대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 1, 51 ~ 67. Feb 2017

이차곡선의 작도 활동에서 나타난 유추적 사고

허 남 구*

유추는 학생들의 문제 해결력, 귀납적 추론, 수학적 발견술, 창의성 신장에 도움을 줄 수 있는 수학 교육적으로 유용한 사고 방법이다. 학생들은 서로 다른 수학적 대상에 대해 유사성을 바탕으로 연결함으로써 두 대상 사이의 관계를 인식할 수 있다. 본 연구에서는 예비수학교사들이 이심률의 정의에 따른 이차곡선의 작도 과정에서 드러난 사고의 특징을 유추의 관점에서 분석하였다. 그 결과, 바탕 문제에 관한 수학적 지식의 부재와 바탕 문제의 수학적 지식에 대응하는 목표 문제의 수학적 지식의 부재는 목표 문제의 해결에 도움되지 못하였다. 바탕 문제의 다양한 해결 방법은 목표 문제의 해결에 도움을 주었으며, 일부는 작도 문제의 해결에 있어 적절한 바탕 문제를 설정하고 대수적 방법을 통해 문제를 해결하였다. 마지막으로 잠재적 유사성에 근거한 유추는 새로운 풀이 방법을 발견하는데 도움을 주었다.

Ⅰ. 서 론

사람들은 현실에서 새로운 문제를 접한다면 과거 동일한 문제에 부딪혔던 경험이나 유사한 문제에 부딪혔던 경험을 바탕으로 주어진 문제를 해결하려는 경향이 있다. 예컨대, 사람들은 전구를 교체해야 할 필요가 있는 상황에서 과거 같은 종류의 전구를 교체했던 경험이나 유사한 종류의 전구를 교체했던 경험을 회상하며 전구의 교체 방법을 찾기도 하고, 사회적인 문제가 발생할 경우에 역사적 자료를 바탕으로 유사한 사건이 일어난 경우를 살펴보기도 한다. 이러한 경향은 수학 문제를 해결하는 과정에서도 흔히 나타난다. Polya(1957)는 과거에 유사한 문제를 본 적이 있거나 친숙한 문제 중에 미지의 것이 같거나 유사한 문제가 있는지를 살펴보는 것이 문제 해결을 위한 전략 중 하나라고 하였으며, Schoenfeld(1985)는 동치인 문제나 유사한 문제를 알고 있는 학생의 문제 해결력이 다른 학생들의 문제 해결력보다 높았다고 하였다. 이와 같이 유추는 학생들의 수학적 문제 해결, 귀납적 추론, 추상적 개념 학습, 수학적 발견술, 창의적 사고, 지식의 전이에 도움을 주며, 학생들이 수학적 개념 사이의 연결성을 인식할 수 있도록 도와준다(공선혜, 한인기, 2008; 우정호, 2002; 이경화, 2009a, 2009b; 이승우, 우정호, 2002; 이종희, 2003; 이종희, 김선희, 2002; 최남광, 류희찬, 2014; Alexander et al., 1997; English, 1997, 2004; Gentner et al., 2001; Goswami, 2004; Holyoak & Thagard, 1995; Klauer & Phye, 2008; Lee & Sriraman, 2011; Novick, 1988; Polya, 1954; Treffinger, Isaksen, Dorval, 2000; Weisberg, 2006). 이처럼 유추가 수학 교육에서 학생의 수학 학습에 도움을 줄 수 있는 중요한 사고 방법임에도 불구하고 학

* 대전송촌고등학교, mimirul@nate.com

교 수학에서는 충분히 다루어지지 않고 있다 (English, 1997, 2004).

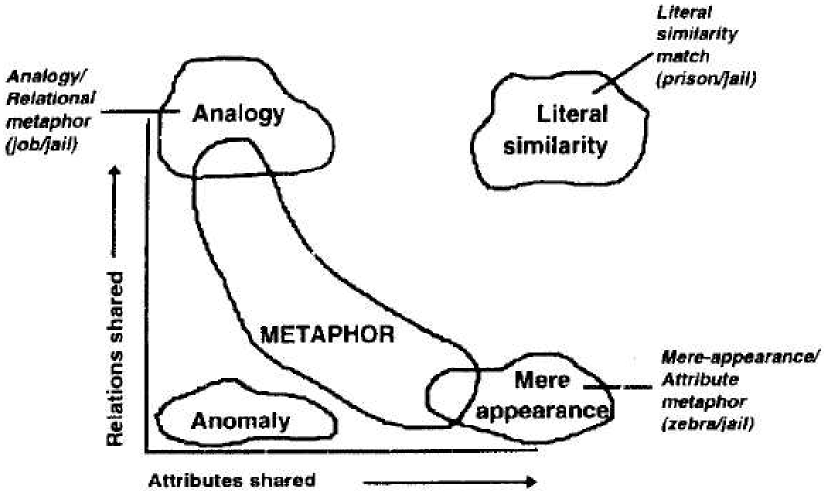
원, 포물선, 타원, 쌍곡선의 이차곡선은 서로 무관한 것이 아니라 서로 밀접하게 연결되어 있는 수학적 주제이다(양성현, 강옥기, 2011; 이승훈, 조완영, 2013; 장미라, 강순자, 2010; 허남구, 2014). 특히 이심률은 파푸스(Pappus)가 이차곡선을 하나로 통일시키려고 고안한 개념으로서 유추적 사고를 유발하기 좋은 수학적 소재이다 (장미라, 강순자, 2010). 이에 장미라와 강순자(2010)은 이심률을 이용한 이차곡선의 정의를 교수학습에 활용함으로써 학생들이 이차곡선들 사이의 관련성을 알 수 있도록 도와줄 수 있다고 하였다. 또한 이심률과 관련된 내용이 학교수학에 포함되어 있지 않아 학생들은 수학 교과에서 이심률에 대해 학습하고 있지 않지만, 과학 교과에서는 행성의 운동과 관련하여 이심률을 학습하고 있으며 2015개정 교육과정은 주어진 이심률과 장반경으로 타원의 궤도를 작도하는 활동을 제시하고 있다(교육부, 2015; 최변각 외, 2011, pp.253-254). 이에 이승훈과 조완영(2013)은 이심률을 이용한 이차곡선의 정의를 비록 학교수학에 포함되어 있지 않지만 수학교사가 알아야 할 수학적 지식으로 다루고 있다. 즉, 교사들은 이심률을 이용한 이차곡선의 정의와 작도 방법을 앎으로써 학생들에게 이차곡선들 사이의 관련성을 알 수 있도록 도와줄 수 있으며, 다른 교과목의 학습에 도움을 줄 수 있으며 동시에 수학적 유용성을 인식하게 할 수 있다. 이는 2015개정 교육과정에서 강조하는 창의·융합 역량과 관련지을 수 있다(교육부, 2015). 이에 본 연구에서는 예비수학교사들이 이심률의 정의에 따른 이차곡선의 그래프를 작도하는 과정에서 드러난 사고의 특징을 유추의 관점에서 분석해보고자 한다.

II. 유추와 유사성

유추적 사고는 개인의 수학적 사고 과정에서 뿐만 아니라 수학의 발달 과정에서도 찾아볼 수 있다. 한인기(2001)는 삼각형의 성질을 볼록 다각형으로 일반화하는 과정에서 유추를 사용하여 볼록 다각형에서의 성질을 추측하였으며, 양기열과 이의진(2011)의 연구에서 학생들은 유추를 사용하여 이차곡선의 성질로부터 이차곡면의 성질을 탐구하였다. 이경화(2009b)는 집합론, 무한급수의 합, 음수와 복소수의 연산 등 수학 개념의 발달 과정에서 유추가 활용되었다고 하였다. 이처럼 유추는 수학과 수학교육에서 중요한 역할을 한다.

한인기와 에르든예프(2005)는 유추를 개념 유추와 방법 유추로 분류하였다. 개념 유추는 두 개념 A, B 모두 속성 a_1, a_2, $\cdots$, a_n을 가지며, A가 속성 x를 가지고 있으면 개념 B도 속성 x를 가지고 있을 것이라고 추론하는 것을 의미한다. 반면 방법 유추는 유사한 두 문제 A, B에 대해 문제 A의 풀이하는 방법을 x라 하면 문제 B의 풀이 방법도 x와 유사할 것이라고 추론하는 것을 의미한다. 이처럼 개념 유추와 방법 유추에 있어 두 개념(또는 문제) A와 B는 유사성을 지니고 있어야 한다. 따라서 유추적 사고 과정을 분석하기 위해서는 대상 사이의 유사성에 대해 고찰할 필요가 있다.

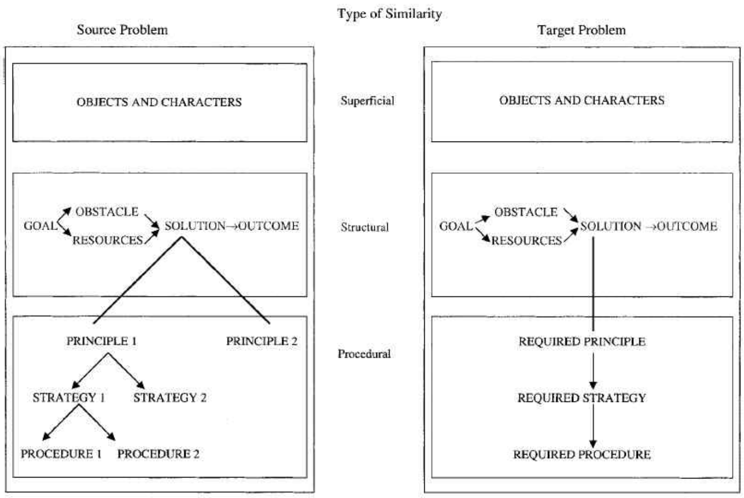
Gentner와 Markman(1997)에 따르면, 기저 영역(base domain)에서 목표 영역(tarket domain)으로의 유추적 사고에 있어 두 영역 사이의 유사성을 완전 유사성(literal similarity), 구조 유사성(structural similarity), 표면 유사성(surface similarity), 변칙 유사성(anomaly similarity)으로 분류하였다. 이러한 유사성은 기저 영역과 목표 영역이 외형적으로 유사한지와 구조적으로 유사한지에 따라 분류된다. [그림 II-1]에서 알 수 있듯



[그림 II-1] Gentner와 Markman(1997)이 분류한 유사성의 유형

이, 기저 영역과 목표 영역이 외형적으로 유사하면서 동시에 구조적으로 유사하면 완전 유사성, 외형적으로는 유사하지 않지만 구조적으로 유사하면 구조 유사성, 외형적으로 유사하지만 구조적으로 유사하지 않으면 표면 유사성, 외형적으로나 구조적으로 유사하지 않으면 변칙 유사성이라고 한다.

Chen(2002)은 방법 유추와 관련하여 절차 유사성(procedure similarity)을 새롭게 제시하였다. Chen은 바탕 문제와 목표 문제가 표면적으로 혹은 구조적으로 유사하더라도 바탕 문제의 해결 방법을 목표 문제로 유추하는 데 실패하는 경우를 발견하였다. 즉, 절차 유사성은 표면 유사성, 구조 유사성과 독립적이고, 바탕 문제의 문제 해결 방법들 중 적절한 문제 해결 방법을 선정하여 적용하는 것이 목표 문제의 해결에 있어 중



[그림 II-2] Chen(2002)의 유사성 분류

요하다는 것을 강조하고 있다([그림 II-2] 참조).

공선혜와 한인기(2008)는 유추를 사용하여 방접원과 관련된 삼각형의 작도 문제의 해결하는 방법을 연구하였다. 작도 문제의 해결 방법과 관련된 선행연구(Aleksandrov, 2004; Perepelkin, 1947)에 의하면, 대수적 방법은 작도 문제의 해결의 주요한 방법 중 하나이다. 한인기와 김문섭(2007)은 바탕 문제의 개념을 이용하여 유추를 통해 정사면체와 정육면체의 절단면을 작도하는 문제의 해결 방법을 연구하였으며, 공선혜와 한인기(2008)는 삼각형의 작도와 관련된 바탕 문제를 제시하여 유추를 통해 대수적으로 방접원과 관련된 삼각형의 작도 문제를 해결하였다. 이처럼 적절한 바탕 문제를 제시한 후, 주어진 작도 문제는 대수적 방법 등 다양한 문제 해결 전략을 통해 바탕 문제와의 유사성을 바탕으로 해결할 수 있다.

이상을 정리하면, 바탕문제와 목표문제 사이에 나타날 수 있는 유사성은 표면 유사성과 구조 유사성, 절차 유사성이 있으며, 작도 문제를 해결함에 있어 바탕문제를 생성하고 대수적 방법을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있다.

III. 연구 방법

1. 연구대상

이승훈과 조완영(2013)은 수학교사들이 알아야 할 이차곡선과 관련된 수학적 지식 중 하나로 이심률을 이용한 이차곡선의 정의를 제시하였다. 따라서 예비수학교사들은 미래의 수학교사로서 이심률을 이용한 이차곡선의 정의를 알고 이를 바탕으로 이차곡선을 작도할 수 있어야 한다. 이에 본 연구는 충청북도에 소재한 A대학교 수학교육과에 재학 중인 예비수학교사 28명을 대상으로 수행되었다. 본 연구에 참여한 예비수학교사는 2016년 1학기에 개설된 '수학과 정보화사회' 강좌를 수강한 1학년 학생으로서 22명의 남학생과 6명의 여학생으로 구성되어 있으며 28명의 예비수학교사들은 P1부터 P28로 나타내었다.

2. 연구일정 및 내용

2016년 3월 15일부터 4월 19일까지 다섯 차례의 GSP와 관련된 수업이 진행되었다. 예비수학교사들은 3월 15일부터 4월 12일에 동적기하소프트웨어인 GSP를 실습하였다. 예비수학교사들은 3월 15일에 GSP의 기본적인 작도 도구를 익히기 위하여 정삼각형, 정사각형, 삼각형의 오심을 작도하였으며, 3월 22일에 대수적 방법을 통한 작도 문제의 해결을 위하여 양수의 사칙연산, 이차방정식의 양의 근, 이차함수와 분수함수를 작도하였다. 또한 3월 29일에 대수기하적 정의에 따른 이차함수를 작도하였으며, 4월 12일에 GSP의 활용 과정으로 테셀레이션과 프랙탈을 실습하였다. 마지막으로 예비수학교사들은 4월 19일에 GSP에 대한 중간평가를 실시하였으며 본 연구는 예비수학교사들이 제출한 중간고사 결과를 바탕으로 분석하였다. 구체적인 수업 일정 및 내용은 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 수업 일정 및 내용

일시	수업 주제	차시
2016.3.15.	정삼각형, 정사각형, 삼각형의 오심 작도	3
2016.3.22.	양수의 사칙연산 작도, 이차방정식의 양의 근과 분수함수, 이차함수의 작도	3
2016.3.29.	대수기하적 정의에 따른 이차곡선의 작도	3
2016.4.12.	테셀레이션, 프랙탈의 탐구	3
2016.4.19.	GSP에 대한 중간고사	3

예비수학교사들은 본 연구에서 사용하는 과제의 바탕 문제로서 역할을 할 수학적 지식을 3월 29일에 학습하였다. 예비수학교사들은 대수기하적 정의에 따른 포물선의 서로 다른 두 가지 작도 방법을 탐구하였으며 이를 공유하였다. 또한 예비수학교사들은 대수기하적 정의에 따른 타원과 쌍곡선의 서로 다른 세 가지 작도 방법을 탐구한 후 이를 공유하였다.

3. 연구과제

본 연구는 2016년 4월 19일에 실시한 중간고사 중 일부 문제의 해결 과정을 분석하였다. 중간고사에는 총 4문제가 출제되었으며 본 연구와 관련된 문제는 <표 III-2>와 같다.

<표 III-2> 중간고사 문제

문제	내용
2	대수기하적 정의의 포물선 작도
3	이심률 정의의 타원 작도

2번 문제는 3월 29일에 다루었던 문제이므로 예비수학교사들이 주어진 과제를 해결하는데 시간은 충분하였다. 또한 3번 문제는 예비수학교사들에게 생소한 문제였지만 2번 문제와 외형적으로나 구조적으로 유사하다. 구체적으로 살펴보면, 2번 문제는 '점 F와 준선 l이 주어졌을 때, 선분 PF의 길이와 점 P로부터 준선 l까지의 거리의 비가 1:1을 만족하는 점 P를 작도하여 자취를 나타내어라.'이고, 3번 문제는 '점 F와 준선 l이 주어졌을 때, 선분 PF의 길이와 점 P로부터 준선 l까지의 거리의 비가 1:2를 만족하는 점 P를 작도하여 자취를 나타내어라.'이다. 본 연구에서는 예비수학교사들의 2번 문제의 해결 과정과 3번 문제의 해결 과정에서 나타난 유추적 사고를 분석하였다.

4. 자료 수집 및 분석 방법

예비수학교사들은 GSP를 이용하여 이심률로 정의된 타원을 작도하였다. 본 연구를 위해, 연구자는 예비교사들의 주어진 문제를 해결하기 위한 아이디어와 풀이 과정이 나타난 연습장과 GSP 파일을 수집하였다. 일부 예비수학교사들의 문제 해결 과정은 연습장과 GSP 파일만으로 확인하기 어려워 개별적으로 인터뷰를 실시하였으며, 인터뷰의 내용은 모두 녹음하였으며 이를 전사하여 분석하였다. 본 연구는 GSP 파일, 연습장, 녹음파일, 전사자료를 바탕으로 분석하였다.

IV. 연구 결과 및 논의

1. 바탕 문제와 목표 문제의 해결 여부

중간평가의 2번 문제(대수기하적 정의에 의한 포물선의 작도)는 3번 문제(이심률 정의에 의한 타원의 작도)를 해결하기 위한 바탕 문제의 역할을 할 수 있다. 따라서 2번 문제의 해결 여부와 3번 문제의 해결 여부 사이의 관계는 유추적 전이와 관련되어 있다. 예비수학교사들의 2번 문제와 3번 문제의 채점 결과는 <표 IV-1>과 같다.

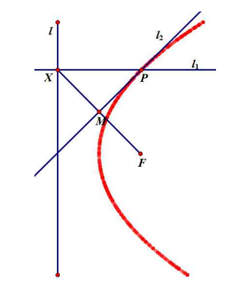
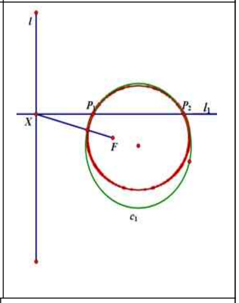
<표 IV-1> 2번 문제과 3번 문제의 채점 결과

3번 \ 2번	미해결	해결	계
미해결	2명	13명	15명
해결	0명	13명	13명
계	2명	26명	28명

<표 IV-1>에서 알 수 있듯이, 바탕문제인 2번 문제를 해결하지 못한 예비수학교사들은 목표문제인 3번 문제를 해결하지 못했다. 문제 2번를 해결하지 못한 2명의 예비수학교사들은 문제 2번과 문제 3번이 외형적으로 유사하여 비슷한 방법으로 풀 것 같지만 두 문제를 모두 풀지 못하였다고 말하였다. 즉, 바탕 문제의 수학적 지식(또는 대상, 방법)에 대한 부재는 목표 문제의 해결에 도움을 주지 못하였다. 이는 바탕 문제와 관련된 지식(또는 대상, 방법)이 유추적 전이를 통한 문제 해결에서 중요하다고 강조한 Alexander et al.(1997), English(1997), Gentner (1989)의 연구와 유사한 결과이다.

2. 목표 문제의 지식 부재로 인한 문제 해결 실패

대수기하적으로 정의된 포물선의 작도 문제 ‘점 F와 준선 l이 주어졌을 때, 선분 PF의 길이와 점 P로부터 준선 l까지의 거리의 비가 1:1을 만족하는 점 P를 작도하여 자취를 나타내어라.’와 이심률을 활용하여 정의된 타원의 작도 문제 ‘점 F와 준선 l이 주어졌을 때, 선분 PF의 길이와 점 P로부터 준선 l까지의 거리의 비가 1:2를 만족하는 점 P를 작도하여 자취를 나타내어라.’는 외형적으로나 구조적으로 유사하다. 따라서 대수기하적으로 정의된 포물선을 작도하는 방법을 유사하게 적용하여 이심률을 활용하여 정의된 타원의 작도 방법을 해결할 가능성이 있다. 실제 대수기하적으로 정의된 포물선의 작도 방법을 유사하게 적용하면 이심률로 정의된 타원을 작도할 수 있다. 이를 구체적으로 살펴보면 [그림 IV-1]과 같다.

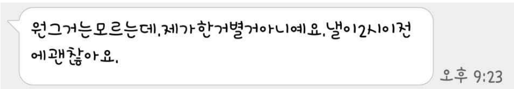
	포물선의 작도	타원의 작도
작도 화면		
작도 과정	1. 준선 l위에 점 X를 작도한다. 2. 점 X를 지나면서 준선 l과 수직인 직선 l_1을 작도한다. 3. $\mathrm{PF}:\mathrm{PX}=1:1$인 점 P의 자취로서 선분 FX의 수직이등분선 l_2를 작도한다. 4. l_1과 l_2의 교점 P를 작도한다.	1. 준선 l위에 점 X를 작도한다. 2. 점 X를 지나면서 준선 l과 수직인 직선 l_1을 작도한다. 3. $\mathrm{PF}:\mathrm{PX}=1:2$인 점 P의 자취로서 아폴로니우스 원 c_1를 작도한다. 4. l_1과 c_1의 교점 P를 작도한다.
대응	l_2: $\mathrm{PF}:\mathrm{PX}=1:1$인 점 P의 자취	c_1 : $\mathrm{PF}:\mathrm{PX}=1:2$인 점 P의 자취

[그림 IV-1] 포물선과 타원의 작도 과정

26명의 예비수학교사는 대수기하학적 정의에 따른 포물선의 작도 문제를 해결하였으며, 2명의 예비수학교사는 해결하지 못하였다. 포물선의 작도 문제를 해결한 26명의 예비수학교사는 [그림 IV-1]의 왼쪽과 같은 방법으로 문제를 해결하였지만 오른쪽과 같은 방법으로 타원을 작도한 예비수학교사는 없었다.

일부 예비수학교사들은 4월 19일에 실시한 중간평가가 종료될 때까지 기다린 후, 연구자에게 이심률의 정의에 의한 타원의 작도 방법에 대해 물었보았다. 이후, 예비수학교사들의 문제 해결 과정을 GSP 파일과 연습장을 통해 알아보았다. 연구자는 예비수학교사 P28가 제출한 GSP 파일을 살펴보던 중, P28의 사고 과정을 알아보기 위한 개인 인터뷰의 필요성을 느꼈다. [그림 IV-2]는 연구자와 P28이 인터뷰 시간을 조율하는 과

정에서 주고 받은 문자의 일부이다.



[그림 IV-2] P28과의 문자 내용

[그림 IV-2]에서 알 수 있듯이, P28은 포물선이 작도 과정에서 나타나는 수직이등분선에 대응되는 아폴로니우스의 원을 알지 못하였다. 하지만 이 문자의 내용만으로 아폴로니우스의 원에 대한 지식의 부재가 유추적 전이를 통한 문제 해결의 실패 원인이라고 할 수는 없다. <발췌문 1>은 예비수학교사 P28과의 인터뷰 내용 중 일부로 아폴로니우스의 원에 대한 지식의 부재가 작도의 실패 원인임을 보여주고 있다.

<발췌문 1> P28의 아폴로니우스 원에 대한 지식의 부재

1	T	어제 저녁에 보낸 문자보면 '원 그거 몰랐다'고 했는데 그게 어떤 의미니?
2	P28	아.. 시험 끝나고 교수님께서 보여준 방법에서 원 그거 모르는 거였어요.
3	T	아폴로니우스 원 말하는거지? 고등학교 1학년때 심화내용으로 배우는 경우도 있는데 처음 들어보는거니?
4	P28	네. 처음 들어봐요. 원래 포물선에서는 1:1되는 거 수직이등분선하니깐. 1:2되는 거 찾으려고 했는데 몰라서 못했어요.
5	T	그래도 다른 방법을 찾아서 풀었네.

예비수학교사 P28은 포물선의 작도 과정에서 수직이등분선에 대해 대응되는 아폴로니우스의 원을 찾고자 하였으나(1.4) 아폴로니우스의 원에 대한 선행지식을 지니지 못하여(1.2, 1.4) [그림 IV-1]의 오른쪽과 같은 방법으로 이심률 정의에 따른 타원을 작도하지 못하였다. P28을 포함한 다수의 예비수학교사는 아폴로니우스의 원에 대한 선행지식의 결여로 인해 타원을 작도하지 못한 것에 대해 아쉬움을 표현하였다. <발췌문 2>는 예비수학교사 P2와의 인터뷰를 나눈 것의 일부이다.

<발췌문 2> P2의 아폴로니우스 원에 대한 지식의 부재

1	P2	교수님 저 중간고사 몇 점 받았는지 알 수 있을까요?
2	T	3번 문제만 빼고 다 맞았는데.
3	P2	아.. 시험 끝나고 교수님께 물어봤을 때 풀어주는 거 봤어요. 그 원(아폴로니우스 원)만 알았으면 다 맞을 수 있었는데.. 아쉽네요.

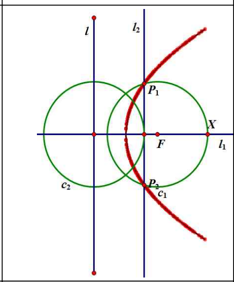
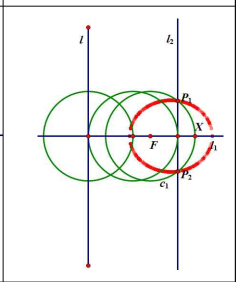
예비수학교사 P2는 중간평가의 성적에 대해 문의하던 중 3번 문제에 대한 이야기를 하였으며, P2는 아폴로니우스의 원과 관련된 지식의 부재로 인해 문제를 해결하지 못한 것을 아쉬워하였다(2.3).

이와 같이 학생이 바탕 문제를 성공적으로 해결하였더라도, 바탕 문제의 수학적 대상(또는 지식)에 대응하는 목표 문제의 수학적 대상(또는 지식)을 알지 못한다면 목표 문제의 해결에 실패할 수 있다. 즉, Alexander et al.(1997), English (1997), Gentner(1989)의 연구에서 바탕 문제와 관련된 지식이 유추적 전이를 통한 문제 해결에서 중요하다고 강조하였으나, 바탕 문제의 지식에 대응되는 목표 문제의 지식도 유추적 전이를 통한 문제 해결에 있어 결정적인 역할을 한다는 것을 알 수 있다.

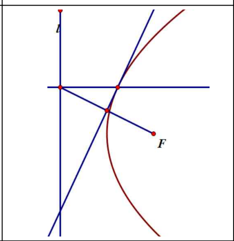
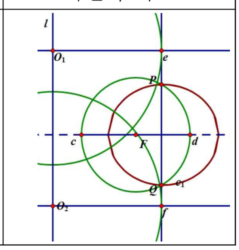
3. 다양한 바탕 문제의 해결 방법이 목표 문제의 해결에 미치는 영향

예비수학교사들은 3월 29일의 수업에서 포물선을 작도하는 두 가지 방법을 탐구하였다. 포

물선을 작도하는 첫번째 방법은 [그림 IV-1]의 왼쪽에 제시한 방법이며, 포물선을 작도하는 또 다른 방법과 이심률 정의에 따른 타원의 작도에 유사하게 이를 적용한 방법은 [그림 IV-3]과 같다.

	포물선의 작도	타원의 작도
작도 화면		
작도 과정	1. 점 F를 지나면서 준선 l과 수직인 직선 l_1을 작도한다. 2. 직선 l_1위에 점 X를 작도한다. 3. 평행한 두 직선 l과 l_2 사이의 거리가 선분 FX의 길이와 같도록 하는 직선 l_2를 작도한다. 4. l_2과 c_1의 교점 P를 작도한다.	1. 점 F를 지나면서 준선 l과 수직인 직선 l_1을 작도한다. 2. 직선 l_1위에 점 X를 작도한다. 3. 평행한 두 직선 l과 l_2 사이의 거리가 선분 FX의 길이의 두 배가 되도록 하는 직선 l_2를 작도한다. 4. l_2과 c_1의 교점 P를 작도한다.
대응	l_2: 평행한 두 직선 l과 l_2 사이의 거리가 선분 FX의 길이가 같도록 하는 직선	l_2: 평행한 두 직선 l과 l_2 사이의 거리가 선분 FX의 길이의 두 배가 되도록 하는 직선

[그림 IV-3] 포물선과 타원의 작도 과정

	포물선의 작도	타원의 작도
작도 화면		

[그림 IV-4] 문제 2와 문제 3의 작도 (P15)

[그림 IV-4]는 예비수학교사 P15의 문제 2와 문제 3의 풀이를 나타낸 것이다. [그림 IV-4]에 나타난 예비수학교사 P15의 문제 3번의 풀이 방법은 다음과 같다.

1) 점 F를 지나면서 준선 l과 수직인 직선(P15의 화면에는 기호로 표시되지 않았지만 편의상 l_1이라 표현)을 작도한 후, l_1 위에 한 점 d를 작도한다.

2) 점 F가 중심이고 반지름의 길이를 Fd인 원 c_1을 작도한다.

3) 준선 l 위의 임의의 두 점 O_1과 O_2를 작도하고, 두 점 O_1과 O_2를 지나면서 준선에 수직인 직선(편의상 l_2, l_3이라 표현)을 작도한다.

4) 점 O_1과 점 O_2가 중심이고 반지름의 길이가 2Fd인 두 원(편의상 c_2, c_3이라 표현)을 작도한다.

5) 직선 l_2와 원 c_2의 교점 e, 직선 l_3와 원 c_3의 교점 f를 작도하고, 두 점 e와 f를 지나는 직선(편의상 l_4라 표현)을 작도한다.

6) 직선 l_4와 원 c_1이 만나는 두 교점 P, Q를 작도한다.

[그림 IV-4]에서 알 수 있듯이, 예비수학교사 P15는 포물선을 작도하는 문제 2를 해결하기 위해 [그림 IV-1]의 왼쪽에서 제시한 방법을 사용하였지만, 이심률의 정의에 의한 타원을 작도하는 문제 3을 해결하기 위해 [그림 IV-3]의 오른쪽과 유사한 방법을 사용하였다. 연구자는 예비수학교사 P15가 문제 2와 문제 3의 풀이에 있어 서로 다른 방법을 사용한 이유를 알아보기 위하여 개인 인터뷰를 진행하였으며 <발췌문 3>은 일부를 나타낸 것이다.

<발췌문 3> 다양한 바탕 문제의 해결 방법

1 T P15야. 2번은 보니깐 수직이등분선을 이용해서 풀었는데 3번은 원하고 평행선을 이용해서 풀었네. 두 아이디어가 서로 같은 방법이라고 생각한거

야?

2 P15 아니요. 포물선 할 때 했던거 두 가지를 쓴 거예요.

3 T 포물선 작도하는 두 가지를 알고 있었는데 왜 2번하고 3번하고 다르게 풀었어?

4 P15 2번에서 푼 방법은 미리 공부해서 바로 한거구요. 이거 이용해서 3번 풀라고 했는데 무슨 원(아폴로니우스의 원)인가 그거를 못 찾아서 다른 방법 생각해보다가 다른 거 써서 포물선이랑 비슷하게 하니깐 풀렸어요.

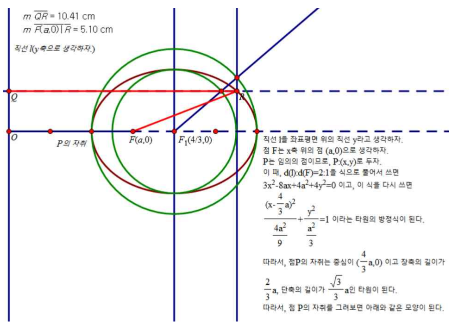
예비수학교사 P15는 [그림 IV-1]의 왼쪽에서 제시한 방법을 사용하여 포물선을 작도하였으나(3.2), 아폴로니우스의 원을 알지 못하여 문제 3을 해결하지 못하였다(3.4). 문제 3을 해결하기 위한 새로운 방법을 찾던 중, P15는 기존의 수업에서 학습한 포물선의 또 다른 작도 방법을 상기하여, 포물선에서는 원의 반지름과 준선과 평행선 사이의 거리의 비가 1:1이었던 관계를 1:2인 관계가 되도록 작도하여 문제 3을 해결하였다(3.4).

이와 같이 학생들은 유추적 사고 과정에서 바탕 문제에서 인출한 한 속성을 목표 문제로 대응시키는데 어려움을 느껴 목표 문제의 해결에 실패할 경우 바탕 문제의 또 다른 속성을 인출하여 이를 목표 문제에 대응시키기 위한 노력을 할 것이다(최남광, 류희찬, 2014). 따라서 다양한 바탕 문제의 해결 방법은 목표 문제의 해결에 도움을 줄 수 있다.

4. 대수적 방법을 통한 작도 문제의 해결

문제 3을 해결한 13명의 예비수학교사 중 11명은 대수적인 방법을 이용하였다. 예비수학교사들은 초점과 준선의 방정식을 평면좌표계에 나타낸 후, 점 P에서 준선 l까지의 거리와 PF의 길이의 비가 2:1임을 이용하여 점 P의 자취의 방정식을 구하였다. 이후, 예비수학교사들은 이미 해결한 바탕 문제를 설정하고 주어진 문제와의 유사성을 바탕으로 바탕 문제의 해결 방법을 적용하여 이심률로 정의된 타원을 작도하였다.

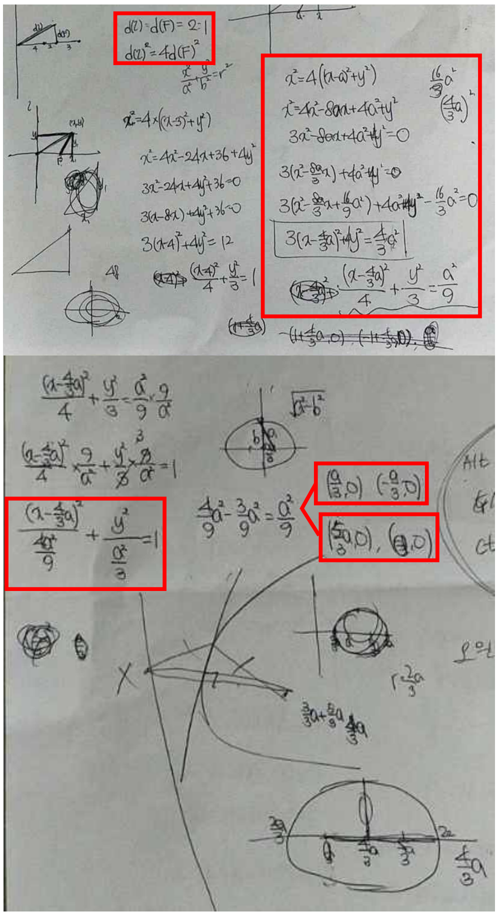
[그림 IV-5]와 같이, 예비수학교사 P1은 점 F의 좌표를 $\mathrm{F}(a,0)$, 준선 l의 방정식을 $x=0$, 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x,y)$라 놓고 점 P에서 준선 l까지의 거리와 PF의 길이를 계산하였다. 점 P에서 준선 l까지의 거리와 PF의 길이의 비가 2:1이라는 사실로부터 점 P의 자취의 방정식은 $3x^2-8ax+4a^2+4y^2=0$이 됨을 알 수 있었다. 즉, 점 P의 자취는 두 초점이 $\mathrm{F}(a,0)$, $\mathrm{F}'(\frac{5}{3}a,0)$이고, 장축의 길이가 $\frac{4}{3}a$인 타원이 된다. 따라서 대수기하적인 정의를 따르는 타원의 작도 문제를 바탕 문제로 설정하면 주어진 문제는 두 초점이 $\mathrm{F}(a,0)$, $\mathrm{F}'(\frac{5}{3}a,0)$이고, 장축의 길이가 $\frac{4}{3}a$인 타원의 작도 문제가 됨을 이용하여, P1은 바탕 문제와 유사한 방법을 사용하여 문제를 해결하였다.



[그림 IV-5] 대수적 방법을 통한 해결(P1)

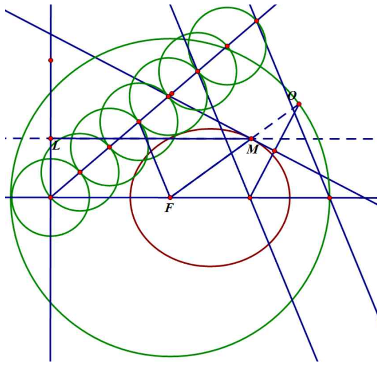
[그림 IV-6]과 [그림 IV-7]은 예비수학교사 P14가 대수적인 방법을 이용하여 작도 문제를 해결하는 과정을 나타낸 것이다. [그림 IV-6]과 같이, P14는 P1과 같은 방법으로 점 P의 자취의 방정식을 계산하였다. P14는 두 초점이 $(\frac{a}{3},0)$,

$(-\frac{a}{3},0)$이고, 장축의 길이가 $\frac{4}{3}a$인 타원을 작도하는 문제를 바탕 문제로 설정하였으며 이를 이용하여 점 P의 자취를 구하고자 하였다.



[그림 IV-6] 대수적 계산과 바탕 문제(P14)

P14는 양수의 사칙 연산을 작도하는 문제와 대수기하적 정의를 따르는 타원을 작도하는 문제를 바탕 문제로 설정하였다. P14는 중심이 한 직선 위에 있으며 반지름의 길이가 모두 같은 7개의 원을 [그림 IV-7]과 같이 작도하였다. 이후 닮음인 삼각형을 이용하여 $\frac{5}{3}a$와 $\frac{7}{3}a$를 작도함으로써 두 초점 $F(a,0)$, $F'(\frac{5}{3}a,0)$와 거리의 합 $\frac{4}{3}a$가 주어진 타원을 작도하였다.



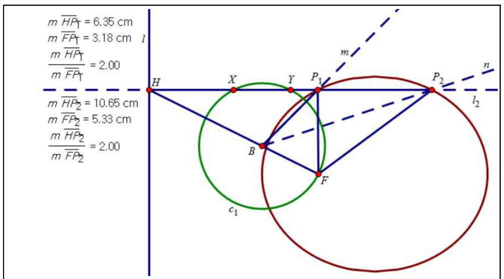
[그림 IV-7] 대수적 방법을 통한 해결(P14)

이와 같이 학생들은 주어진 작도 문제를 해결하는 과정에서 이미 해결한 기존의 작도 문제를 바탕 문제로 설정한 후 바탕 문제에서 사용한 작도 방법을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있다. 이는 이미 알고 있던 삼각형의 작도 방법을 활용하여 이를 새로운 작도 문제에 적용한 공선혜, 한인기(2008)의 연구 방법과 유사하다.

5. 바탕문제 해결 과정에서 나타난 도형들 사이의 관계에 대한 재해석과 분석법을 이용한 유추적 사고

예비수학교사 P28은 [그림 IV-1], [그림 IV-3], 대수적 방법이 아닌 새로운 방법을 사용하여 이심률로 정의된 타원을 작도하였다. <발췌문 1>에서 알 수 있듯이, P28은 [그림 IV-1]의 오른쪽과 같은 방법을 사용하여 이심률로 정의된 타원을 작도하고자 하였으나 아폴로니우스의 원에 대한 지식의 부재로 실패하였다. 이후 P28은 문제 3을 해결하기 위한 새로운 방법을 찾기 위해 노력하였다. [그림 IV-8]은 P28이 문제 3을 해결하는데 사용한 방법을 나타낸 것이다.

P28이 제출한 GSP의 화면은 [그림 IV-8]의 위쪽과 같다. 일부 예비수학교사들은 GSP 파일에 자신의 사고 과정을 서술해놓았지만([그림 IV-5] 참조), P28은 GSP 파일에 사고 과정을 서술해놓지 않았다. P28가 문제 3의 해결과 관련된 사고 과정을 알아보기 위하여 개인 인터뷰를 실시하였으며, <발췌문 4>는 P28과의 인터뷰 내용 중 문제 해결 과정에 대한 부분이다.



1. 준선 l위에 점 H를 작도한다.
2. 선분 FH를 1:2로 내분하는 점 B를 작도한다.
3. 점 H를 지나면서 준선 l에 수직인 직선 l_2를 작도한다.
4. 중심이 점 B이고, 반지름의 길이가 BF인 원 c_1을 작도한다.
5. 직선 l_2과 원 c_1의 교점 X와 Y를 작도한다.
6. 각 ∠XBF의 이등분선 m과 각 ∠YBF의 이등분선 n을 작도한다.
7. 두 직선 m과 n이 직선 l_2와 만나는 교점 P_1, P_2을 작도한다.

[그림 IV-8] P28의 문제3 해결 방법

<발췌문 4> P28의 문제 해결 과정

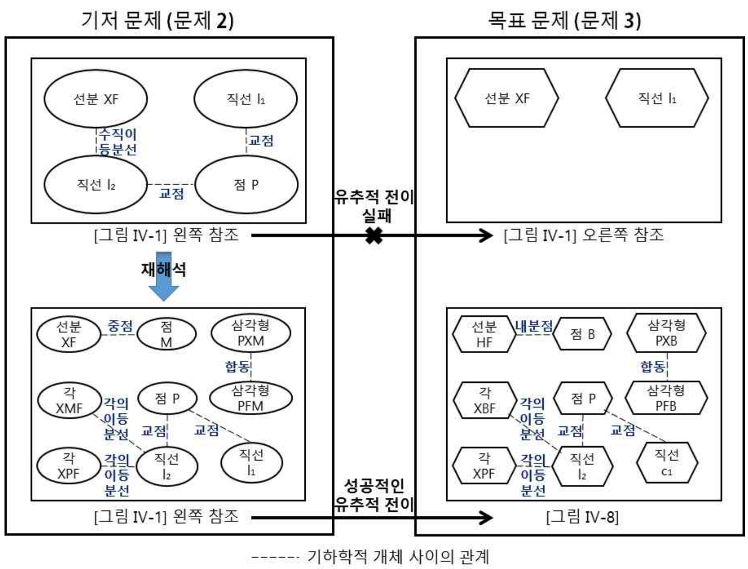
1 T 그래도 다른 방법을 찾아서 풀었네.
2 P28 네. 근데 진짜 별거 아니예요.
3 T 그래도 어떻게 했는지 설명해줄 수 있니? (노트북 화면의 GSP 화면을 보여주며) 이거 너가 한 거 맞지?
4 P28 네. 이거 첨에 포물선에서 수직이등분선 그리는 거랑 비슷하게 했어요. 포물선에서 제일 처음에 중점 찍잖아요. 그거랑 똑같이 1 대 2 되는 점 찍었어요.
5 T (점 B를 가르키며) 아.. 이거 말하는거야?
6 P28 네.
7 T 그 다음은?
8 P28 그 다음엔 포물선 할 때처럼 수선그리고요.
9 T (직선 l_2를 가르키며) 이거?
10 P28 그 다음에는 쫌 어려웠는데요. 우선 선 위에 P가 있다고 생각해야되요. 그 담에 포물선에서 생각하면 나중에 삼각형이 합동이 되니깐 여기서도 합동이 되게 만들려고 했어요.
11 T 합동? 포물선에서 직각삼각형 두 개 말하는거지? 여기서는 어떻게 그걸 만들었어?
12 P28 포물선에서 삼각형 생각하면 P랑 F랑 중점랑 연결한게 합동이잖아요.
13 T 그렇지.
14 P28 그니깐 여기서도 P랑 F랑 B랑 연결한 삼각형이 다른 거랑 합동이 될 거 같았어요. P랑 B랑 다른 점이랑..
15 T 그럼 다른 점은 어떻게 찾는데?
16 P28 잠깐만요. 합동이니깐 FB랑 길이가 같아야되고 수선 위에 있어야되니깐 (원 c_1을 가리키며) 여기 이렇게 원 그리고 수선하고 교점 찾으면 되요.
17 T 아.. 그래서 원이랑 직선이랑 교점 2개를 그 담에 찍었었구나. 그러면 여기 P_1하고 P_2는 어떻게 찾았어?
18 P28 먼저 P가 있다고하면 PFB랑 PXB랑 합동이니깐 (∠PBF와 ∠PBX를 가리키며) 이 각 두 개가 같아야되요. (∠XBF를 가리키며) 그니깐 P 찾으려면 이거 이등분하면 되요.
19 T 각의 이등분선 말하는거지?
20 P28 네. 그니깐 이 선(∠XBF의 이등분선)이랑 이 선(직선 l_2)이랑 만나는 점이게 P예요. (P_2를 가리키며) 이것도 똑같이 하면 되요.
21 T 아.. 그렇게 했었구나.
22 P28 네. 그 다음에 자취그리고 거리 재봤어요. 진짜 1:2되는지.
23 T 계산해보니깐 1:2 되지? 근데 진짜로 이렇게 작도하면 항상 1:2될까?

24 P28 내각 이등분선 공식 쓰면 되요. (각) HPB랑 (각) BPF랑 같으니깐 삼각형 PHF에서 PB가 내각 이등분선되가지고 (PH, PF, HB, BF를 순서대로 가리키며) 이거(PH) 대 이거(PF)는 이거(HB)대 이거(BF)니깐 2:1이예요. B가 2:1이니깐요.

25 T 그래 그렇게 하면 되네.

[발췌문 1]에서 볼 수 있듯이, 예비수학교사 P28은 포물선의 작도 방법으로부터 이심률의 정의에 따른 타원의 작도 방법으로 유추적 전이가 이루어지지 않았다. 하지만 [발췌문 4]에서 보듯이, P28은 포물선의 작도 방법을 재탐구하였으며 유사한 방법을 적용하여 이심률의 정의에 따른 타원을 작도하였다(4.4, 4.8, 4.10, 4.12, 4.14). P28은 포물선을 작도하는 과정에서 중점을 작도했던 점을 착안하여 1:2가 되는 내분점을 작도하였다(4.4). 이후 포물선과 마찬가지로 점 P는 점 H를 지나면서 준선 l에 수직인 직선 위에 있을 것이라 생각하여 같은 방법으로 점 H를 지나면서 준선 l에 수직인 직선 l_2를 작도하였다(4.8). 이후 P2는 [발췌문 1]에서 말한 것과 같이 새로운 방법을 생각하였으며 그 과정에서 작도하고자 하는 점 P를 작도했다고 가정하는 분석법을 사용하였다(4.10). 점 P를 가정한 이후, P28은 타원의 작도 과정에서도 포물선에서 합동인 두 직각삼각형의 관계와 유사한 두 삼각형의 합동 관계가 나타날 것이라 유추하였다(4.10). 이후 P28은 합동인 두 삼각형의 관계로부터 나머지 기하학적 개체들 사이의 관계를 알아냈으며 이를 바탕으로 작도 문제를 해결하였고(4.12, 4.14, 4.16, 4.18, 4.20) 이를 논리적으로 증명하였다(4.24). [그림 IV-9]는 예비수학교사 P28의 사고 과정을 도식화한 것이다.

이와 같이 학생들은 분석법을 이용하여 작도 문제를 해결할 수 있다(류희찬, 제수연, 2009). 또한 유추적 전이를 실패하였을 때, 바탕문제의 문제 해결 과정에서 나타난 도형들 사이의 관계를 재해석한 후 이를 목표문제에 적용함으로써 작도 문제를 해결하였다. 이러한 P28의 사고 과정은 Chen(2002)의 절차 유사성과 차이를 보인다. Chen(2002)의 연구에 따르면, 목표 문제의 성



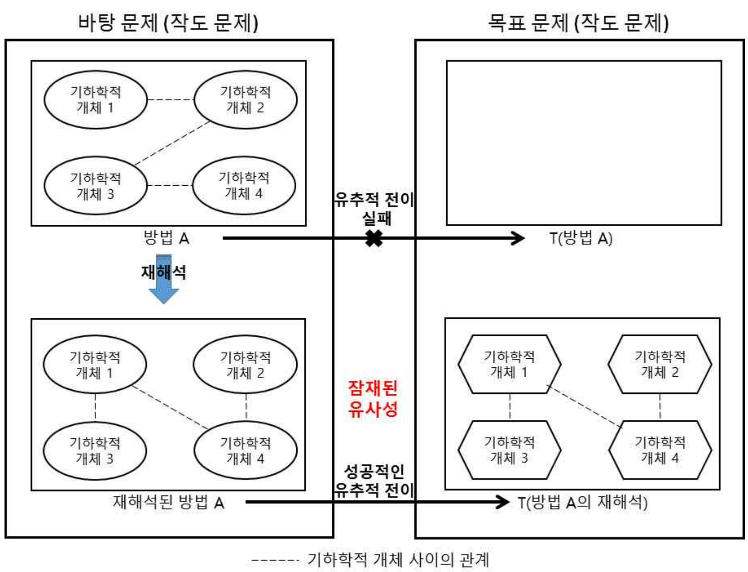
[그림 IV-9] P28의 사고 과정

공적인 해결을 위해서는 바탕 문제의 풀이 방법에서 사용된 다양한 원리, 다양한 전략, 다양한 절차 중에서 적절한 원리, 전략, 절차를 선택해야 한다. 즉, 목표 문제의 해결 여부는 적절한 풀이 방법의 선택 여부가 결정적인 역할을 한다 (pp. 94-95). 이와 다르게 P28은 유추적 전이에 실패한 작도 방법을 재해석함으로써 풀이 방법에 잠재되어 있던 새로운 관계를 발견하고 이를 목표 문제에 적용함으로써 해결하였다. 이와 같이 유추적 사고를 통해 작도 문제를 해결하는 과정에서 나타날 수 있는 새로운 유사성으로 '잠재적 유사성(potential similarity)'을 제시하고자 한다.

'잠재적 유사성'은 바탕 문제의 성공적인 해결 방법인 A를 목표 문제에 활용하여 해결하고자 하였지만 실패한 경우, 방법 A과 관련된 기하학적 개체(점, 선, 원 등) 사이의 관계를 재해석하여 이를 목표 문제의 해결에 활용하였을 때, 재해석된 A의 기하학적 관계와 대응되는 목표 문제의 기하학적 개체 사이의 유사성을 뜻한다. 잠재적 유사성은 [그림 IV-10]과 같이 도식화하여 나타낼 수 있다. 잠재적 유사성을 기반으로 한 유추적 사고는 학생들의 작도 문제 해결에 도움을 줄 수 있으며 그 해결 방법은 기존에 알려진 해결 방법과 다른 새롭고 창의적인 방법일 수 있다. 이는 학생이 목표 문제에 대한 지식을 지니고 있어 유추적 전이가 쉽게 일어난다면 오히려 새롭고 창의적인 풀이 방법을 발견하는 것을 방해할 수 있음을 의미한다. 따라서 학생이 바탕 문제에서 목표 문제로의 유추적 전이가 성공적으로 이루어졌다고 할 지라도 새롭고 창의적인 수학적 발견을 위하여 바탕 문제의 해결 방법에 잠재되어 있는 또 다른 해결 방안을 찾게 하는 등 반성적 사고를 가질 기회를 부여하는 것이 중요하다.

V. 요약 및 결론

유추는 학생들의 수학적 지식과 개념의 이해,



[그림 IV-10] 잠재된 유사성의 모형

수학적 지식의 발견, 문제 해결력 신장, 창의성 신장 등 수학적 능력의 신장에 도움을 준다(공선혜, 한인기, 2008; 우정호, 2002; 이경화, 2009a, 2009b; 이승우, 우정호, 2002; 이종희, 2003; 이종희, 김선희, 2002; 최남광, 류희찬, 2014; Alexander et al., 1997; English, 1997, 2004; Gentner et al., 2001; Goswami, 2004; Holyoak & Thagard, 1995; Klauer & Phye, 2008; Lee & Sriraman, 2011; Novick, 1988; Polya, 1954; Treffinger, Isaksen, Dorval, 2000; Weisberg, 2006). 이처럼 유추가 학생들의 수학 학습에서 중요한 사고 과정임에도 불구하고 학교 수학에서 충분히 다루어지지 않는 실정이다(English, 1997, 2004). 이에 본 연구에서는 예비수학교사들이 이심률의 정의에 따른 이차곡선의 그래프를 작도하는 과정에서 나타나는 사고의 특징을 유추의 관점에서 분석하였다. 분석 결과는 다음과 같다.

첫째, 바탕 문제와 관련된 지식(또는 대상, 방법)이 유추적 전이를 통한 문제 해결에서 결정적인 역할을 한다. 본 연구에 참여한 2명의 예비수학교사들은 바탕 문제에 대한 수학적 지식의 부재로 인해 주어진 목표 문제의 해결에 실패하였다. 이는 교사가 유추적 사고를 활용한 수업을 설계함에 있어 학생들의 수학적 지식을 점검할 필요가 있음을 시사한다.

둘째, 바탕 문제의 지식(또는 대상, 방법)에 대응되는 목표 문제의 지식(또는 대상, 방법)은 유추적 전이를 통한 문제 해결에 있어 결정적인 역할을 한다. 본 연구에서 참여한 다수의 예비수학교사들은 성공적으로 포물선을 작도하였지만, 포물선의 작도 과정에서 나타나는 수직이등분선에 대응하는 수학적 대상을 알지 못하여 목표 문제인 이심률로 정의된 타원을 작도하는데 실패하였다. 이는 교사가 유추적 사고를 활용한 수업을 설계함에 있어 바탕 문제와 관련된 학생들의 수학적 지식 뿐만 아니라 그와 대응하는 목표 문제와 관련된 수학적 지식도 점검할 필요가 있음을 시사한다.

셋째, 다양한 바탕 문제의 해결 방법은 목표 문제의 해결에 도움을 줄 수 있다. 본 연구에서는 1명의 예비수학교사는 초기에 바탕 문제의 해결 방법을 목표 문제로 전이시키는 데 실패하였으나, 바탕 문제를 해결하는 다른 방법을 사용하여 이를 통해 목표 문제를 해결할 수 있었다. 이는 학생들의 다양한 문제 해결 방법은 그와 유사한 목적 문제로의 성공적인 유추적 전이에 도움을 줄 수 있음을 시사한다.

넷째, 대수적인 방법을 활용한 유추적 사고는 작도 문제의 해결에 도움을 줄 수 있다. 본 연구에 참여한 11명의 예비수학교사들은 주어진 작도 문제를 직교좌표계에 나타내었다. 이후, 예비수학교사들은 대수적 방법을 사용하여 이미 작도 방법을 알고 있는 바탕 문제와 연결시킴으로써 주어진 작도 문제를 해결하였다.

다섯째, 분석법과 잠재적 유사성에 근거한 유추적 사고는 학생들의 작도 문제 해결과 더불어 새로운 풀이 방법을 발견하는데 도움을 준다. 본 연구에 참여한 1명의 예비수학교사는 초기에 바탕 문제의 해결 방법을 목표 문제로 전이시키는데 실패하였다. 하지만 예비수학교사는 바탕 문제의 작도 방법에서 사용된 기하학적 개체 사이의 관계를 재해석한 후 이를 이용하여 목표 문제를 해결하였다.

본 연구는 예비수학교사들이 이심률의 정의에 따른 이차곡선의 그래프를 작도하는 과정에서의 나타난 사고 과정을 유추의 관점에서 분석한 것이다. 앞서 언급한 것과 같이 유추는 학교 수학에서 중요한 사고 과정임에도 불구하고 아직까지 연구가 부족한 실정이다. 따라서 유추적 사고와 관련된 수학적 소재를 개발하고 적용하는 연구와 학생들의 유추적 사고를 신장시킬 수 있는 방법에 대한 연구가 이루어질 필요가 있다. 또한

본 연구에서 제시한 '잠재적 유사성'은 유추적 사고를 통한 작도 문제의 해결 과정에서 나타난 새로운 유형의 유사성으로서 새로운 문제 해결 방법을 찾는데 도움을 주었다. 따라서 학생들이 다양한 영역에서 '잠재적 유사성'을 통한 유추적 사고가 이루어 질 수 있도록 수학적 소재를 개발하고 이를 적용하는 연구가 이루어질 필요가 있다.

참고문헌

공선혜, 한인기(2008). 대수적 방법을 이용한 방접원에 관련된 삼각형의 작도 문제 해결 연구. **한국학교수학회논문집, 11**(3), 399-420.

교육부(2015). **2015개정교육과정 총론**.

류희찬, 제수연(2009). 역동적 기하 환경에서 파푸스의 분석법을 이용한 이차곡선의 작도활동에서 나타난 학생들의 수학적 발견과 정당화. **교원교육, 25**(4), 168-189.

양기열, 이의진(2011). 수학영재학생들의 유추를 통한 이차곡면의 탐구활동 분석. **영재교육연구, 21**(2), 269-286.

양성현, 강옥기(2011). GeoGebra를 활용한 역동적인 시각적 표상에 기반한 이차곡선 지도 방안. **학교수학, 13**(3), 447-468.

우정호(2002). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울대학교 출판부.

이경화(2009a). 영재아들의 세 유형의 유추 문제 해결. **수학교육학연구, 19**(1), 45-61.

이경화(2009b). 수학적 지식의 구성에서 유추적 사고의 역할. **수학교육학연구, 19**(3), 335-369.

이승우, 우정호(2002). 학교수학에서의 유추와 은유. **수학교육학연구, 12**(4), 523-542.

이승훈, 조완영(2013). 수학교사의 이차곡선에 관한 내용지식의 분석. **학교수학, 15**(4), 995-1013.

이종희(2003). 수학문장제 해결과 유추. **교과교육학연구, 7**(2), 63-79.

이종희, 김선희(2002). 인수분해 문제해결과 유추. **학교수학, 4**(4), 581-599.

장미라, 강순자(2010). 역사적 고찰을 통한 이차곡선의 지도방안. **수학교육 논문집, 24**(3), 731-744.

최남광, 류희찬(2014). 유추 사고과정 모델의 개발. **수학교육학연구, 24**(2), 103-124.

최변각, 이해신, 추병수, 문병권, 소영무, 이지은, 이정은, 조명아(2011). **지구과학Ⅰ**. 서울: 천재교육.

한인기(2001). 유추를 활용한 무게중심 탐구에 관한 연구. **중등교육연구, 13**, 205-215.

한인기, 김문섭(2007). 바탕문제를 활용한 정사면체와 정육면체의 절단면 작도에 대한 연구. **수학교육, 46**(3), 303-314.

한인기 & 에르든에프, P. M.(2005). **유추를 통한 수학탐구**. 서울: 승산.

허남구(2014). 기하학적 방법을 통한 이차곡선 접선의 작도에 관한 연구. **과학영재교육, 6**(3), 125-133.

Aleksandrov, I. I. (2004). *Sbornik Geometricheskin Zadach na postronenie*. Moskva: URSS.

Alexander, P. A., White, C. S. & Daugherty, M. (1997). Analogical Reasoning and early mathematics learning. In English, L. D. (Ed), *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images*. (pp. 117-147). Lawrence Erlbaum. Associates Publishers.

Chen, Z. (2002). Analogical Problem Solving: A Hierarchical Analysis of Procedural Similarity. *Journal of Experimental Psychology, 28*(1), 81-98.

English, L. D. (1997). Analogies, Metaphors, and

Image: Vehicles for Mathematical Reasoning. In English, L. D.(Ed), *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images*. (pp. 3-18). Lawrence Erlbaum. Associates Publishers.

English, L. D. (2004). Mathematical and Analogical Reasoning in Early Childhood. In English, L. D.(Ed), *Mathematical and analogical reasoning of young learners*. (pp. 1-22). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gentner, D. (1989). The mechanism of analogical learning. In Vasniadou, S. & Ortony, A.(Eds.), *Similarity and analogical reasoning*. (pp. 199-241). New York : Cambridge University Press.

Gentner, D., Holyoak, K. J. & Kokinov, B. N. (2001). *The analogical mind: perspective from cognitive science*. MA: MIT Press.

Gentner, D. & Markman, A. B. (1997). Structure Mapping in Analogy and Similarity. *American Psychologist, 52*(1), 45-56.

Goswami, U. (2004). Commentary: Analogical Reasoning and Mathematical Development. In English, L. D.(Ed), *Mathematical and analogical reasoning of young learners*. (pp. 169-186). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Holyoak, K. J. & Thagard, P. (1995). *Mental leaps: analogy in creative thought*. MA: MIT Press.

Klauer, K.J. & Phye, G.D. (2008). Inductive Reasoning. A Training Approach. *Review of Educational Research, 78*, 85-123.

Lee, K. & Sriraman, B. (2011). Conjecturing via reconceived classical analogy. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 123-140.

Novick, L. R. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology; Learning, Memory, and Cognition, 17*, 398-415.

Perepelkin, D. I. (1947). *Geometricheskie postroeniya v srednei shkole*. Moskva: IAPN.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning I: induction and analogy in mathematics*. NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (2008). **어떻게 문제를 풀 것인가**. (우정호 역), 서울: 교우사. (영어 원작은 1957년 출판).

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. FL: Academic Press. INC.

Treffinger, D. J., Isaksen, S. G. & Stead-dorval, K. B. (2000). *Creative problem solving : an introduction*. TX: Prufrock Press.

Weisberg, R. W. (2006). *Creativity: understanding innovation in problem solving, science, invention, and the arts*. NJ: John Wiley & Sons. (김미선 역). 서울: 시그마프레스.

Analogical Reasoning in Construction of Quadratic Curves

Heo, Nam Gu (Daejeon Songchon High School)

Analogical reasoning is a mathematically useful way of thinking. By analogy reasoning, students can improve problem solving, inductive reasoning, heuristic methods and creativity. The purpose of this study is to analyze the analogical reasoning of preservice mathematics teachers while constructing quadratic curves defined by eccentricity. To do this, we produced tasks and 28 preservice mathematics teachers solved. The result findings are as follows.

First, students could not solve a target problem because of the absence of the mathematical knowledge of the base problem.

Second, although student could solve a base problem, students could not solve a target problem because of the absence of the mathematical knowledge of the target problem which corresponded the mathematical knowledge of the base problem.

Third, the various solutions of the base problem helped the students solve the target problem.

Fourth, students used an algebraic method to construct a quadratic curve.

Fifth, the analysis method and potential similarity helped the students solve the target problem.

* Key Words : analogical reasoning(유추), quadratic curves(이차곡선), construction(작도), potential similarity(잠재적 유사성)

논문접수 : 2017. 1. 5
논문수정 : 2017. 2. 4
심사완료 : 2017. 2. 6