대한 교수학적 활용 방법의 내용을 학생들에게 적용하고 수학 교실에 필요한 교수학적 시사점을 찾고자 하였다. 특히, 변수 a, b가 포함된 삼차방정식 $x^3+ax=b$를 기하학적으로 해결하는 과정에서 지필 환경과 동적 기하 환경의 풍부한 탐구 학습 환경을 각각 제시하고, 동적 기하 환경이 일반화 수준의 향상을 어떤 방식으로 지원하게 되었는지 분석하여 적용 가능한 시사점을 제공하였다.

II. 이론적 배경

1. 변수의 이해 및 일반화의 수준

일반화는 몇 가지 예에서 확인할 수 있는 공통된 패턴 및 성질을 그 예가 포함된 보다 큰 범위로 확장시키는 것으로(Mitchelmore, 2002; Tall, 2011; Zazkis, Liljedahl & Chernoff, 2007), 형식 불역의 원리나 대입과 같은 대수적 사고 요소와 밀접하게 관련되어 있기 때문에 대수적 사고 발달의 초석이 된다고 할 수 있다(김성준, 2004; 장혜원, 2007).

일반화는 귀납의 과정에서 자연스럽게 경험할 수 있는 사고 전략이며(우정호, 2007), 구체적인 대상에 대한 수학적 지식이 일반화 과정을 통하여 연결되어 전문적인 지식으로 발전되기 때문에 구체적인 대상에 대한 지식과 일반화된 지식은 분리되어 있지 않고, 마치 동전의 양면과 같이 상호 연결되어 있는 지식의 망으로 볼 수 있다(Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001; Hoyles, Noss & Pozzi, 1999). 구체적이며 개별적인 대상에 대한 수학적 지식은 일반적인 지식으로 연결되어 더 높은 수준으로 도약할 수 있는 강력한 토대를 제공하며 지식 구조를 확장시키고 새로운 체계로 발전시키는 중요한 역할을 하게 된다(Dreyfus, 1991; Goldin, 2002; Kaput, Blanton & Moreno, 2008).

하지만, 일반화를 다룬 많은 연구들은 일반화의 과정 및 일반화된 수학적 표현의 이해에 관한 여러 가지 인지적인 어려움을 보고하고 있으며, 일반화를 표현하는 수단인 변수에 대한 낮은 수준의 인식을 이와 같은 현상의 공통적인 원인으로 제시하였다(김남희, 2004; 조영주 · 김경미, 2010; 지영명 · 유연주, 2014; Akgün & Özdemir, 2006; Becker & Rivera, 2005).

일반화 절차를 설명하거나 일반화된 식을 표현하는 도구로 사용되고 있는 문자는 대수식의 유형에 따라서 다양한 상황에서 다른 맥락으로 사용되고 있다(김남희, 2004; Drijvers, 2001, 2003; Schoenfeld & Arcavi, 1988; Usiskin, 1988). 이렇게 서로 다른 양상으로 사용된 문자가 '변수'라는 하나의 용어로 통칭됨으로써 학생들은 각 대수식에서 변수로 사용된 문자의 역할과 그 의미에 대해 반성해볼 수 있는 기회를 충분히 갖고 있지 못한 실정이다(김남희, 2004).

삼차방정식 $x^3+ax=b$에서 변수 a, b와 변수 x는 다른 맥락의 성격을 지닌다. 변수 a, b는 삼차방정식의 다양한 패턴을 일반화하기 위하여 도입된 매개변수 역할을 하며, 변수 x는 a, b의 값에 따라 결정되는 값인 미지수로서의 변수 역할을 한다.

이차식의 일반화를 다룬 Ursini & Trigueros (2004)의 연구에서는 다양한 예를 통하여 매개변수의 정확한 의미를 이해할 수 있을 때 정적으로 표현된 대수적 의미에 대한 학습에 더 용이한 결과를 얻을 수 있었다. 이와 비슷한 맥락으로 지영명과 유연주(2014)는 대수 학습에서 일반화 수단으로서 매개변수에 대한 학생들의 인식 양상을 확인한 결과, 학생들은 매개변수에 대하

여 부정 또는 변이보다는 고정에 주목하고 있었으며, 매개변수와 변수사이의 역동적인 관계를 인식하지 못했다. 우정호(2007)도 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 교수-학습 과정에서 변수 a, b, c에 대한 동적인 측면과 정적인 측면을 모두 고려하여 다룰 수 있음에도 근의 공식에 의한 방정식 풀이가 강조되고 있음을 지적하였으며, 변수는 수치를 대입하기 위한 단순한 문자 기호로만 간주되어 변수의 본질이 부각되고 있지 못하고 있기 때문에 일반화의 의미가 소홀히 다루어지고 있다고 보았다.

또한 De Giessen(2002)은 매개변수의 정적인 측면과 함께 동적인 의미를 파악하는 것이 무엇보다 중요하다는 관점을 제시하였으며, 매개변수의 정적인 측면과 동적인 측면을 모두 다룰 수 있는 동적 기하 환경을 활용하여 매개변수를 변화시키면서 그래프 집합의 구조를 확인할 수 있는 교수학적 접근을 권고하였다.

이상의 연구 결과들은 매개변수가 포함된 일반화된 방정식을 해결하기 위하여 문제를 이해하거나, 해를 표현하고 그 결과를 반성하는 과정에서 매개변수가 포함된 일반적인 식을 단지 하나의 개별적인 방정식으로 해석할 가능성이 있으며, 매개변수를 인식하고 활용하는 수준에 따라 문제 해결의 수준이 달라질 수 있다는 것을 시사한다.

수학적 개념을 형성하는 과정에서 일반화의 역할을 분석하여 그 종류와 수준을 분류한 연구가 많이 진행되어 왔다. Bills & Rowland(1999)는 과정으로서 일반화를 경험적(empirical) 일반화와 구조적(structural) 일반화로 구분하였으며, Davydov(1990)와 Dörfler(1991)는 경험적(empirical) 일반화와 이론적(theoretical) 일반화로 구분하였다. 이들의 연구는 공통적으로 경험적 일반화는 개별적인 예들의 표면적인 공통 성질 및 속성을 근거로 하는 사고 과정이며, 구조적(이론적) 일반화는 개별적인 예들의 구조적인 내적 연결성 및 유사성에 근거하고 있다고 보았다.

Davydov(1990)와 Dörfler(1991)는 진정한 의미의 일반화는 특별한 예들의 표면적인 공통의 성질을 관찰하는 것에 의해 형성되지 않고, 반드시 공통의 성질에 대한 내적인 연결성을 인식할 필요가 있다고 하면서, 경험적 일반화의 경우 사례들의 표면적인 형식에 과도하게 의존하게 하여 일반화를 위한 본질적인 구조에 대한 인식을 방해할 수 있다고 설명하였다. 반면 내적인 유사성과 관계에 대한 인식을 바탕으로 하는 이론적 일반화를 통하여 체계적이며, 과학적인 개념을 형성하게 된다고 하였다.

한편, 수학적 개념을 형성하는 과정에서 유사성에 따라 공통된 특징을 분류하고 새로운 경험들을 분류한 내용과 동일시하여 심상을 형성하게 되는 추상화(abstraction)의 과정(Skemp, 1986)을 일반화(generalization)와 관련시켜 유기적으로 해석한 연구도 있다. Dreyfus(1991)에 따르면 일반화는 수학적 개념 형성의 가장 마지막 단계인 추상화를 위한 첫 번째 단계이며, 일반화된 개념을 종합하는 단계를 거쳐 최종적으로 추상적인 개념이 형성된다고 하였다. 또한 White & Mitchelmore(1999)는 Davydov, Piaget, Skemp 등의 연구를 종합하여 일반화의 개념과 추상화의 개념을 복합한 이론적 틀을 제시하여, 기본적으로 일반화는 알고 있는 개념에 대한 의미의 확장인 반면 추상화를 통하여 새로운 심상을 형성할 수 있으므로, 일반화와 추상화에 질적인 차이점이 있다는 설명을 하였다.

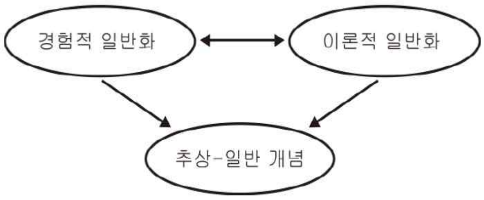
<표 II-1>에 White & Mitchelmore(1999)가 제시한 학습 과정에서의 일반화와 추상화에 대한 이론적 틀이 제시되어 있다. 이들은 경험적 일반화와 이론적 일반화, 그리고 추상-일반 개념을 통하여 수학적 개념을 형성하는 절차를 설명하고 있다. 특히, 일반화를 통하여 유사성에 따라 분

<표 II-1> 일반화와 추상화(White & Mitchelmore, 1999)

일반화/추상화		특징
일반화	경험적 일반화 (empirical generalization)	일반화가 왜 성립하는지에 대한 조사 없이, 사례들의 범주로부터 귀납적으로 형성되는 일반화 내지는 패턴을 찾는 행동
	이론적 일반화 (theoretical generalization)	내적 연결성을 확인할 수 있는 구조적 유사성을 고려하여 형성되는 일반화
추상화	추상-일반 (abstraction-general)	일반화의 결과로부터 유사성과 차이점을 분명히 인식하는 과정이 포함된 구성주의적 관점

류한 개념들을 각각 하나의 대상으로 파악하여 새로운 수학적 개념을 형성할 수 있다는 점에서 추상화가 두 종류의 일반화보다 높은 수준의 역할을 한다고 보았다.

White & Mitchelmore(1999)는 [그림 II-1]을 통하여 학습 상황에서 세 가지 개념의 통합의 과정을 설명하였다. 일반화 및 추상화 학습은 예들을 관찰하는 활동으로부터 시작되며, 경험적 일반화와 이론적 일반화의 과정이 교대가 되면서 유사성을 찾아 공통 요소들을 분류하여 수학적 개념에 대한 비형식적인 모델을 구성하게 된다. 그리고 형식적인 수학적 개념을 통하여 해석할 수 있는 관점에서의 맥락을 조사하면서 추상-일반 개념을 형성하게 된다.



[그림 II-1] 경험적 일반화, 이론적 일반화, 추상-일반 개념

한편, Sriraman(2004)은 일반화의 과정에서 개연적인 패턴으로부터 구조적인 유사성을 발견하는 과정이 중요하다는 관점에서 전문적인 수학자들이 하는 방법과 유사하게 일반화한 학생들의 활동을 분석한 결과, 서로 다른 문제처럼 보이는 다양한 상황에 대한 반성을 통하여 문제의 구조적 유사성에 접근할 경우에 추상화가 촉진되고 일반화에 성공할 수 있다는 것을 발견했다.

Davydov(1990)는 일반화가 지니는 경험적인 특성으로 인하여 일반화에 관한 교수학적 목적 달성에 어려움이 있다고 하였다. 경험적 일반화는 표면적 유사성을 근거로 하고 있으며(Davydov, 1990; Dörfler, 1991), 표면적 유사성은 해법의 단서를 인식하게 해준다는 점에서 의미가 있다고 할 수 있지만(Holyoak & Koh, 1987), 그 결과는 잠정적이며, 체계적이지 못하다는 특징이 있다. 따라서 이론적 일반화의 과정이 요구된다고 볼 수 있으며, 이 두 가지 일반화의 조화를 통하여 추상-일반 개념을 형성하는 것으로 일반화의 과정이 완성된다고 볼 수 있다.

이상의 연구 결과들은 구체적이고 특별한 예로부터 구조적 유사성을 찾아, 본질적인 속성이 무엇인지 찾아내고 추상화시키는 것을 일반화의 완성으로 보고 있다. 특히 본 연구에서 의도하고 있는 일반화된 방정식을 해결하는 과정에서는 매개변수의 이해 수준에 따라서 일반화 결과의 위계성이 나타날 수 있다는 가정을 하고 있다. 즉, 계수 및 상수항이 구체적인 수로 제시된 방정식의 해법을 통하여 일반해를 구하는 과정에

<표 II-2> 매개변수 이해에 따른 일반화의 수준

일반화 수준	특징	관련 선행 연구의 일반화 유형(수준)
1 수준	1. 개별적인 방정식들에 대한 해법의 표면적 유사성에 근거한 비형식적인 일반화 2. 방정식의 일반해를 구했으나, 답이 틀렸음.	경험적 일반화: Bills & Rowland(1999) Davydov(1990), Dörfler(1991)
2 수준	1. 개별적인 방정식을 해결할 수 있었던 구조적 유사성에 근거한 형식적인 일반화 2. 방정식의 일반해를 구했으며, 답이 맞았으나, 매개변수와 변수들에 대한 의미와 관계를 이해하지 못함. 3. 매개변수가 포함된 식의 조작을 형식적인 문자의 조작으로 이해함.	구조적 일반화: Bills & Rowland(1999) 이론적 일반화: Davydov(1990), Dörfler(1991)
3 수준	1. 매개변수의 족을 다룬다는 인식을 할 수 있으며, 매개변수의 변화에 따른 변수들의 의미와 관계를 이해함. 2. 수학적 대상들의 내적 구조 및 불변적 관계를 분석함으로써 새로운 심상을 형성함.	추상화: Skemp(1986), Dreyfus(1991) 추상-일반 개념: White & Mitchelmore(1999) 반성적 추상화: Sriraman(2004)

서 개별적인 방정식을 해결할 수 있었던 구조적 유사성을 인식하게 될 경우에 일반화의 수준이 더 높을 것이다.

또한 매개변수가 포함된 식의 조작을 형식적인 문자의 조작으로 이해하는 것에서 더 나아가 매개변수의 족을 다룬다는 인식을 할 수 있으며, 변수의 변화에 따른 방정식의 불변적 관계를 이해하게 될 경우에는 새로운 심상을 형성하였다고 할 수 있으므로 일반화의 수준이 더 높다고 할 수 있다(De Giessen, 2002; Drijvers, 2001; Skemp, 1986; White & Mitchelmore, 1999). 이와 같은 내용을 참고하여, 방정식의 일반해를 제시하는 과정에서 나타날 수 있는 매개변수의 이해에 따른 일반화의 수준을 <표 II-2>와 같이 정리하였다.

2. 일반화와 동적 기하 환경

대수는 일반화의 언어이며, 일반화를 위한 표현과 조작, 그리고 일반화 과정에서 추론의 방식을 제공한다(Mason, 2002). 또한 기하의 교수-학습에서 대수적 표현, 방정식을 풀기 위한 대수적인 조작, 변수와 미지수의 개념에 대한 이해가 요구되기 때문에(Dindyal, 2004, 2007), 학교 수학의 대수와 기하의 모든 분야에서 일반화와 관련된 내용이 스며있다고 할 수 있다.

하지만, 여러 선행 연구 결과로부터 학생들이 일반화의 전략 및 일반화된 개념의 '일반성'을 인식하는 과정에 인지적인 어려움이 있다는 것을 확인할 수 있다(장혜원 · 강정기, 2013; 조영주 · 김경미, 2010; 지영명 · 유연주, 2014; Arcavi, 2003; Barbosa et al., 2007; Becker & Rivera, 2005; Goldin, 2002; Yilmaz et al., 2009). 또한 이 연구들은 공통적으로 일반화에 관련된 사고와 추론 과정에서 시각화의 활용을 통해 사례들의 일반적인 관계, 패턴, 법칙을 발견하고 일반화된 식을 창조할 수 있으므로, 시각화를 구현할 수 있는 동적 공학 도구를 일반화의 과정에서 적극적으로 활용할 필요가 있다고 주장하고 있다.

한편, 구체적인 사례들로부터 귀납을 하여 일반화를 하는 과정에서 구체적인 사례가 늘어날수록 일반화의 결과에 대한 신뢰성이 커지며

(Polya, 2003), 학생들이 활용하게 되는 예의 역할이 매우 중요하기 때문에 좋은 예를 잘 선택하여 제시해 줄 필요가 있는데(Sriraman, 2004; Zazkis et al., 2007), 동적 기하 환경이 다양한 양질의 사례를 제공해 줄 수 있다.

수학교육에서 활용 가능한 공학 도구는 대표적으로 Mathematica, Maple과 같은 CAS(Computer Algebra System)와 Cabri Ⅱ Plus(Cabri), Cinderella, GeoGebra, Geometer's Sketchpad(GSP)와 같은 DGS(Dynamic Geometry Software)가 있다. 전통적으로 CAS는 대수 표상에 대한 조작에 주로 유용하게 사용되며, DGS는 도형들이나 그래프의 기하학적 관계에 대한 탐구를 촉진시킨다고 알려져 왔지만, 시간이 흐를수록 CAS와 DGS의 프로그램들은 상호 보완적으로 발전하고 있다. 특히 Hohenwarter(2002)에 의하여 개발된 GeoGebra의 경우에는 CAS와 DGS의 장점을 통합한 형태의 동적 프로그램이다(Bayazit & Aksoy, 2010; Hohenwarter & Jones, 2007).

학교 수학에서는 DGS와 관련된 공학 도구의 연구가 가장 활발하게 진행되고 있다(Jones, 2002). DGS는 점과 선들에 관한 기하학적 대상을 구체적으로 연결해주고 dragging을 통하여 도형을 재구성할 수 있도록 지원하기 때문에 그래프를 구현하는 것 이상의 역할을 한다고 볼 수 있으며(Jones, 2011), 다양한 예를 통한 수학적 성질의 관찰 및 경험적 정당화를 가능하게 하고, 증명의 역할과 필요성에 관한 이해를 지원한다 (Hoyles & Jones, 1998). 김화경과 조한혁(2004)은 동적 기하 software라는 용어는 교육과정 내용을 다루기 위한 보조 도구라는 성격이 강하기 때문에 교육적인 탐구 환경이라는 측면에서, 이들을 동적 기하 환경(DGE, Dynamic Geometry Environment)으로 보는 것이 타당하다고 하였다.

한편, 일반화된 대상을 표현하기 위해서는 변수가 포함되어 있는 대수식을 이용해야 하기 때문에 일반화의 어려움은 변수에 대한 이해의 어려움과 맞물려 있다(장혜원 · 강정기, 2013; 지영명 · 유연주, 2014; Becker & Rivera, 2005; Goldin, 2002). 장혜원과 강정기(2013)는 증명 자체가 일반성을 전제로 하지만, 다수의 학생들은 증명을 수행한 후에 기하 정리의 일반성을 인식하는 과정에서 어려움이 있다고 보고하였으며, 경험적 확신, 한 가지 도형 표현의 한계 및 기하 변수의 측면에서 인지적 어려움을 조명하고 일반성의 인식을 위한 교수학적 도구로서 동적 기하 환경의 가능성을 제시하였다. 또한 Goldin(2002)은 일반화의 과정에서 패턴들의 관계에 대한 표상을 형성하기 위해서는 변수의 개념에 대한 올바른 이해가 선행되어야 한다고 하였다.

Becker & Rivera(2005)는 변수에 대한 이해와 표상의 유창성에 근거하여 수치적 전략, 시각적 전략, 실용적 전략(수치적 전략과 시각적 전략을 복합적으로 사용하는 전략)으로 분류하여 학생들이 주어진 패턴을 일반화한 전략을 분석한 결과, 대부분 학생들은 변수의 개념을 활용하지 못

<표 II-3> 삼차방정식과 매개변수(Drijvers, 2001에서 변형)

삼차방정식	매개변수의 역할		DGE를 통한 그래픽 모델
$x^3+ax=b$	자리지기(정적)	a, b는 하나씩 대입될 특정한 값을 나타내는 표현의 수단이다.	다른 도형으로 대치될 수 있는 한 쌍의 도형
	변화하는 양(동적)	a, b는 역동적으로 변하는 값이다.	역동적인 도형의 움직임 변화
	일반화(동적,정적)	a, b는 하나의 집합을 타나내고 상황들을 일반화한다.	도형의 다발에 대한 이해를 통한 일반화

하였으며, 변수가 다양한 수를 나타낸다는 것을 인식하지 못한 채 단지 자리지기로만 생각했다. 또한 실용적 전략을 사용한 경우에 수치적 전략과 시각적 전략을 연결하여 문제 해결에 성공할 수 있었으며, 시각적 전략만을 사용하여 문제 해결을 시도한 경우에도 결국에는 두 가지 전략을 연결하여 문제 해결에 성공할 수 있었던 결과를 토대로 시각적인 표상이 일반화의 과정에서 중요한 역할을 한다는 주장을 할 수 있었다.

지영명과 유연주(2014)는 학생들이 구체적인 예를 다루는 능력은 뛰어나지만, 일반화의 수단이 되는 매개변수에 대한 인식에 오류가 있다고 하였다. 또한, 매개변수 개념에 대한 학생들의 인식을 사례 분석한 조영주와 김경미(2010)의 연구에서는 학생들이 지필 환경에서 매개변수를 연속적으로 변화하는 양이 아니라 이산적인 양으로 생각하는 경향이 있었으며, 컴퓨터 대수 환경을 활용한 학습을 통하여 매개변수가 보다 작은 간격으로 변할 수 있다는 것을 이해하였다. 그들은 이를 바탕으로 변수의 이중적 의미와 관련된 어려움을 극복하기 위한 교수학적 도구로서 컴퓨터 대수 환경을 제시하였다.

이와 비슷한 맥락에서 Drijvers(2001)는 매개변수의 정적, 동적인 역할에 따른 학습 전략을 제시하였으며, 동적 기하 환경을 활용한 그래픽 모델이 매개변수의 자리지기의 개념, 변화하는 양으로서의 매개변수 개념, 일반화로서의 매개변수 개념을 순차적으로 연결할 수 있도록 지원할 수 있다고 주장하였다(<표 II-3>).

또한, Dienes(1971)는 수학을 구조에 대하여 연구하는 학문으로 보고 학생들이 수학을 학습하기 위해서 개념, 원리를 연결하고 다양한 수학적 아이디어 간의 연결성을 알아야 할 것을 강조하면서 네 가지 학습 원리를 제시하였다. 특히 네 가지 학습 원리 중 '수학적 다양성의 원리'를 통하여 변수를 포함하는 개념은 변수를 포함하는 많은 사례를 통하여 학습이 이루어져야 한다고 주장한 바 있다. 이와 같은 Dienes의 주장을 일반화된 삼차방정식의 기하학적 해결에 적용한다면, 다양한 사례의 삼차방정식의 해를 개별적인 상태로만 보지 않고, 그것을 하나의 범주로 묶어서 보편적으로 파악하고 해석할 수 있을 때, 일반화된 삼차방정식의 기하학적 해를 올바로 이해한 것이다.

이상의 연구 결과들은 변수가 포함된 방정식을 풀기 위하여 문제를 이해하거나, 해결하는 과정에서, 그리고 해결한 결과를 표현하고 반성하는 과정에서 변수가 포함된 일반적인 방정식을 단지 하나의 개별적인 방정식으로 해석할 가능성이 있기 때문에 교수 및 학습의 과정에서 변수에 대한 동적인 개념과 정적인 개념을 모두 올바로 인식하고 활용할 수 있는 기회를 제공해야 한다는 것을 시사하고 있다.

III. 연구방법

1. 연구 대상

본 연구를 위하여 지방의 중소도시에 위치하고 있는 A고등학교 2학년에 재학 중인 자연계열의 남학생 3명을 연구 대상으로 선정하였다. A고등학교는 중산층이 많이 분포하고 있는 도심에 위치하고 있는 일반계 고등학교로 중위권 정도의 학업성취도를 보이는 학교라고 할 수 있다.

사전에 연구 대상자들을 포함하여 전국 단위 시험의 수학 성적이 상위 5%~10%인 상위권의 학생 10명을 대상으로 연구 참여에 대한 동의를 받고 사전 면담을 실시하여, 본 연구의 취지에 맞는 학생 3명을 연구의 대상으로 선정하였다. 이들을 대상으로 진행된 사전 면담에서 모든 대상자들이 삼차방정식 및 원뿔곡선에 대한 개념

을 이해하고 있는 것을 확인하였으며, 본 연구의 취지에 적합할 것이라고 예상했다. 모든 연구 대상자들에게 연구의 성격과 의미를 충분히 설명했고, 이들은 본 연구에 참여하고 싶다는 의사를 분명하게 밝혔으며, 실험이 실시되기 이전에 GeoGebra의 활용법을 숙지할 수 있었다.

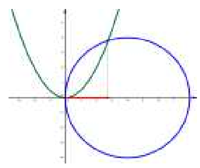
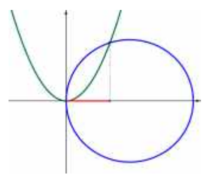
2. 연구 도구

본 연구에서는 중세 시대의 아랍의 수학자인 Omar Khayyam이 제시한 삼차방정식의 기하학적 해법(Khayyam, 2008; Mardia, 1999)을 현대적으로 재해석하여 다룬 반은섭 외(2016)의 연구 결과를 활용하였다. 반은섭 외(2016)는 삼차방정식 $x^3+ax=b$의 기하학적 해결 과정에서 귀납 및 일반화의 전략을 활용할 수 있다고 제시하였다. 연구의 대상자들은 이미 a, b의 값이 구체적인 수로 주어진 형태의 삼차방정식 $x^3+4x=32$에 대한 기하학적 해법을 알고 있었으며, a와 b가 양수라는 조건하에 $x^3+ax=b$ 형태의 삼차방정식을 지필 환경과 동적 기하 환경에서 각각 기하학적으로 접근하여 해결하였다.

본 연구에서 활용한 동적 기하 환경은 Hohenwarter(2002)에 의하여 개발된 GeoGebra 프로그램이며, 다양한 동적 기하 환경에서 공통적으로 활용할 수 있는 기능인 대수식을 좌표평면의 도형으로 전환하는 기능, 좌표평면에 구현된 도형에 대한 대수식을 확인할 수 있는 기능, 슬라이드를 통하여 변수가 포함된 도형을 표현할 수 있는 기능을 활용하였다.

<표 III-1>에서 삼차방정식 $x^3+4x=32$와 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 확인할 수 있다. 삼차방정식 $x^3+ax=b$의 기하학적 해 중에서 포물선의 방정식과 원의 방정식의 조합으로 제시되어 있는 일반해가 Omar Khayyam의 기하학적 해이며(음영 부분), 포물선과 타원을 활용한 기하학적 해의 제시 방법을 추가로 확인할 수 있다.

<표 III-1> 삼차방정식 $x^3+4x=32$ 및 $x^3+ax=b$의 기하학적 해

삼차방정식	원뿔곡선의 조합	기하학적 해
$x^3+4x=32$	$y=\frac{1}{2}x^2$ & $x^2-8x+y^2=0$	
$x^3+ax=b$	$y=\frac{1}{\sqrt{a}}x^2$ & $x^2-\frac{b}{a}x+y^2=0$	
	$y=\frac{1}{2}x^2$ & $\frac{a}{4}x^2-\frac{b}{4}x+y^2=0$	
	$y=\frac{a}{2}x^2$ & $\frac{a^3}{4}x^2-\frac{a^2b}{4}x+y^2=0$	
	…	

3. 연구 방법 및 절차

삼차방정식을 기하학적으로 해결하기 위한 수학적 사고의 과정을 심도 있게 분석하기 위해서 질적 사례 연구(qualitative case study) 방법을 적용하였다. 질적 사례 연구 방법은 목적이 있는 표집에 의한 사례를 통하여, 양적으로 나타나기 어려운 개인의 행동과 사고에 대한 심층적이고 체계적인 정보를 얻을 수 있고, 그 의미를 분석할 수 있는 연구 방법이다(Merriam, 1998).

실험은 2학기 기말고사가 마무리 된 이후, 수학 교실에서 진행되었다. 연구의 참여자들은 지필 환경(25분)과 동적 기하 환경(25분)에서 차례로 $x^3+4x=32$를 기하학적으로 해결하였으며, 이 과정에서 $x^3+4x=32$의 기하학적 해법을 익힐 수 있었다. 이후 연속된 실험을 통하여 지필 환경(25분)과 동적 기하 환경(25분)에서 $x^3+ax=b$를 기하학적으로 해결하였다.

본 연구에서는 지필 환경 및 동적 기하 환경에서 학생 중심의 탐구의 과정을 분석하고자 했기 때문에 학생 스스로 문제를 해결하는 것을 원칙으로 하고 있으며, 문제의 해결 과정에서 학생과 교사, 그리고 학생 간의 의사소통을 최소화하였다. 연구 대상자들이 사용한 책상이 충분히 분리되어 있었으며, 컴퓨터는 개인별로 사용하였다. 지필 환경과 동적 기하 환경에서 학생들에게 동일한 활동지가 제공되었으며, 가능한 바른 글씨로 해결 과정 및 답을 작성할 것을 요구했다. 또한 활동한 GeoGebra창을 가능한 지우지 말고 전략이 수정될 경우에 새 윈도우에 작성할 것을 요구했으며, 필요할 경우 이용했던 창을 다시 활용할 수 있다는 설명을 하였다. 또한 문제의 해결 과정 및 새롭게 알아낸 사실을 활동지에 모두 작성하는 것을 원칙으로 했다.

4. 자료 수집 및 분석

지필 환경 및 동적 기하 환경에서 학생들이 삼차방정식을 해결하면서 작성한 활동지 및 화면 캡처 프로그램에 의하여 녹화된 동영상 파일이 실험이 종료된 이후 모두 수집되었으며, 이들 자료는 학생들의 문제 해결 과정에 대한 분석에 활용되었다. 본 실험이 종료된 이후 활동지에 대한 분석이 진행되었으며, 임상 면담은 학생들의 활동지 분석이 이루어진 이후에 실시되었다. 임상 면담은 개인별로 진행되었으며, 수집된 활동지 원본을 학생에게 제시하고, 연구자는 사본을 보면서 질문을 하는 방식으로 이루어졌다. 동적 기하 환경에서 활동한 내용은 녹화된 동영상을 연구자와 함께 시청하면서 질문을 주고받았다.

면담 내용은 모두 녹음되었으며, 동적 기하 환경에서 활동한 동영상 파일을 재생시킨 화면을 다시 화면 캡처 프로그램으로 녹화하였다. 이를 토대로 모든 대화 내용이 전사되었으며, 이 자료를 다시 분석하였다. 전사의 자료 중 유의미한 부분을 발췌문으로 수록하였으며, 전사 자료에서 생략된 부분 중 대화 내용의 전후 맥락을 고려하여 충분히 추측이 가능한 내용이나 식은 괄호를 이용하여 나타내었다.

한편, 주어진 삼차방정식으로부터 두 개의 원뿔곡선의 방정식을 찾아 좌표평면에 표현하고, 이들의 교점을 이용하여 삼차방정식의 해를 기하학적으로 제시하는 모든 과정을 Polya(2005)의 문제 해결의 네 단계인 <문제에 대한 이해>, <계획의 작성>, <계획의 실행>, <반성>의 단계를 기반으로 하여 <문제에 대한 이해> 및 <계획의 작성> 단계를 탐색(inquiring) 단계로, <계획의 실행> 단계를 해결(solving) 단계로, <반성 단계>를 반성(reflecting)단계로 재해석하고 이와 같은 탐색, 해결, 반성의 단계를 바탕으로 방정식의 기하학적 해결 과정을 분석하였다(<표 III-2>).

<표 III-2> 삼차방정식의 기하학적 해결 단계

Polya(2005)의 문제 해결 단계	⇔	삼차방정식의 기하학적 해결 단계
문제에 대한 이해	⇔	탐색(inquiring)
계획의 작성		
계획의 실행	⇔	해결(solving)
반성	⇔	반성(reflecting)

탐색 단계, 해결 단계, 반성 단계의 일련의 과정을 통하여 이루어질 수 있는 문제 해결의 단계 및 이에 대한 분석 관점을 <표 III-3>과 같이 종합하여 나타낼 수 있다. 귀납을 통하여 일반화된 삼차방정식을 기하학적으로 해결하는 과정을 분석하기 위하여 연구의 대상자들이 삼차방정식 $x^3+ax=b$를 기하학적으로 해결하는 귀납의 과정 및 기하학적 해의 제시, 제시한 기하학적 해에 대한 재해석과 확장의 과정을 분석하였다.

삼차방정식을 기하학적으로 해결하면서 두 개의 원뿔곡선의 교점을 찾는 탐색의 과정에서 원뿔곡선의 성질 및 삼차방정식의 차수 등을 고려한 수학적 추론이 가능하다. 또한 이를 통하여 방정식을 조직하고 주어진 삼차방정식과의 대수식을 비교하여 최종적으로 기하학적 해를 제시하게 되며, 제시한 기하학적 해의 반성 단계에서는 해의 의미를 보다 풍부하게 이해할 수 있다.

또한 선행 연구들의 결과를 종합하여 일반화의 수준을 제시한 <표 II-2>의 내용을 일반화 수준에 대한 분석틀로 활용하였다.

IV. 연구결과

1. 지필 환경에서 $x^3+ax=b$의 해결

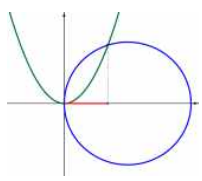
지필 환경에서는 이미 알고 있는 삼차방정식 $x^3+4x=32$의 해법에 포함되어 있는 대수적 절차를 구조적으로 이해하고 이를 변수가 포함되어 있는 일반화된 식에 올바로 적용한 학생 C만이 문제를 해결할 수 있었다(<표 IV-1>).

<표 IV-1> 지필 환경에서 $x^3+ax=b$의 해결 여부

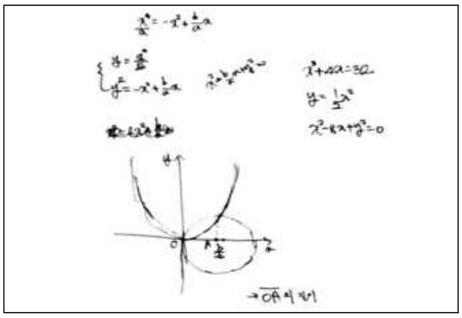
학생	A	B	C
해결 여부	×	×	○

모든 학생들이 이미 삼차방정식 $x^3+4x=32$를 기하학적으로 해결한 경험이 있지만, 이 중 학생 C는 대수식의 조작 과정에서 사차방정식이 나오게 된 의미를 보다 심도 있게 탐구하면서 이미 제시한 기하학적 해를 재해석하였으며, 사전 지식을 활용하여 삼차방정식 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 구하는 과정에서 해법을 일반화하면서 양변에 x를 곱하여 대수적 조작을 할 수 있는

<표 III-3> 삼차방정식 $x^3+ax=b$의 기하학적 해결 과정에 대한 분석 관점

삼차방정식	기하학적 해	분석 관점
$x^3+ax=b$		1. 탐색 단계: 삼차방정식 $x^3+4x=32$의 해법을 사례로 한 귀납 추론 2. 해결 단계: 해의 제시 3. 반성 단계: 제시한 기하학적 해의 재해석 및 확장

계기를 마련할 수 있었다([그림 IV-1], <발췌문 1>의 4학생C).



[그림 IV-1] 지필 환경에서 학생 C의 $x^3+ax=b$의 해결 과정

[그림 IV-1]에서 학생 C가 양변에 x를 곱하여 유도한 사차방정식을 대수적으로 조작하는 과정과 이를 통해 도출한 포물선의 방정식 및 원의 방정식을 이용하여 삼차방정식 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 제시한 결과를 확인할 수 있다.

<발췌문 1> 학생 C의 $x^3+ax=b$의 해결 과정 면담 내용

1연구자: 컴퓨터 사용하지 않고도 바로 답을 구했지? 2학생C: 네. 했던 방법 비슷하게요. 3연구자: 어떻게? 4학생C: 사차방정식 만들어서 원하고 이차함수 유도했어요.

지필 환경에서 기하학적 해를 올바로 제시한 학생 C는 이후에 동적 기하 환경의 슬라이드 기능을 활용하면서 이미 제시한 기하학적 해를 반성적으로 고찰할 수 있었다.

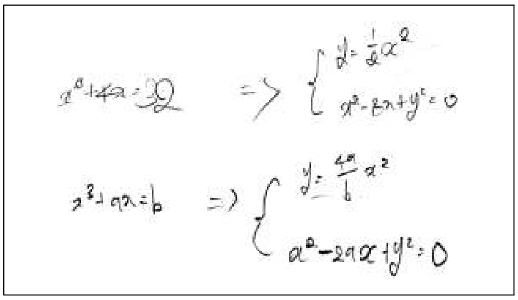
학생 A, 학생 B는 지필 환경에서 삼차방정식 $x^3+4x=32$의 기하학적 해와 $x^3+ax=b$의 기하학적 해 사이의 관련성을 생각할 수 있었다. 이 학생들은 지필 환경에서, 포물선의 방정식 $y=\frac{1}{2}x^2$과 원의 방정식 $(x-4)^2+y^2=16$을 활용한 $x^3+4x=32$의 기하학적 해법을 하나의 사례로 활용하여 변수 a, b가 포함되어 있는 원의 방정식과 포물선의 방정식을 유도하고 좌표평면에 도형을 표현하여 기하학적 해를 제시하였지만, 변수가 포함되어 있는 기하학적 해가 옳은지 여부를 검증할 수 없었다.

2. 동적 기하 환경에서 $x^3+ax=b$의 해결

연구에 참여한 모든 학생은 이미 삼차방정식 $x^3+4x=32$의 기하학적 해법을 알고 있었지만, 학생 A, 학생 B의 경우는 지필 환경에서 이를 일반화하지 못했다. 동적 기하 환경에서 이 학생들은 연구자의 힌트 없이 스스로 일반화된 삼차방정식 $x^3+ax=b$를 기하학적으로 해결할 수 있었다. 이들의 문제의 해결 여부가 <표 IV-2>에 제시되어 있으며, 음영 부분은 지필 환경에서 문제를 해결하지 못한 학생들의 결과를 나타낸다.

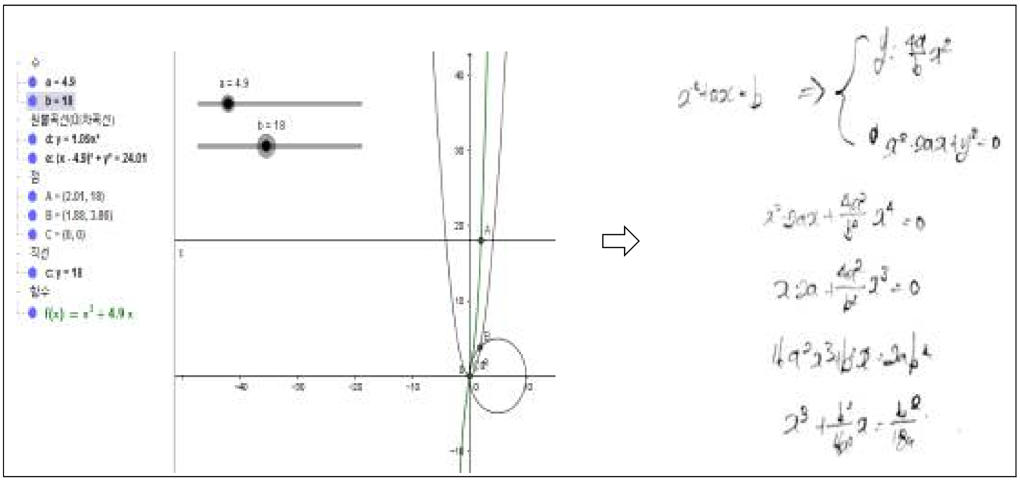
<표 IV-2> DGE에서 $x^3+ax=b$의 해결 여부

학생	A	B	C
해결 여부	○	○	○



[그림 IV-2] 지필 환경에서 학생 B의 $x^3+ax=b$의 해결 과정

학생 A와 학생 B는 동적 기하 환경에서 변수



[그림 IV-3] DGE에서 학생 B의 기하학적 해의 검증 과정(화면 및 활동지)

a, b가 포함된 도형의 방정식을 표현할 수 있었으며, 슬라이드 기능을 활용하여 $x^3+4x=32$의 기하학적 해 뿐만 아니라, 다양한 삼차방정식의 기하학적 해를 관찰하면서 지필 환경에서 제시한 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 수정하였다.

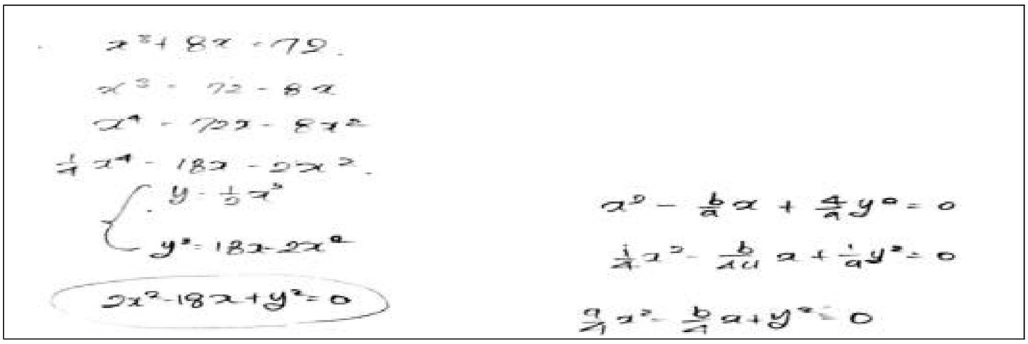
이제 연구에 참여한 학생들이 동적 기하 환경을 활용하여 삼차방정식 $x^3+4x=32$의 해법을 일반화한 과정을 학생 B, 학생 A, 학생 C의 순서대로 구체적으로 살펴보고, 문제 해결 과정에서 동적 기하 환경의 역할을 논하고자 한다.

학생 B는 지필 환경에서 $x^3+4x=32$의 기하학적 해법을 단편적으로 적용하여 포물선의 방정식 $y=\frac{4a}{b}x^2$과 원의 방정식 $x^2-2ax+y^2=0$을 좌표평면에 구현했을 때 생기는 교점으로 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 제시하였다([그림 IV-2]). 이후 동적 기하 환경에서 $y=\frac{4a}{b}x^2$과 $x^2-2ax+y^2=0$을 기하학적으로 표현하고 이 두 도형의 교점을 $y=x^3+ax$와 $y=b$의 교점의 x좌표와 비교해보면서 지필 환경에서 제시한 기하학적 해가 틀렸다는 것을 대수식을 통하여 검증할 수 있었으며([그림 IV-3]), 지필 환경에서 제시한 해를 수정하였다.

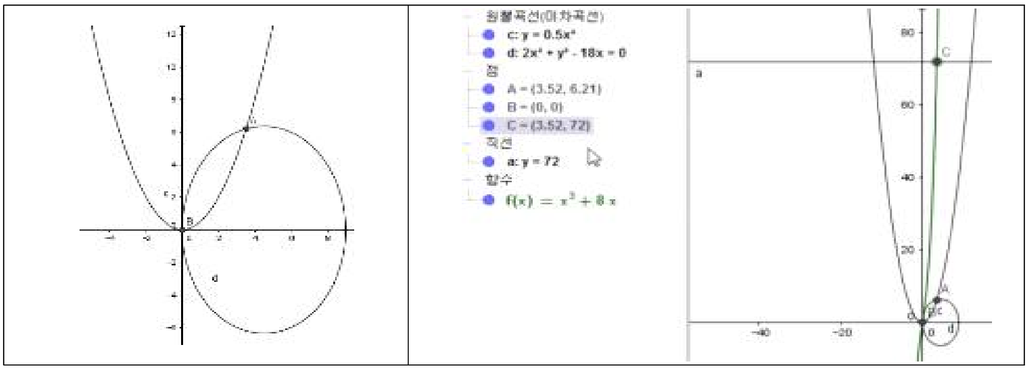
<발췌문 2>에서 학생 B가 $x^3+ax=b$를 해결한 과정에 대한 면담 내용을 확인할 수 있다. 학생 B는 지필 환경에서 제시한 답이 옳다고 생각했었다(2학생B, 4학생B, 6학생B). 학생 B는 포물선과 원의 교점으로 제시할 수 있는 $x^3+4x=32$의 기하학적 해법을 사례로 한 귀납을 통하여 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 구하는 과정에서 원의 방정식을 먼저 생각했다.

원의 방정식의 x의 계수만을 서로 비교하면서 찾아야 하는 두 개의 도형 중 하나인 원의 방정식이 $x^2-2ax+y^2=0$이 될 것이라고 판단하였다(4학생B). 이후 이차함수의 x^2의 계수를 변수 a, b를 모두 사용하여 표현하면서 일반화를 시도했으며(4학생B), $a=4, b=32$를 두 개의 원뿔곡선의 방정식에 대입해본 후 $x^3+4x=32$의 기하학적 해와 일치하는 것을 확인하고 제시한 기하학적 해가 옳다고 확신하였다(6학생B).

그런데, 학생 B는 동적 기하 환경에서 슬라이드 기능을 활용하여 $y=\frac{4a}{b}x^2$과 $x^2-2ax+y^2=0$, 그리고 $y=x^3+ax$과 $y=b$를 각각 표현하고 x좌표를 비교해보는 활동을 통하여, 지필 환경에서 도출한



[그림 IV-4] DGE에서 학생 B의 $x^3+ax=b$의 해결 과정(활동지)



[그림 IV-5] DGE에서 학생 B의 $x^3+ax=b$의 해결 과정

기하학적 해에 오류가 있다는 것을 인식할 수 있었으며(8학생B, [그림 IV-3(좌)]), 대수식을 통하여 검산하면서 두 개의 도형의 방정식을 연립할 경우, 삼차방정식 $x^3+ax=b$이 나오지 않게 된다는 것을 확인할 수 있었다([그림 IV-3(우)]).

<발췌문 2> 학생 B의 $x^3+ax=b$의 해결 과정 면담 내용

1연구자: 여기서는 [지필 환경에서는] 이렇게 [$y=\frac{4a}{b}x^2$과 $x^2-2ax+y^2=0$의 교점으로] 답을 제시했네? 오답이었지? 맞는 답이라고 생각했어?

2학생B: 네. 원하고 이차함수가 나왔으니까요.

3연구자: a와 b를 다 생각했어? 어떻게 접근했니?

4학생B: **처음에는 원을 맞춰봤어요. 원에서는 가운데[방정식의 x의 계수]만 변하면 되니까 8이 나오게 $2a$를 했어요. 그리고 이차함수를...**

5연구자: 이게 정답이라 생각했어?

6학생B: **앞에 방정식 [$x^3+4x=32$]이 나와서**

7연구자: 한번 대입을 해보지 그랬어. 대입은 컴퓨터로 확인해보고서 했네?

8학생B: **컴퓨터로 그려보니 잘못한 것 같아서, 검산해봤어요.**

9연구자: 그리고 이것[$x^3+8x=72$의 적용]은 왜 해봤어?

10학생B: **다른 것도 해보고 비교하려고요.**

11연구자: 이것을 [삼차방정식 $x^3+8x=72$] 도대체 어떻게 생각했어?

12학생B: **그냥. 8의 배수로 해봤어요.**

13연구자: 이 식[[그림 IV-4]의 $\frac{1}{4}x^4=18x-2x^2$]

은 어떻게 나왔을까?

14학생B: $y=\frac{1}{2}x^2$을 만들어야 해서요. 왠지 이차함수는 똑같은 것 같아서...

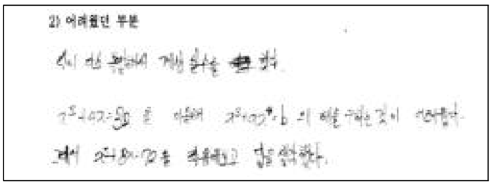
15연구자: 아. 그렇구나. 결국에는 방정식 두 개 $[x^3+4x=32,\ \ x^3+8x=72]$를 비교해서 찾았네? 이차함수를 고정시키고?

16학생B: **네. 두 개 비교해서 문자가 뭐가 들어갈지 맞춰봤어요.**

이후, 학생 B가 선택한 새로운 방법은 또 다른 구체적인 삼차방정식 $x^3+8x=72$의 기하학적 해를 고찰해 보는 것이었다([그림 IV-4], [그림 IV-5]). 학생 B는 이미 주어진 $x^3+4x=32$의 기하학적 해에 대한 정보 이외에 또 다른 삼차방정식에 대한 기하학적 해법을 확인하기 위하여 일차항의 계수와 상수항을 8의 배수로 적절하게 생각하여 삼차방정식 $x^3+8x=72$의 기하학적 해를 구할 수 있었다(12학생B).

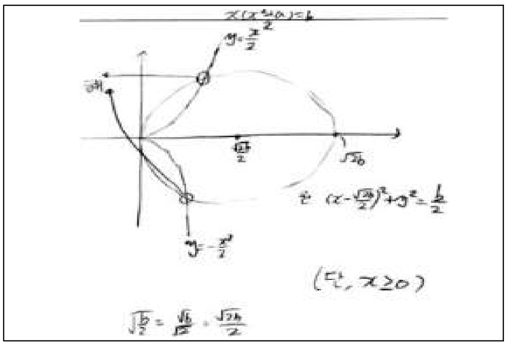
학생 B는 $x^3+8x=72$의 기하학적 해결 과정에서 삼차방정식 $x^3+4x=32$의 기하학적 해를 제시하면서 활용한 포물선의 방정식 $y=\frac{1}{2}x^2$을 고정시킨 후(14학생B), 대수적 조작을 통하여 타원의 방정식 $2x^2-18x+y^2=0$을 찾을 수 있었다([그림 IV-4]). 또한 동적 기하 환경에서 $y=\frac{1}{2}x^2$과 $2x^2-18x+y^2=0$의 교점을 직접 확인해보면서 삼차방정식 $x^3+8x=72$의 기하학적 해를 표현할 수 있었으며([그림 IV-5(좌)]), 이를 검증하기 위하여 $y=x^3+8x$와 $y=72$의 그래프를 그려본 후, x좌표를 비교하였다([그림 IV-5(우)]).

이후 $x^3+4x=32$의 기하학적 해를 제시하기 위하여 활용한 원뿔곡선의 방정식 $y=\frac{1}{2}x^2$ 및 $x^2-8x+y^2=0$과 $x^3+8x=72$의 기하학적 해를 제시하기 위하여 활용한 $y=\frac{1}{2}x^2$ 및 $2x^2-18x+y^2=0$의 조합을 종합하여 계수를 비교하는 과정을 거쳐 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 $y=\frac{1}{2}x^2$과 $\frac{a}{4}x^2-\frac{b}{4}x+y^2=0$의 교점을 이용하여 제시하였다([그림 IV-4], [그림 IV-6], 16학생B).



[그림 IV-6] DGE에서 학생 B의 $x^3+ax=b$의 해결에 관한 소감

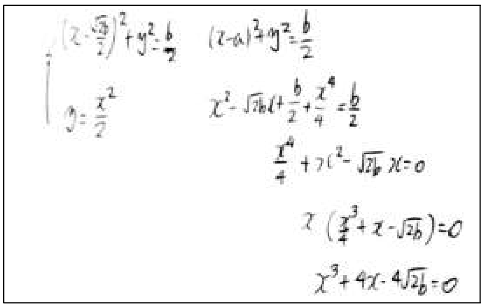
한편, 학생 A는 지필 환경에서 다음의 [그림 IV-7]과 같이 원의 방정식 $\left(x-\frac{\sqrt{2b}}{2}\right)^2+y^2=\frac{b}{2}$와 포물선의 방정식 $y=\frac{1}{2}x^2$의 교점을 $x^3+ax=b$의 기하학적 해로 제시하였다.



[그림 IV-7] 지필 환경에서 학생 A의 $x^3+ax=b$의 해결 과정

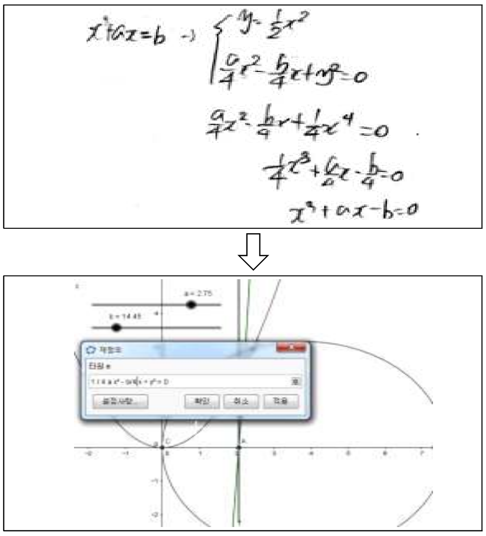
[그림 IV-8]과 [그림 IV-9]에 학생 A가 동적 기하 환경에서 삼차방정식 $x^3+ax=b$를 기하학적으로 해결한 일부의 과정이 제시되어 있으며, <발췌문 3>에서 학생 A와의 면담 내용 중 일부를 확인할 수 있다. 학생 A는 지필 환경에서 변수 a와 b를 모두 활용하여 기하학적 해를 제시하지

못하고 변수 b만이 포함된 해를 제시하였다([그림 IV-7], 2학생A). 이후 동적 기하 환경에서 슬라이드 기능을 활용하여 대수식을 기하학적으로 다양하게 표현할 수 있게 되면서, 지필 환경에서 제시한 기하학적 해를 검증할 수 있었다. 학생 A는 동적 기하 환경에서 $y=\frac{1}{2}x^2$과 $\left(x-\frac{\sqrt{2b}}{2}\right)^2+y^2=\frac{b}{2}$를 표현한 후, 이 두 도형의 교점을 $y=x^3+ax-b$의 그래프의 x절편과 비교해 보면서 지필 환경에서 도출한 기하학적 해가 잘못 되었다는 것을 확인할 수 있었으며(8학생A), 대수식을 통하여 $y=\frac{1}{2}x^2$과 $\left(x-\frac{\sqrt{2b}}{2}\right)^2+y^2=\frac{b}{2}$를 연립하여 삼차방정식 $x^3+ax=b$가 나오는지 여부를 확인할 수 있었다([그림 IV-8], 8학생A).



[그림 IV-8] DGE에서 학생 A의 $x^3+ax=b$의 해결 과정(활동지)

이후 $x^3+4x=32$의 기하학적 해를 구하는 과정에서 사차방정식과 $y=\frac{1}{2}x^2$이 나왔던 것을 확인할 수 있었으며, 대수식을 조작하고 $y=\frac{1}{2}x^2$을 유도하여 $y=\frac{1}{2}x^2$과 $\frac{a}{4}x^2-\frac{b}{4}x+y^2=0$의 교점으로 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 제시하였다([그림 IV-9]).



[그림 IV-9] DGE에서 학생 A의 $x^3+ax=b$의 해결 과정 1(활동지 및 화면)

<발췌문 3> 학생 A의 $x^3+ax=b$의 해결 과정 면담 내용 1

1연구자: 처음에는[지필 환경에서는] 이것들 [$y=\frac{1}{2}x^2$과 $\left(x-\frac{\sqrt{2b}}{2}\right)^2+y^2=\frac{b}{2}$]의 교점을 기하학적 해라고 제시했었네? 어떻게 나온 것이지?

2학생A: **이차함수는 그대로 하고, 원의 중심을 맞추다보니 이렇게 나왔어요.**

3연구자: 변수 b만 생각하고 a는 생각 못했네? 한번 두 식을 연립해서 삼차방정식 나오는지 확인해보지 그랬어?

4학생A: 네.

5연구자: 컴퓨터에서는 a, b 다 이용했어?

6학생A: 네, 슬라이드 기능으로 했어요.

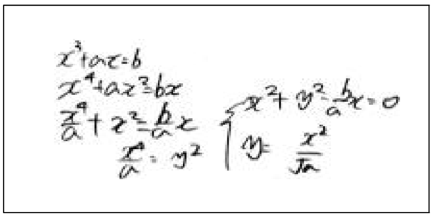
7연구자: 이[$y=x^3+ax-b$] 그래프는 어떻게 활용했어?

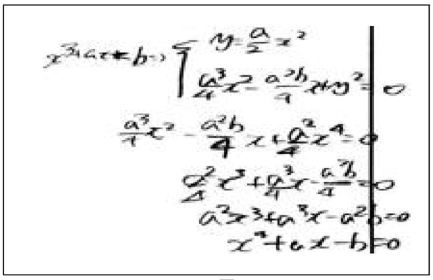
8학생A: **x절편하고 [$\left(x-\frac{\sqrt{2b}}{2}\right)^2+y^2=\frac{b}{2}$과 $y=\frac{1}{2}x^2$의 교점의 x좌표를]맞춰보니 값이 달라서 대입해봤어요.**

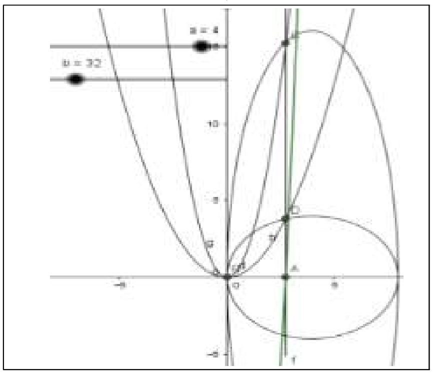
한편, 학생 A는 일반화된 삼차방정식 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 표현하기 위한 원뿔곡선의 조합을 두 가지 더 제시하였다([그림 IV-10]). 학생 A의 $x^3+ax=b$의 해결 과정에 대한 면담 내용의 일부를 나타내고 있는 <발췌문 4>에서 추가로 제시한 기하학적 해에 대한 탐구 과정을 확인할 수 있다.

<발췌문 4> 학생 A의 $x^3+ax=b$의 해결 과정 면담 내용 2

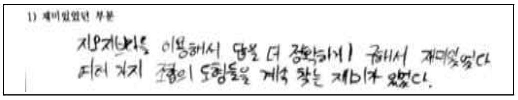
1연구자: 그래프를 더 많이 그려본 건가?
2학생A: **네, 왠지 더 많은 식이 가능할 것 같아서 한번 해봤어요.**
3연구자: 이것 [[그림 Ⅳ-10]의 $\left[x^2+y^2-\frac{b}{a}x=0,\ y=\frac{1}{\sqrt{a}}x^2\right]$ 부분]은 어떻게?
4학생A: **전에는 [양변에]x 곱하고 4로 나누었는데, 여기서 한번 a로 나누어 그려보니 [$y=x^3+ax-b$의 x절편과]교점이 같았어요.**
5연구자: 이것[[그림 Ⅳ-10]의 $\left[y=\frac{a}{2}x^2,\ \frac{a^3}{4}x^2-\frac{a^2b}{4}x+y^2=0\right]$ 부분]은?
6학생A: **이것은 이차함수가 $y=\frac{a}{2}x^2$으로도 될 것 같아서요. 사차항이[사차항의 계수가] $\frac{a^2}{4}$이 되도록 식을 만들어봤어요.**
7연구자: 과감한 도전이었는데?
8학생A: **GeoGebra로 해봤어요.**
9연구자: 이[$y=x^3+ax-b$] 그래프 이용해서?
10학생A: **원 부분 나온 것 하고 같이 돌려봤는데, 이렇게 교점[[그림 IV-10]의 점 A, C, D의 x좌표]이 다 같았어요.**







[그림 IV-10] DGE에서 학생 A의 $x^3+ax=b$의 해결 과정 2(활동지 및 화면)



[그림 IV-11] DGE에서 학생 A의 $x^3+ax=b$의 해결에 관한 소감

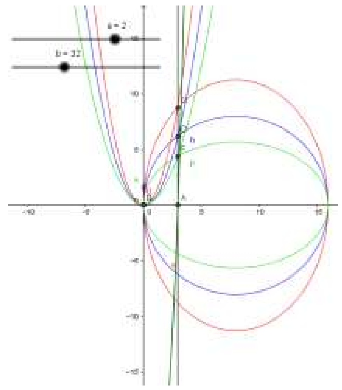
학생 A는 사차방정식을 이끌어 내는 과정에서 다양한 식을 생각하였으며(2학생A, 4학생A, 6학생A), 이를 동적 기하 환경에서 구현해보면서 또 다른 일반해가 있다는 것을 확인하였다([그림 IV-10]). 앞에서 주어진 삼차방정식 $x^3+4x=32$의 양변에 x를 곱하여 식을 조작한 방법을 이용해, 양변을 a로 나누어 삼차방정식 $x^3+ax=b$의 두 번째 기하학적 해를 표현하기 위한 원뿔곡선의 방정식 $y=\frac{1}{\sqrt{a}}x^2$과 $x^2+y^2-\frac{b}{a}x=0$의 조합을 찾을 수 있었으며, 대수적 조작을 통하여 $y=\frac{a}{2}x^2$을 유도하고, 세 번째 일반해를 제시하기

$$x^3+ax=b \rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ \frac{a}{4}x^2-\frac{b}{4}x+y^2=0 \end{cases}$$

$$x^3+ax=b \rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{\sqrt{a}}x^2 \\ x^2-\frac{b}{a}x+y^2=0 \end{cases}$$

$$x^3+ax=b \rightarrow \begin{cases} y=\frac{a}{2}x^2 \\ \frac{a^3}{4}x^2-\frac{a^2b}{4}x+y^2=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$



[그림 IV-12] DGE에서 학생 A의 $x^3+ax=b$의 해결 과정 재구성

위한 $y=\frac{a}{2}x^2$ 및 $\frac{a^3}{4}x^2-\frac{a^2b}{4}x+y^2=0$의 조합을 찾을 수 있었다(4학생A, 6학생A).

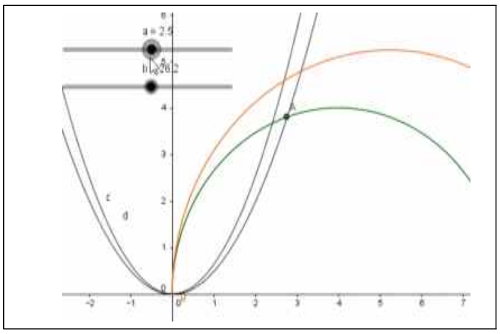
학생 A는 지필 환경에서 변수 b만을 이용하여 제시한 삼차방정식 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 동적 기하 환경에서 다양한 표현 활동을 통하여 수정할 수 있었으며, 여러 가지 도형의 조합을 대수적으로 발견하여 또 다른 기하학적 해를 제시할 수 있었다([그림IV-11]).

[그림 IV-12]는 학생 A의 $x^3+ax=b$의 해결 과정을 연구자가 재구성한 것이며, 세 가지 형태의 도형의 조합에서 교점의 x좌표와 $y=x^3+ax-b$의 그래프의 x절편이 일치하는 것을 확인할 수 있다.

한편, 변수 a, b가 포함된 식을 좌표평면에 표현하기 위해서 모든 학생들은 동적 기하 환경의 슬라이드 기능을 활용하였다. 학생 A, 학생 B, 학생 C가 동적 기하 환경의 슬라이드 기능을 활용하여 삼차방정식 $x^3+ax=b$의 기하학적 해의 의미를 재해석한 내용을 분석하고자 한다.

다음의 [그림 IV-13]은 동적 기하 환경을 활용한 학생 C의 $x^3+ax=b$의 해결 과정을 보여주고 있다. 동적 기하 환경하의 문제 해결 과정에서 학생 C는 $x^3+4x=32$의 기하학적 해를 제시하면서 활용한 식 $y=\frac{1}{2}x^2$과 $y=\sqrt{8x-x^2}$을 동적 기하 창에 고정시켜 놓았다.

이후 지필 환경에서 해결한 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 확인하기 위하여 포물선의 방정식인 $y=\frac{1}{\sqrt{a}}x^2$과 원의 방정식을 변형한 상반원의 방정식인 $y=\sqrt{\frac{b}{a}x-x^2}$을 슬라이드 기능을 활용하여 표현한 다음 변수 a, b의 값을 변화시키면서 $a=4,\ b=32$의 값이 될 경우에 고정시킨 도형의 조합과 맞는지 여부를 관찰하였다.



[그림 IV-13] DGE에서 학생 C의 $x^3+ax=b$의 해결 과정

비록 지필 환경에서 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 제시하긴 했지만, 학생 C는 슬라이드 기능을

활용하여 포물선의 방정식 $y=\frac{1}{\sqrt{a}}x^2$과 상반원의 방정식 $y=\sqrt{\frac{b}{a}x-x^2}$을 표현해 본 이후, a,b의 값을 변화시키면서 $x^3+4x=32$가 포함된 $x^3+ax=b$의 형태로 삼차방정식의 기하학적 해를 일반화하여 고찰할 수 있었다.

동적 기하 환경의 슬라이드 기능은 변수 a,b가 포함된 도형을 좌표평면에 표현할 수 있게 해주었을 뿐만 아니라, 변수 a,b에 따른 도형의 변화 양상을 파악할 수 있게 하여, 변수 a,b가 삼차방정식의 기하학적 해를 제시하기 위하여 필요한 원뿔곡선의 표현에 어떤 영향을 주게 되는지 이해할 수 있도록 지원하였다.

V. 논의 및 결론

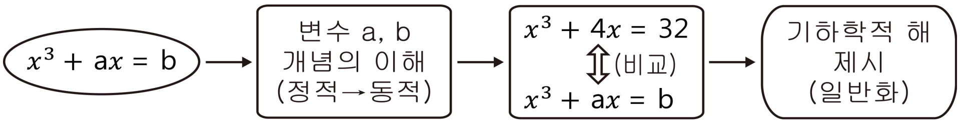
본 연구에서는 중세 시대의 아랍의 수학자 Omar Khayyam이 제시한 삼차방정식의 기하학적 해법을 현대적인 의미로 재해석하고 이들의 활용 방법을 제시한 반은섭 외(2016)의 연구 결과를 참고하여 학생들이 삼차방정식 $x^3+ax=b$를 기하학적으로 해결한 과정을 분석하였다.

연구에 참여한 모든 학생들은 이미 삼차방정식 $x^3+4x=32$의 기하학적 해법을 알고 있었으며, 이를 일반화하면서 지필 환경에서는 삼차방정식 $x^3+4x=32$의 기하학적 해법의 대수적 절차를 구조적으로 이해하고 이를 적용했던 학생 C만이 문제 해결에 성공할 수 있었다. 일반화된 삼차방정식 $x^3+ax=b$를 기하학적으로 해결하는 과정에서 대수식에 대한 일반화와 함께 변수가 포함되어 있는 추상적인 도형을 좌표평면에 표현하는 활동이 수반되기 때문에 삼차방정식 $x^3+4x=32$의 기하학적 해법을 사례로 한 귀납의 활동이 인지적으로 부담이 되었을 가능성이 있다. 본 연구에서는 지필 환경 이후에 제공된 동적 기하 환경이 일반화의 과정에 유의미한 영향을 주었다는 연구 결과를 제시하였다. 연구 결과를 종합하면 다음과 같은 논의가 가능하다.

첫째, 연구에 참여한 모든 학생들은 $x^3+4x=32$의 기하학적 해법을 하나의 예로 하는 귀납 활동을 통하여 $x^3+ax=b$를 기하학적으로 해결하였으며, 특히 이 과정에서 학생 B는 이미 주어진 삼차방정식 $x^3+4x=32$를 참고하여 일차항의 계수와 상수항을 8의 배수로 적절하게 바꾸어 또 다른 예인 삼차방정식 $x^3+8x=72$를 새롭게 구성한 후, 귀납 활동에 적용하는 방법을 선택하였다. 학생 B는 $x^3+4x=32$의 기하학적 해와 $x^3+8x=72$의 기하학적 해를 동시에 활용하여 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 제시할 수 있었으며, 이러한 결과는 귀납의 과정에서 사례가 늘어날수록 일반화의 결과에 대한 신뢰성이 커진다는 Polya(2003)의 설명을 뒷받침하는 것이라고 할 수 있으며, 구체적인 사례들로부터 일반화를 하는 과정에서 학생들이 활용하게 되는 예의 역할이 매우 중요하기 때문에 좋은 예를 잘 선택하여 제시해 줄 필요가 있다는 Sriraman(2004)과 Zazkis et al.(2007)의 연구 결과를 지지하는 것이라고 할 수 있다.

둘째, 귀납의 과정에서 하나의 사례가 되었던 '$x^3+4x=32$의 기하학적 해법'에 포함되어 있는 대수적 절차를 구조적으로 이해하고 이를 변수가 포함되어 있는 일반화된 식에 적용한 학생 C만이 지필 환경에서 일반화에 성공을 할 수 있었으며, 이는 귀납을 통한 일반화 과정에서 변수의 의미를 구조적으로 파악할 수 있어야 한다는 Drijvers(2001)의 주장을 지지하는 결과이다.

동적 기하 환경의 슬라이드 기능을 통하여 삼차방정식 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 제시하는 과정에서 학생들은 변수 a,b의 값을 다양한 값으로 변화시킬 수 있었으며, 이는 동적 기하 환경이 기존에 해결한 삼차방정식 $x^3+4x=32$의



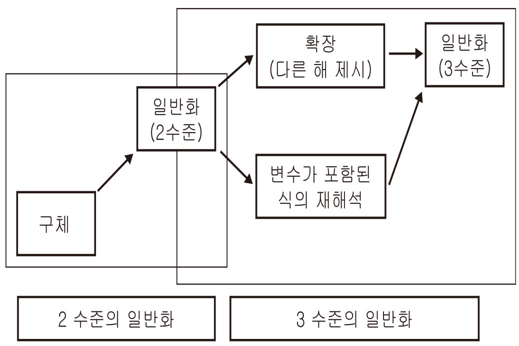
[그림 V-1] 슬라이드 기능을 활용한 변수 개념의 이해 과정

기하학적 해를 포함한 다양한 삼차방정식의 기하학적 해를 표현하고 비교할 수 있게 하여, 변수에 대한 의미를 동적으로 이해하고, $x^3+4x=32$의 기하학적 해를 일반화하여 해석할 수 있도록 지원하였다고 볼 수 있다. [그림 V-1]은 슬라이드 기능을 활용한 변수 개념의 이해 과정에 대한 도식이다. 정적인 개념과 동적인 개념의 변수의 의미를 올바로 이해할 수 있을 때, 다양한 사례의 삼차방정식의 기하학적 해법을 개별적인 상태로만 보지 않고, 그것을 하나의 범주로 묶어서 보편적으로 파악할 수 있었다.

셋째, 학생들이 변수에 대한 의미를 동적으로 해석한 결과, 일반화의 수준이 향상되었다. 모든 학생들은 $x^3+4x=32$의 기하학적 해법을 바탕으로 대수적으로 접근하여 $x^3+ax=b$에서 유도할 수 있는 두 개의 원뿔곡선의 방정식을 변수 a, b로 나타내었으며, 좌표평면에 원뿔곡선을 표현하여 일반해를 제시할 수 있었다. 이후 동적 기하 환경의 슬라이드 기능을 활용하여 변수 a, b를 다양하게 변화시키면서 변수에 따른 도형의 변화 양상을 확인하고 이미 제시한 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 재해석하여 매개변수의 족을 다룬다는 인식을 할 수 있었으며, 매개변수의 변화에 따른 변수들의 의미와 관계를 이해할 수 있었다.

이와 같은 결과는 제시된 일반해를 재해석하는 활동을 통하여 일반화의 수준이 2 수준보다 더 높은 수준인 3 수준으로 향상될 수 있다는 것을 보여주고 있다. 특히 변수에 따른 도형의 변화 양상을 관찰하면서 삼차방정식의 기하학적 해를 구성하는 도형들의 불변적 관계를 인식할 수 있는 경우에는 2 수준의 일반화보다는 차원이 더 높은 3 수준의 일반화에 도달할 수 있었다는 판단을 할 수 있다. 또한 학생 A의 경우에 동적 기하 환경을 통하여 삼차방정식의 일반해를 제시한 이후, 이를 확장하여 또 다른 일반해를 제시할 수 있었으며, 삼차방정식의 기하학적 해에 대한 새로운 심상을 형성할 수 있게 되어 일반화의 수준을 향상시킬 수 있었다. 귀납의 과정에서 일반화 수준의 향상에 대한 내용을 [그림 V-2]와 같은 도식으로 표현할 수 있다.

일반화 과정에서 동적 기하 환경을 통하여 변수가 포함된 도형을 기하학적으로 표현할 수 있었으며, 이미 제시한 삼차방정식 $x^3+4x=32$의 기하학적 해 및 삼차함수 $y=x^3+ax-b$의 x절편 등과 비교해보면서 일반해가 옳은지 여부를 확인하고, 재탐색의 과정을 거쳐 수정된 기하학적 해를 제시한 결과, 2 수준의 일반화를 할 수 있었다.



[그림 V-2] 일반화의 수준 향상
(2 수준과 3 수준의 일반화)

이후 학생들은 변수를 다양하게 조작해보면서 변수가 포물선과 원을 결정하게 된다는 것을 확

인하게 되어 이미 제시한 해를 재해석할 수 있었으며, 또 다른 일반해를 찾는 활동을 통하여 보다 높은 3 수준의 일반화에 이르게 되었다. 동적 기하 환경을 활용하여 일반화된 삼차방정식에 기하학적으로 접근하는 문제 해결 과정에서 일반화의 수준이 향상될 수 있다는 본 연구의 결과는 대수식에서 변수의 이해를 바탕으로 일반화 수준을 다룬 Becker & Rivera(2005), De Giessen(2002), Drijvers(2001) 등의 연구 결과를 대수와 기하의 수학적 연결성을 근간으로 하고 있는 해석기하의 영역으로 확장하여 해석할 수 있는 근거로 활용될 수 있을 것이다.

본 연구에서 제공한 동적 기하 환경이라는 풍부한 탐구 학습의 환경을 통하여 학생들은 이미 해결한 $x^3+4x=32$ 이외의 사례에 대한 기하학적 해법을 적용하여 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 귀납적으로 탐색하고 식을 비교할 수 있었다. 또한 동적 기하 환경은 학생들이 일반해를 제시한 이후에 슬라이드 기능을 통하여 변수 a, b의 값에 따른 도형의 변화 양상 및 교점의 변화를 관찰할 수 있게 하여 삼차방정식 $x^3+ax=b$의 기하학적 해에 대한 보다 심도 있는 해석을 할 수 있도록 하였으며, 이미 제시한 $x^3+ax=b$의 기하학적 해를 보다 확장하여 또 다른 일반해를 제시할 수 있도록 지원하였다.

이와 같은 결과는 변수가 포함되어 있는 일반화의 문제 해결 과정에서 동적 기하 환경이 학생 중심의 탐구 수단으로서 유의미하게 활용될 수 있다는 시사점을 제공하는 것이다. 본 연구를 기초로 하여 학교 수학의 다양한 영역에서 동적 기하 환경을 활용하여 변수가 포함된 일반화의 상황을 다루고, 이를 교수 및 학습의 상황에 적용할 수 있는 방법을 제시해주는 많은 연구가 이루어지기를 기대한다.

참고문헌

김남희(2004). 매개변수 개념의 교수-학습에 관한 연구. **수학교육학연구, 14**(3), 305-325.

김성준(2004). 학교수학에 제시된 분석적 아이디어의 고찰. **교과교육학연구, 11**(2), 499-515.

김화경 · 조한혁(2004). DGS 동적 기하에서의 새로운 함수적 관점의 정의. **한국수학교육학회 시리즈 A. 수학교육, 43**(2), 177-186.

반은섭 · 신재홍 · 류희찬(2016). 오마르 카얌(Omar Khayyam)이 제시한 삼차방정식의 기하학적 해법의 교육적 활용. **학교수학, 18**(3), 589-608.

우정호(2007). **학교수학의 교육적 기초**(증보판 2판). 서울대학교출판부.

장혜원(2007). Clairaut의 <대수학 원론>에 나타난 대수지도 원리에 대한 분석. **수학교육학연구, 17**(3), 253-270.

장혜원 · 강정기(2013). 기하 정리의 일반성 인식을 위한 동적기하환경의 활용. **수학교육학연구, 23**(4), 585-604.

조영주 · 김경미(2010). 컴퓨터 대수 환경에서 매개변수 개념에 대한 고등학생의 이해에 관한 사례 연구. **한국수학교육학회 시리즈 E. 수학교육논문집, 24**(4), 949-974.

지영명 · 유연주(2014). 매개변수의 인식과 오류에 대한 연구. **학교수학, 16**(4), 803-825.

Akgün, L., & Özdemir, M. E. (2006). Students' understanding of the variable as general number and unknown: A case study. *The Teaching of Mathematics, 9*(1), 45-51.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Barbosa, A., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Patterns and generalization: The influence of visual strategies. *Proceedings of the 5th Congress* *of the European Society for Research in Mathematics Education*, 844-851.

Bayazit, I., & Aksoy, Y. (2010). Connecting representations and mathematical ideas with GeoGebra. *GeoGebra International Journal of Romania, 1*(1), 93-106.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. *Proceedings of the 29th PME Conference, vol 4*, 121-128.

Bills, L., & Rowland, T. (1999). Examples, generalisation and proof. In L. Brown (Ed.), Making meaning in mathematics. *Advances in mathematics education* (*vol 1*, pp. 103-116). York, UK: QED.

Connor, M. B. (1956). *A historical survey of methods of solving cubic equations*. Unpublished master's dissertation, University of Richmond, Virginia.

Davydov, V. V. (1990). Type of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula (translated by J. Teller). In J. Kilpatrick (Ed.), *Soviet studies in mathematics education vol 2*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. (원저는 1972년에 출판).

De Giessen, C. (2002). The visualisation of parameters. In M. Borovcnik & H. Kautschitsch (Eds.), *Technology in mathematics teaching (Proceedings of ICTMT5 in Klagenfurt 2001)* (pp. 97-100). Vienna: öbv&hpt Verlagsgesellschaft.

Dienes, Z. P. (1971). *Building up mathematics* (Fourth Edition). London: Hutchinson.

Dindyal, J. (2004). Algebraic thinking in geometry at high school level: Students' use of variables and unknowns. In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010 (Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Townsville)* (pp. 183-190). Sydney: MERGA, Inc.

__________ (2007). The need for an inclusive framework for students' thinking in school geometry. *The Montana Mathematics Enthusiast, 4*(1), 73-83.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop (Ed.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In. D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Boston: Kluwer.

Drijvers, P. (2001). The concept of parameter in a computer algebra environment. *Proceedings of 25th PME Conference, vol 2*, 385-392.

__________ (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of concept of parameter.* Unpublished doctoral dissertation, Freudenthal Institute, Utrecht, Netherlands.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical problem solving and learning. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal of Research in Mathematics Education, 32*(2), 195-222.

Hohenwarter, M. (2002). *GeoGebra-Ein Software system für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*. Unpublished master's dissertation, University of Salzburg, Austria.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and Algebra: the case of GeoGebra. In D. Küchemann (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27*(3), 126-131.

Holyoak, K. J., & Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition, 15*(4), 332-340.

Hoyles, C., Noss, R., & Pozzi, S. (1999). Mathematizing in practice. In C. Hoyles, C. Morgan, & G. Woodhouse (Eds.), *Rethinking the mathematics curriculum* (pp. 48-62). London: Falmer Press.

Hoyles, C., & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century(ICME Study 8)* (pp. 121-128). Dordrecht: Kluwer.

John, K. (2002). Research on the use of dynamic geometry software. *MicroMath, 18*(3), 18-20.

________ (2011). The value of learning geometry with ICT: lessons from innovative educational research. In A. Oldknow., & C. Knights (Eds.), *Mathematics Education with Digital Technology* (*chapter 5*, pp. 39-45). London: Continuum.

Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Khayyam, O. (2008). *An essay by the uniquely wise ABEL FATH BIN AL-KHAYYAM on algebra and equations*. Translated by R. Khalil & Reviewed by W. Deeb. UK: RG1 4QS.

Mardia, K. V. (1999). *Omar Khayyam, Rene Descartes and solutions to algebraic equations*. Presented to Omar Khayyam Club, London. Retrieved from http://www1.maths.leeds.ac.uk/~sta6kvm/omar.pdf.

Mason, J. H. (2002). Generalisation and algebra: Exploiting children's powers. In L. Haggerty (Ed.), *Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice* (pp.105-120). London: RoutledgeFalmer.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Mitchelmore, M. C. (2002). The role of abstraction and generalisation in the development of mathematical knowledge. In D. Edge, & B. H. Yeap (Eds.), *Mathematics education for knowledge- based era (Proceedings of the 2nd East Asia Regional Conference on Mathematics Education and the 9th Southeast Asian Conference on Mathematics Education)* (pp. 157-167). Singapore: Association of Mathematics Educators.

Polya, G. (2003). **수학과 개연 추론 (I 권: 수학에서의 귀납과 유추)**(이만근, 최영기, 전병기, 홍갑주, 김민정 역). 서울: 교우사. (원저는 1968년에 출판).

_________ (2005). **어떻게 문제를 풀 것인가? -수학적 사고와 방법-**(우정호 역). 서울: 경문사.(원저는 1956년에 출판).

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher, 81*(6), 420-427.

Skemp, R. (1986). *The psychology of learning* *mathematics* (2nd ed). Harmondsworth, England: Penguin.

Sriraman, B. (2004). Reflective abstraction, uniframes and formulation of generalizations. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(2), 205-222.

Tall, D. (2011). Looking for the bigger picture. *For the Learning of Mathematics., 31*(2), 17-18.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2004). How do high school students interpret parameters in algebra. *Proceedings of the 28th PME Conference, vol 4*, 361-368.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Wagner, S., & Kieran, C. (Eds.). (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

White, P., & Mitchelmore, M. (1999). *Learning mathematics: A new look at generalisation and abstraction.* Referred paper at the combined conference of the Australian and New Zealand Associations for Research in Education, Australia.

Yilmaz, R., Argün, Z., & Keskin, M. (2009). What is the role of visualization in generalization processes: The case of preservice secondary mathematics teachers. *Humanity & Social Sciences Journal, 4*(2), 130-137.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. J. (2007). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 131-141.

Understanding Variables and Enhancing the Level of Generalization in Problem Solving Utilized Dynamic Geometry Environment

Ban, Eun Seob (Heungdeok High School)
Lew, Hee Chan (Korea National University of Education)

In this study we have analyzed processes of generalization in which students have geometrically solved cubic equation $x^3+ax=b$, regarding geometrical solution of cubic equation $x^3+4x=32$ as examples. The result of this research indicate that students could especially re-interpret the geometric solution of the given cubic equation via dynamically understanding the variables in dynamic geometry environment. Furthermore, participants could simultaneously re-interpret the given geometric solution and then present a different geometric solutions of $x^3+ax=b$, so that the level of generalization could be improved. In conclusion, the study could provide useful pedagogical implications in school mathematics that the dynamic geometry environment performs significant function as a means of students-centered exploration when understanding variables and enhancing the level of generalization in problem solving.

* Key Words : generalization(일반화), variables(변수), geometric solving of cubic equation(삼차방정식의 기하학적 해결), dynamic geometry environment(동적 기하 환경)

논문접수 : 2017. 1. 10
논문수정 : 2017. 2. 10
심사완료 : 2017. 2. 17