

## 3×3 분할요인모형의 검정력 비교연구<sup>†</sup>

최영훈<sup>1</sup>

<sup>1</sup>한신대학교 응용통계학과

접수 2016년 12월 27일, 수정 2017년 1월 13일, 게재확정 2017년 1월 17일

### 요약

블록내의 완전랜덤화 제약은 하나의 블록이 여러 실험구로 분할되는 분할요인모형으로 해결할 수 있다. 본 연구는 3×3 분할요인모형에서 두 주요인 및 하나의 블록이 모두 고정일 경우에는, 실제로 존재하는 효과크기가 작을수록 혹은 검정대상의 요인효과 크기보다 검정대상 이외의 효과들의 크기가 상대적으로 작을수록 주구요인효과 및 세구요인효과 검정을 위한 순위변환 통계량의 검정력은 기존의 모수적 통계량의 검정력보다 뛰어난 것을 알 수 있다. 또한 모집단 모형의 오차항이 지수분포 및 이중지수분포일 때 효과크기 및 효과구성유형에 상관없이 거의 모든 상황에서 순위변환 통계량의 검정력이 모수적 통계량의 검정력보다 상대적으로 높은 우위를 보이며, 정규분포 및 균일분포하에서는 상당히 유사한 수준을 나타낸다. 한편 두 주요인은 고정이나 하나의 블록이 랜덤일 경우에는, 두 주요인 및 블록이 모두 고정일 경우보다 모수적 통계량 및 순위변환 통계량의 검정력은 각각 낮은 수준을 보인다. 특히 주구요인효과 검정보다 세구요인효과 검정을 위한 모수적 통계량 및 순위변환 통계량의 검정력이 다소 낮은 수준임을 보이지만, 순위변환 통계량의 검정력은 모수적 통계량의 검정력에 비하여 높은 상대적 검정력 우위를 나타낸다.

주요용어: 검정력, 세구요인효과, 순위변환 통계량, 주구요인효과, 3×3 분할요인모형.

### 1. 서론

순위변환 기법은 원자료를 증가차순의 순위로 대체한 후에 모수적 검정을 적용하는 기법으로 정의된 이래 다양한 실험계획모형 등의 확대적용을 통하여 발전되어 왔다 (Conover와 Iman, 1981). 특히 요인모형에 대한 순위변환의 이론적 기법연구로부터 출발하였으며 (Fabian, 1991; Gorman과 Akritas, 2001; Akritas와 Papadatos, 2004), 순위변환 기법의 복잡성으로 인하여 시뮬레이션을 이용한 모수적 통계량과 순위변환 통계량의 검정력 비교연구로 발전하였다 (Pavur와 Nath, 1986; Blair 등, 1989; Choi, 1998). 최근에는 블록이 존재하는 완전확률화 블록모형 및 두 블록이 동시에 존재하고 관심 처리 수준이 두 블록인 행과 열의 수준과 동일하며 행과 열에 한 번씩만 존재하는 라틴방격모형의 검정력 분석에 집중하였으며, 처리효과와 블록효과만이 동시에 존재하는 라틴방격모형에서 순위변환 기법은 적용 상에 뛰어난 효율성 및 모수적 통계량과 비교하여 검정력 우위를 나타냄이 밝혀졌다 (Jo와 Kim, 2013; Woo와 Park, 2014; Choi, 2014, 2015).

일반적으로 요인모형에서 실험순서의 완전랜덤화가 불가능할 경우에 완전랜덤화 블록모형이나 라틴방격모형 등의 블록모형을 고려할 수 있다. 그러나 아직도 블록을 포함한 다요인모형에서 블록내의 실험순서를 완전히 랜덤화할 수 없는 실제상황에 자주 직면한다. 자료를 수집함에 있어서 블록내의 완전

<sup>†</sup> 본 연구는 한신대학교 학술연구비 지원에 의한 것임.

<sup>1</sup> (447-791) 경기도 오산시 양산동 411, 한신대학교 응용통계학과, 교수. E-mail: choicyh@hs.ac.kr

랜덤화가 가능한 요인모형과 달리 비경제적 및 비현실적인 여건 등으로 인하여 블록내의 완전랜덤화가 불가능한 경우가 발생한다. 이와 같이 블록내의 완전랜덤화의 제약은 하나의 블록이 여러 실험구로 분할되는 분할요인모형으로 해결할 수 있다. 완전랜덤화의 불가능은 요인수준을 변화시키기 어려운 상황에서 발생하는 경우가 많으므로, 분할요인모형을 통하여 변화하기 어려운 요인은 주구에 배치하고 변화하기 쉬운 요인은 세구에 할당할 수 있다. 실험전체를 완전랜덤화하는 것이 곤란한 경우에 여러 단계로 나누어 랜덤화하는 기법으로 요약되는 분할요인모형에서 주구요인은 주구와 교락하고 세구요인은 교락하지 않으며, 대체로 세구가 주구보다는 동질성의 여건을 가지므로 세구오차가 주구오차보다 작은 경향을 보인다. 따라서 중요도가 낮은 요인을 주구에 할당하고 관심도가 높은 요인을 세구에 배치하는 것이 가장 바람직하며, 세구요인과 블록과의 상호작용을 오차항에 교락시킬 필요가 있다. 분할요인모형의 실험은 다요인모형의 실험보다 소요되는 시간과 비용을 줄일 수 있으나, 분할요인모형은 실험오차가 분할될 수 있으므로 추정 및 검정 등에 있어서 다요인모형보다 복잡하며 주의가 필요하다. 또한 분할요인모형은 한 요인이 다른 요인보다 큰 실험단위를 필요로 하는 산업실험에 상당히 유용한 모형이며, 요인조합의 일부만이 블록으로 이용되는 불완전블록모형의 유형으로 간주될 수 있다 (Hicks, 1982; Montgomery, 1991).

본 연구는 순위변환 기법을 이용한 검정력의 타당성 및 응용의 폭을 확대하기 위해 블록내에서 한 번의 분할이 발생하며 두 요인의 수준수 및 블록의 수준수가 동일한 3x3 분할요인모형을 고려하되, 두 요인은 고정이고 반복으로 간주할 수 있는 블록은 고정인 경우와 랜덤인 경우로 나누어서 검토하고자 한다. 구체적으로 3x3 분할요인모형의 검정력 비교분석을 위하여 주구요인효과 및 세구요인효과에 따른 ANOVA F 통계량 및 순위변환된 ANOVA FR 통계량간의 검정력에 미치는 영향력 분석을 살펴보고자 한다.

## 2. 연구모형 및 검정방법

연구대상인 3x3 분할요인모형은

$$Y_{ijk} = \mu + \gamma_i + \alpha_j + \gamma\alpha_{ij} + \beta_k + \alpha\beta_{jk} + \epsilon_{ijk}, \text{ where } i, j, k = 1, 2, 3$$

으로 표현할 수 있다. 이때  $\mu$ 는 총평균을 나타내며,  $\gamma_i$ 는 블록요인의  $i$ 번째 블록효과를,  $\alpha_j$ 는 주구요인의  $j$ 번째 주구요인효과를,  $\gamma\alpha_{ij}$ 는 블록요인과 주구요인의 상호작용효과를,  $\beta_k$ 는 세구요인의  $k$ 번째 세구요인효과를,  $\alpha\beta_{jk}$ 는 주구요인과 세구요인의 상호작용효과를 나타낸다. 블록요인과 세구요인간의 상호작용은 존재하지 않거나 오차항과 결합된다고 가정하며, 블록효과는 주구요인효과와 교락하고 세구요인에 대하여 반복측정 구조를 갖는다고 간주할 수 있다. 완전한 반복이 존재하지 않는 오차항  $\epsilon_{ijk}$ 는 표준정규모집단  $N(0, 1)$ , 지수모집단  $Exp(1)$ , 이중지수모집단  $D(0, 1)$  및 균일모집단  $U(0, 1)$ 으로부터 발생함을 가정한다.

일차적으로 두 주요인 및 블록이 모두 고정인 경우의 주구요인효과 및 세구요인효과 검정을 위한 귀무가설  $H_0 : \alpha_j = 0$  및  $H_0 : \beta_k = 0$ , 단  $j, k = 1, 2, 3$ 에 대하여 F와 FR 은 각각 모수적 ANOVA 검정통계량과 순위에 바탕을 둔 F 검정통계량으로 Table 2.1과 같이 정의한다 (Neter 등, 1990).

**Table 2.1** Hypothesis, statistic, rejection region (r.r.) for testing main effect with fixed block effect

Statistic	$H_0 : \alpha_j = 0$	$H_0 : \beta_k = 0$
F	$\frac{54 \cdot \sum_{j=1}^3 (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{...})^2}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{.jk} + \bar{y}_{.j.})^2}$	$\frac{54 \cdot \sum_{k=1}^3 (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})^2}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{.jk} + \bar{y}_{.j.})^2}$
FR	$\frac{54 \cdot \sum_{j=1}^3 (\bar{R}_{.j} - \bar{R}_{...})^2}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (R_{ijk} - \bar{R}_{ij.} - \bar{R}_{.jk} + \bar{R}_{.j.})^2}$	$\frac{54 \cdot \sum_{k=1}^3 (\bar{R}_{..k} - \bar{R}_{...})^2}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (R_{ijk} - \bar{R}_{ij.} - \bar{R}_{.jk} + \bar{R}_{.j.})^2}$
r.r.	$F, FR > F_{2,12,0.95}$	$F, FR > F_{2,12,0.95}$

이때  $\bar{y}_{.j} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 y_{ijk}/9$ ,  $\bar{y}_{..k} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 y_{ijk}/9$ ,  $\bar{y}_{ij.} = \sum_{k=1}^3 y_{ijk}/3$ ,  $\bar{y}_{.jk} = \sum_{i=1}^3 y_{ijk}/3$ ,  $\bar{y}_{...} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 y_{ijk}/27$ 을 의미하며, 순위자료  $R_{ijk} = R(y_{ijk})$ ,  $\bar{R}_{.j.} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ijk}/9$ ,  $\bar{R}_{..k} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 R_{ijk}/9$ ,  $\bar{R}_{ij.} = \sum_{k=1}^3 R_{ijk}/3$ ,  $\bar{R}_{.jk} = \sum_{i=1}^3 R_{ijk}/3$ ,  $\bar{R}_{...} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ijk}/27$ 을 나타낸다. 고정효과와 변량을 발생시키기 위하여 오차항의 모집단분포에 효과크기  $c = 0.25(1.5)0.25$ 을 고려하며, 블럭효과  $\gamma_1 = -\gamma_3 = \gamma$ ,  $\gamma_2 = 0$ , 주구요인효과  $\alpha_1 = -\alpha_3 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = 0$  및 세구요인효과  $\beta_1 = -\beta_3 = \beta$ ,  $\beta_2 = 0$ 의 효과크기를 이용한다. 한편 상호작용효과와 구성은  $\gamma\alpha_{11} = \gamma\alpha_{33} = -\gamma\alpha_{13} = -\gamma\alpha_{31} = \gamma\alpha$ ,  $\gamma\alpha_{12} = \gamma\alpha_{21} = \gamma\alpha_{22} = \gamma\alpha_{23} = \gamma\alpha_{32} = 0$  및  $\alpha\beta_{11} = \alpha\beta_{33} = -\alpha\beta_{13} = -\alpha\beta_{31} = \alpha\beta$ ,  $\alpha\beta_{12} = \alpha\beta_{21} = \alpha\beta_{22} = \alpha\beta_{23} = \alpha\beta_{32} = 0$ 의 효과크기를 나타내는 관계식으로부터 유도하였다.

이울러 두 주요인은 고정이나 블럭이 랜덤인 경우의 주구요인효과  $\alpha_j$  및 세구요인효과  $\beta_k$ 를 검정하기 위한 통계량 F와 FR은 Table 2.2와 같이 정의한다.

**Table 2.2** Hypothesis, statistic, rejection region(r.r.) for testing main effects with random block effect

Statistic	$H_0 : \alpha_j = 0$	$H_0 : \beta_k = 0$
F	$\frac{6 \cdot \sum_{j=1}^3 (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{...})^2}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2}$	$\frac{54 \cdot \sum_{k=1}^3 (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})^2}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{.jk} + \bar{y}_{...})^2}$
FR	$\frac{6 \cdot \sum_{j=1}^3 (\bar{R}_{.j.} - \bar{R}_{...})^2}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\bar{R}_{ij.} - \bar{R}_{i..} - \bar{R}_{.j.} + \bar{R}_{...})^2}$	$\frac{54 \cdot \sum_{k=1}^3 (\bar{R}_{..k} - \bar{R}_{...})^2}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (R_{ijk} - \bar{R}_{ij.} - \bar{R}_{.jk} + \bar{R}_{...})^2}$
r.r.	$F, FR > F_{2,4,0.95}$	$F, FR > F_{2,12,0.95}$

단  $\bar{y}_{i..} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 y_{ijk}/9$ 를, 순위자료  $\bar{R}_{i..} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ijk}/9$ 를 나타낸다. 또한 블럭효과  $\gamma_i$ 는 정규모집단  $N(0, 1/2)$ , 지수모집단  $Exp(1/2)$ , 이중지수모집단  $D(0, 1/2)$  및 균일모집단  $U(0, 1/2)$ 으로부터 발생을 유도하며, 상호작용효과  $\gamma\alpha_{ij}$ 는 정규모집단  $N(0, 2)$ , 지수모집단  $Exp(2)$ , 이중지수모집단  $D(0, 2)$  및 균일모집단  $U(0, 2)$ 으로부터 발생을 유도한다. 마지막으로 각각 Table 2.1 및 Table 2.2의 주구요인효과 및 세구요인효과 검정을 위한 모수적 F 통계량 및 순위변환된 FR 통계량을 이용하여 Visual C++ 프로그램의 10000번 반복과정으로부터 유의수준 5%하에서의 기각율을 비교 계산한다.

### 3. 검정력 비교분석

본 절에서는 두 주요인 및 블럭이 모두 고정인 경우 및 두 주요인은 고정이나 블럭이 랜덤인 경우의 두 가지 상황에서 주구요인효과  $\alpha_j$  및 세구요인효과  $\beta_k$ 를 검정하기 위한 통계량 F와 FR의 검정력을 비교분석하고자 한다.

(3.1): 두 주요인 및 블럭이 모두 고정인 Table 2.1의 경우.

(3.2): 두 주요인은 고정이나 블럭이 랜덤인 Table 2.2의 경우.

#### 3.1. 두 주요인 및 블럭이 고정인 경우의 주구요인효과 $\alpha_j$ 및 세구요인효과 $\beta_k$ 의 검정력

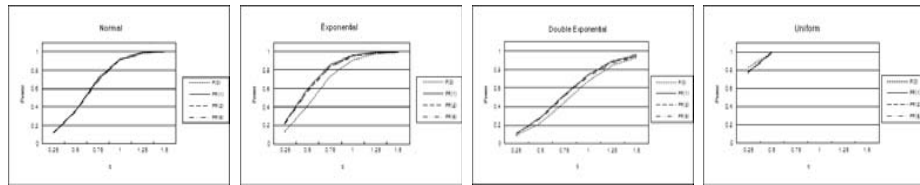
첫 번째는 두 주요인 및 블럭이 모두 고정인 경우로, Table 2.1의 검정통계량을 바탕으로 주구요인효과  $\alpha_j$ 와 세구요인효과  $\beta_k$ 의 검정력을 분석하고자 한다. 우선 주구요인효과  $\alpha_j$ 의 검정력을 분석하기 위하여 Table 3.1에서 제시한 바와 같이 두 주효과 및 블럭효과와 다양한 효과구성유형의 상황을 고려하였다.

**Table 3.1** Effect size for power of  $\alpha_j$  when blocks are fixed

case	$\gamma$	$\alpha$	$\gamma\alpha$	$\beta$	$\alpha\beta$	case	$\gamma$	$\alpha$	$\gamma\alpha$	$\beta$	$\alpha\beta$
F(0)			All cases			FR(6)	0.5c	c	0	0.5c	0
FR(1)	0	c	0	0	0	FR(7)	0.5c	c	0	c	0
FR(2)	0	c	0	0.5c	0	FR(8)	0	c	0.5c	0	0.5c
FR(3)	0	c	0	c	0	FR(9)	0	c	0.5c	0	c
FR(4)	0	c	0	0.5c	0.5c	FR(10)	0.5c	c	0	0.5c	0.5c
FR(5)	0	c	0	c	0.5c	FR(11)	0.5c	c	0	c	0.5c
						FR(12)	0.5c	c	0.5c	0.5c	0.5c

**Table 3.2** Power of main effect  $\alpha_j$  when blocks are fixed

Dist.	c	F(0)	FR(1)	FR(2)	FR(3)	FR(4)	FR(5)	FR(6)	FR(7)	FR(8)	FR(9)	FR(10)	FR(11)	FR(12)
N(0, 1)	0.25	0.119	0.117	0.115	0.116	0.115	0.115	0.115	0.116	0.116	0.118	0.116	0.116	0.116
	0.50	0.361	0.359	0.357	0.352	0.350	0.346	0.353	0.349	0.350	0.339	0.347	0.343	0.344
	0.75	0.712	0.698	0.695	0.677	0.677	0.660	0.685	0.675	0.682	0.652	0.674	0.658	0.659
	1.00	0.927	0.918	0.915	0.907	0.901	0.883	0.919	0.906	0.903	0.878	0.901	0.884	0.881
	1.25	0.991	0.989	0.988	0.984	0.982	0.974	0.986	0.984	0.982	0.970	0.980	0.974	0.971
	1.50	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.995	0.999	0.998	0.998	0.995	0.998	0.995	0.995
Exp(1)	0.25	0.128	0.228	0.222	0.207	0.214	0.198	0.215	0.201	0.222	0.203	0.210	0.195	0.203
	0.50	0.419	0.603	0.585	0.544	0.560	0.519	0.568	0.532	0.573	0.527	0.551	0.509	0.531
	0.75	0.735	0.861	0.847	0.812	0.828	0.786	0.835	0.805	0.833	0.787	0.817	0.783	0.790
	1.00	0.913	0.959	0.955	0.937	0.948	0.919	0.949	0.934	0.948	0.922	0.942	0.917	0.924
	1.25	0.975	0.992	0.990	0.983	0.986	0.975	0.988	0.981	0.987	0.975	0.985	0.974	0.977
	1.50	0.995	0.998	0.998	0.996	0.996	0.992	0.998	0.995	0.997	0.991	0.996	0.992	0.993
D(0, 1)	0.25	0.086	0.109	0.105	0.107	0.108	0.108	0.109	0.108	0.109	0.107	0.108	0.109	0.106
	0.50	0.222	0.280	0.277	0.268	0.275	0.264	0.270	0.265	0.271	0.264	0.270	0.260	0.262
	0.75	0.447	0.526	0.518	0.499	0.507	0.479	0.512	0.491	0.510	0.479	0.500	0.477	0.488
	1.00	0.680	0.748	0.742	0.715	0.725	0.693	0.727	0.704	0.727	0.689	0.711	0.686	0.697
	1.25	0.846	0.893	0.885	0.862	0.868	0.839	0.874	0.859	0.871	0.839	0.860	0.835	0.845
	1.50	0.940	0.962	0.957	0.945	0.947	0.928	0.948	0.939	0.948	0.923	0.944	0.926	0.929
U(0, 1)	0.25	0.836	0.781	0.779	0.772	0.768	0.750	0.776	0.773	0.767	0.739	0.768	0.754	0.751
	0.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	0.75	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	1.25	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	1.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000



**Figure 3.1** Power of main effect  $\alpha_j$  where F(0): all cases, FR(1):  $\alpha = c, \gamma = \gamma\alpha = \beta = \alpha\beta = 0$ , FR(2):  $\alpha = c, \beta = 0.5c, \gamma = \gamma\alpha = \alpha\beta = 0$ , FR(6):  $\alpha = c, \gamma = \beta = 0.5c, \gamma\alpha = \alpha\beta = c$

Table 3.2는 두 주요인 및 블록이 모두 고정인 경우로 Table 3.1에서 제시한 다양한 효과구성유형과 효과크기의 변화 및 오차항의 모집단분포하에서 Table 2.1의 주요인효과  $\alpha_j$ 의 검정력 위한 모수적 F 통계량 및 순위변환된 FR 통계량의 검정력 결과를 나타낸다. Figure 3.1은 모든 효과구성유형의 모수적 통계량 F(0) 및 순위변환된 통계량 FR(1):  $\alpha = c, \gamma = \gamma\alpha = \beta = \alpha\beta = 0$  (주요인효과만이 존재하는 경우), FR(2):  $\alpha = c, \beta = 0.5c, \gamma = \gamma\alpha = \alpha\beta = 0$  (주요인효과 및 세구인효과가 존재하는 경우), FR(6):  $\alpha = c, \gamma = \beta = 0.5c, \gamma\alpha = \alpha\beta = c$  (모든 효과들이 동시에 존재하는 경우)로서 오차항이 정규분포, 지수분포, 이중지수분포 및 균일분포인 모집단으로부터 유의수준 0.05하에서 주요인효과  $\alpha_j$ 의 검정력 결과를 요약한다.

Table 3.2 및 Figure 3.1의 결과를 살펴보면 모수적 F 통계량의 검정력은 Table 3.1의 효과구성유형에는 상관없이 효과크기 및 오차항의 모집단분포에 영향을 받아 변화하며, 순위변환된 FR 통계량의 검정력은 효과구성유형, 효과크기 및 오차항의 모집단분포에 영향을 받음을 알 수 있다. 전반적으로 F 및 FR 통계량의 검정력은 효과크기가 커질수록 빠르게 증가하고, 오차항의 모집단분포간에 약간의 증가속도 차이가 존재한다. 즉 정규분포와 지수분포는 유사한 증가유형을 보이며, 이중지수분포는 약간 더디게 증가하고, 균일분포에서는 가파르게 증가함을 보인다. 또한 순위변환된 FR 통계량의 검정력은 실질적으로 존재하는 효과개수 및 효과구성유형에 따라 변화하나 차이는 크지 않으며, FR 통계량의 검정력은 존재하는 효과의 수가 적고 검정코자 하는 주요인효과 크기보다 상대적으로 나머지 효과들의 크기가 작을수록 F 통계량의 검정력보다 뛰어남을 알 수 있다. 아울러 모집단이 비대칭분포인 지수분포 및

양쪽끝이 길게 늘어진 이중지수분포를 따를때 모든 상황하에서 FR 통계량의 검정력이 F 통계량의 검정력보다 절대적으로 우위를 보이며, 분포형태가 정규분포 및 양쪽끝이 두터운 균일분포하에서는 F와 FR의 검정력은 거의 모든 여건하에서 비슷한 수준을 유지한다.

한편 세구요인효과  $\beta_k$ 의 검정력을 분석하기 위하여 Table 3.3에 제시한 바와 같이 두 주효과 및 블럭 효과의 다양한 효과구성유형의 경우를 고려하였다.

**Table 3.3** Effect size for power of  $\beta_k$  when blocks are fixed

case	$\gamma$	$\alpha$	$\gamma\alpha$	$\beta$	$\alpha\beta$	case	$\gamma$	$\alpha$	$\gamma\alpha$	$\beta$	$\alpha\beta$
F(0)			All cases			FR(6)	0.5c	0.5c	0	c	0
FR(1)	0	0	0	c	0	FR(7)	0.5c	c	0	c	0
FR(2)	0	0.5c	0	c	0	FR(8)	0	0	0.5c	c	0.5c
FR(3)	0	c	0	c	0	FR(9)	0	0	0.5c	c	c
FR(4)	0	0.5c	0	c	0.5c	FR(10)	0.5c	0.5c	0	c	0.5c
FR(5)	0	c	0	c	0.5c	FR(11)	0.5c	c	0	c	0.5c
						FR(12)	0.5c	0.5c	0.5c	c	0.5c

**Table 3.4** Power of main effect  $\beta_k$  when blocks are fixed

Dist.	c	F(0)	FR(1)	FR(2)	FR(3)	FR(4)	FR(5)	FR(6)	FR(7)	FR(8)	FR(9)	FR(10)	FR(11)	FR(12)
N(0, 1)	0.25	0.122	0.124	0.121	0.119	0.122	0.119	0.123	0.121	0.125	0.123	0.120	0.118	0.122
	0.50	0.380	0.372	0.370	0.363	0.365	0.359	0.369	0.363	0.367	0.359	0.371	0.356	0.356
	0.75	0.709	0.698	0.693	0.684	0.679	0.660	0.693	0.681	0.686	0.662	0.680	0.662	0.668
	1.00	0.923	0.919	0.909	0.904	0.898	0.882	0.907	0.902	0.904	0.881	0.895	0.883	0.879
	1.25	0.992	0.988	0.986	0.982	0.980	0.970	0.985	0.981	0.984	0.975	0.980	0.969	0.970
	1.50	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.995	0.998	0.998	0.998	0.999	0.996	0.997	0.995
Exp(1)	0.25	0.132	0.223	0.218	0.203	0.210	0.198	0.212	0.201	0.213	0.205	0.207	0.196	0.204
	0.50	0.427	0.595	0.582	0.538	0.556	0.508	0.566	0.530	0.573	0.529	0.546	0.504	0.534
	0.75	0.739	0.858	0.845	0.808	0.828	0.788	0.833	0.799	0.841	0.798	0.819	0.778	0.803
	1.00	0.912	0.964	0.957	0.938	0.948	0.924	0.952	0.935	0.955	0.931	0.944	0.923	0.936
	1.25	0.975	0.990	0.990	0.982	0.986	0.978	0.987	0.981	0.989	0.980	0.984	0.978	0.981
	1.50	0.994	0.998	0.998	0.995	0.997	0.993	0.998	0.995	0.997	0.994	0.996	0.993	0.995
D(0, 1)	0.25	0.089	0.109	0.108	0.106	0.109	0.106	0.109	0.106	0.111	0.111	0.109	0.106	0.110
	0.50	0.222	0.283	0.276	0.267	0.273	0.260	0.276	0.266	0.275	0.263	0.270	0.261	0.266
	0.75	0.440	0.524	0.515	0.489	0.505	0.479	0.507	0.489	0.510	0.481	0.500	0.473	0.490
	1.00	0.677	0.750	0.737	0.714	0.722	0.687	0.729	0.705	0.729	0.696	0.716	0.687	0.700
	1.25	0.852	0.896	0.886	0.865	0.872	0.842	0.877	0.858	0.878	0.843	0.865	0.839	0.849
	1.50	0.943	0.961	0.957	0.947	0.948	0.928	0.954	0.942	0.953	0.935	0.946	0.929	0.935
U(0, 1)	0.25	0.837	0.780	0.780	0.774	0.774	0.759	0.775	0.771	0.777	0.753	0.767	0.754	0.752
	0.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	0.75	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	1.25	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	1.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Table 3.4는 두 주요인 및 블럭이 모두 고정인 경우로 Table 3.3에서 제시한 다양한 효과구성유형과 효과크기의 변화 및 오차항의 모집단분포하에서 Table 2.1의 세구요인효과  $\beta_k$ 의 검정을 위한 모수적 F 통계량 및 순위변환된 FR 통계량의 검정력 결과를 나타낸다. Table 3.4의 세구요인효과 검정의 결과를 살펴보면 모든 요인이 고정이므로 앞선 Table 3.2의 주구요인효과 검정을 위한 결과와 상당히 유사함을 쉽게 알 수 있다. FR 통계량의 검정력은 존재하는 효과의 수가 적고 검정코자 하는 세구요인효과 크기 보다 상대적으로 나머지 효과들의 크기가 작을수록 F 통계량의 검정력보다 우수함을 보인다. 오차항의 모집단이 지수분포 및 이중지수분포하에서 FR 통계량의 검정력은 F 통계량의 검정력보다 뛰어난을 보이며, 정규분포 및 균일분포하에서는 F와 FR의 검정력은 비슷한 수준을 나타낸다.

**3.2. 두 주요인은 고정이나 블럭이 랜덤인 경우의 주구요인효과  $\alpha_j$  및 세구요인효과  $\beta_k$ 의 검정력**

두 번째는 두 주요인은 고정이나 블럭이 랜덤인 경우로, Table 2.2의 검정통계량을 바탕으로 주구요인효과  $\alpha_j$ 와 세구요인효과  $\beta_k$ 의 검정력을 분석하고자 한다. 우선 주구요인효과  $\alpha_j$ 의 검정력을 분석

하기 위하여 Table 3.5에서 제시한 바와 같이 두 주효과 및 블럭효과의 다양한 효과구성유형의 상황을 고려하였다. 추가적으로 블럭효과  $\gamma \sim N(0, 1/2)$ ,  $Exp(1/2)$ ,  $D(0, 1/2)$ ,  $U(0, 1/2)$ , 상호작용효과  $\gamma\alpha \sim N(0, 2)$ ,  $Exp(2)$ ,  $D(0, 2)$ ,  $U(0, 2)$ 을 가정하였다.

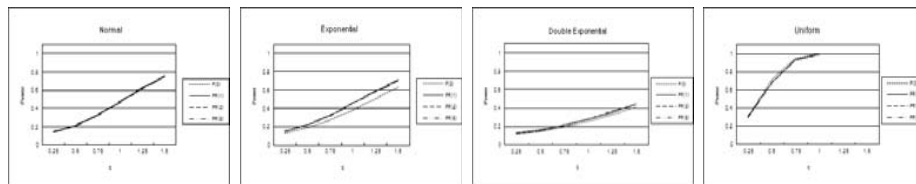
**Table 3.5** Effect size for power of  $\alpha_j$  when blocks are random

case	$\alpha$	$\beta$	$\alpha\beta$	case	$\alpha$	$\beta$	$\alpha\beta$
F(0)	All cases			FR(6)	$c$	0	$0.7c$
FR(1)	$c$	0	0	FR(7)	$c$	0	$c$
FR(2)	$c$	$0.3c$	0	FR(8)	$c$	$0.3c$	$0.3c$
FR(3)	$c$	$0.7c$	0	FR(9)	$c$	$0.7c$	$0.3c$
FR(4)	$c$	$c$	0	FR(10)	$c$	$0.3c$	$0.7c$
FR(5)	$c$	0	$0.3c$	FR(11)	$c$	$0.7c$	$0.7c$
				FR(12)	$c$	$c$	$c$

where  $\gamma \sim N(0, 1/2)$ ,  $Exp(1/2)$ ,  $D(0, 1/2)$ ,  $U(0, 1/2)$ ,  $\gamma\alpha \sim N(0, 2)$ ,  $Exp(2)$ ,  $D(0, 2)$ ,  $U(0, 2)$

**Table 3.6** Power of main effect  $\alpha_j$  when blocks are random

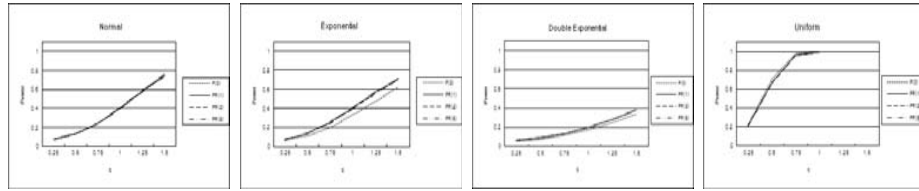
Dist.	$c$	F(0)	FR(1)	FR(2)	FR(3)	FR(4)	FR(5)	FR(6)	FR(7)	FR(8)	FR(9)	FR(10)	FR(11)	FR(12)
$N(0, 1)$	0.25	0.141	0.144	0.143	0.144	0.142	0.143	0.142	0.142	0.143	0.142	0.143	0.143	0.142
	0.50	0.216	0.211	0.211	0.212	0.212	0.212	0.215	0.214	0.214	0.213	0.212	0.213	0.209
	0.75	0.333	0.329	0.330	0.329	0.327	0.330	0.328	0.324	0.327	0.328	0.325	0.322	0.317
	1.00	0.479	0.472	0.472	0.466	0.460	0.472	0.463	0.456	0.469	0.463	0.463	0.456	0.439
	1.25	0.628	0.621	0.619	0.614	0.609	0.614	0.604	0.593	0.616	0.611	0.607	0.599	0.570
	1.50	0.761	0.750	0.749	0.741	0.738	0.752	0.739	0.723	0.748	0.736	0.738	0.718	0.680
$Exp(1)$	0.25	0.131	0.146	0.147	0.145	0.145	0.146	0.146	0.146	0.146	0.144	0.146	0.144	0.144
	0.50	0.185	0.219	0.221	0.218	0.215	0.219	0.220	0.217	0.219	0.216	0.217	0.212	0.209
	0.75	0.275	0.326	0.327	0.322	0.317	0.329	0.323	0.315	0.312	0.318	0.320	0.312	0.300
	1.00	0.381	0.457	0.458	0.448	0.438	0.455	0.446	0.436	0.454	0.441	0.444	0.424	0.400
	1.25	0.505	0.589	0.584	0.571	0.561	0.586	0.570	0.554	0.581	0.565	0.561	0.546	0.509
	1.50	0.631	0.709	0.704	0.685	0.674	0.707	0.686	0.663	0.700	0.681	0.679	0.661	0.606
$D(0, 1)$	0.25	0.114	0.127	0.125	0.126	0.126	0.127	0.129	0.128	0.126	0.125	0.126	0.126	0.126
	0.50	0.149	0.160	0.158	0.159	0.159	0.159	0.161	0.160	0.159	0.158	0.160	0.156	0.157
	0.75	0.194	0.210	0.210	0.211	0.211	0.212	0.210	0.209	0.212	0.208	0.210	0.208	0.207
	1.00	0.254	0.280	0.280	0.276	0.276	0.274	0.272	0.269	0.279	0.279	0.276	0.275	0.268
	1.25	0.331	0.357	0.360	0.354	0.352	0.354	0.352	0.346	0.359	0.354	0.350	0.347	0.340
	1.50	0.413	0.450	0.448	0.441	0.438	0.446	0.436	0.426	0.443	0.444	0.436	0.433	0.420
$U(0, 1)$	0.25	0.311	0.298	0.298	0.295	0.293	0.298	0.292	0.290	0.296	0.294	0.293	0.293	0.290
	0.50	0.719	0.689	0.686	0.684	0.683	0.673	0.673	0.663	0.683	0.682	0.670	0.664	0.632
	0.75	0.952	0.941	0.941	0.936	0.934	0.939	0.927	0.914	0.937	0.933	0.925	0.909	0.873
	1.00	0.998	0.997	0.997	0.995	0.995	0.996	0.993	0.987	0.995	0.994	0.991	0.985	0.963
	1.25	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	0.998	0.989
	1.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000



**Figure 3.2** Power of main effect  $\alpha_j$  where F(0): all cases, FR(1):  $\alpha = c$ ,  $\beta = \alpha\beta = 0$ , FR(2):  $\alpha = c$ ,  $\beta = 0.3c$ ,  $\alpha\beta = 0$ , FR(8):  $\alpha = c$ ,  $\beta = \alpha\beta = 0.3c$

Table 3.6은 두 주요인은 고정이나 블럭이 랜덤인 경우로 Table 3.5에서 제시한 다양한 효과구성유형과 효과크기의 변화 및 오차항의 모집단분포하에서 Table 2.2의 주구요인효과  $\alpha_j$ 의 검정을 위한 모수적 F 통계량 및 순위변환된 FR 통계량에 따른 검정력 결과를 나타낸다. Figure 3.2는 모든 효과구성유형의 모수적 통계량 F(0) 및 순위변환된 통계량 FR(1):  $\alpha = c$ ,  $\beta = \alpha\beta = 0$  (주구요인효과만이 존재하





**Figure 3.3** Power of main effect  $\beta_k$  where F(0): all cases, FR(1):  $\beta = c$ ,  $\alpha = \alpha\beta = 0$ , FR(2):  $\beta = c$ ,  $\alpha = 0.3c$ ,  $\alpha\beta = 0$ , FR(8):  $\beta = c$ ,  $\alpha = \alpha\beta = 0.3c$

Table 3.8은 두 주요인은 고정이나 블럭이 랜덤인 경우로 Table 3.7에서 제시한 다양한 효과구성유형과 효과크기의 변화 및 오차항의 모집단분포하에서 Table 2.3의 세구요인효과  $\beta_k$ 의 검정을 위한 모수적 F 통계량 및 순위변환된 FR 통계량에 따른 검정력 결과를 나타낸다. Figure 3.3은 모든 효과구성유형의 모수적 통계량 F(0) 및 순위변환된 통계량 FR(1):  $\beta = c$ ,  $\alpha = \alpha\beta = 0$  (세구요인효과만이 존재하는 경우), FR(2):  $\beta = c$ ,  $\alpha = 0.3c$ ,  $\alpha\beta = 0$  (세구요인효과 및 주구요인효과가 존재하는 경우), FR(8):  $\beta = c$ ,  $\alpha = \alpha\beta = 0.3c$  (모든 효과들이 동시에 존재하는 경우)로서 오차항이 정규분포, 지수분포, 이중지수분포 및 균일분포인 모집단으로부터 유의수준 0.05하에서 세구요인효과  $\beta_k$ 의 검정력 결과를 요약한다.

두 주요인은 고정이나 블럭이 랜덤인 경우를 반영한 Table 3.8 및 Figure 3.3을 살펴보면 세구요인효과  $\beta_k$ 의 검정을 위한 F 통계량의 검정력 및 FR 통계량의 검정력은 두 주요인 및 블럭이 모두 고정인 경우를 반영한 Table 3.4의 세구요인효과  $\beta_k$ 의 검정을 위한 F 통계량의 검정력 및 FR 통계량의 검정력 결과와 비교하면 각각 낮은 수준임을 알 수 있다. 그리고 두 주요인은 고정이나 블럭이 랜덤인 경우를 반영한 Table 3.8 및 Figure 3.3의 세구요인효과  $\beta_k$ 의 검정을 위한 F 통계량의 검정력 및 FR 통계량의 검정력은 두 주요인은 고정이나 블럭이 랜덤인 경우로 Table 3.6 및 Figure 3.2의 주구요인효과  $\alpha_j$ 의 검정을 위한 F 통계량 및 FR 통계량의 검정력 결과와 비교하면 다소 낮은 수준임을 보이나, FR 통계량의 검정력은 F 통계량의 검정력에 비하여 높은 상대적 검정력 우위를 나타낸다.

#### 4. 결론

$3 \times 3$  분할요인모형에서 두 주요인 및 블럭이 모두 고정인 경우일 때 주구요인효과 및 세구요인효과 검정을 위한 순위변환된 FR 통계량의 검정력은 존재하는 효과의 수가 적거나 효과크기가 작을수록 또는 검정코자 하는 요인효과 크기보다 검정대상 이외의 나머지 효과크기가 상대적으로 작을수록 모수적 F 통계량의 검정력보다 전반적으로 뛰어남을 알 수 있다. 아울러 오차항의 모집단유형이 지수분포 및 이중지수분포일 때 효과개수, 효과크기 및 효과구성유형에 상관없이 모든 상황에서 FR 통계량의 검정력이 F 통계량의 검정력보다 상대적으로 높은 우위를 보이며, 정규분포 및 균일분포하에서는 F 통계량 및 FR 통계량의 검정력은 비슷한 수준을 유지한다. 한편 두 주요인은 고정이나 블럭이 랜덤인 경우일 때 F 통계량 및 FR 통계량의 검정력은 두 주요인 및 블럭이 모두 고정인 경우를 반영한 F 통계량 및 FR 통계량의 검정력보다 각각 낮은 수준임을 알 수 있다. 이와같은 결과는 블럭을 랜덤으로 가정함으로써 인한 검정력 저하에 기인한다. 추가적으로 두 주요인은 고정이나 블럭이 랜덤인 경우하에서 주구요인효과 검정보다 세구요인효과 검정을 위한 F 통계량 및 FR 통계량의 검정력이 다소 낮은 수준임을 보이나, FR 통계량의 검정력은 F 통계량의 검정력에 비하여 높은 상대적 검정력 우위를 나타낸다.

앞으로 실험전체의 완전랜덤화가 불가능한 경우의 대안인 분할요인모형에서 여러번 분할이 발생하는 모형에 대해서도 본 연구결과가 확대적용될 수 있는지 여부에 대한 추가적인 시뮬레이션 연구과제 필요



성의 여지를 남겨두고자 한다. 특히 분할요인모형에 따른 순위변환 검정통계량의 이론적 접근성 전개가 복잡하다고 판단되지만, 본 연구결과인 시뮬레이션을 이용한 FR 통계량의 F 통계량에 대한 검정력 비교우위는 순위변환기법의 장점을 다른 모형에 다양하게 접목시킬 개연성을 제시한다.

## References

- Akritis, M. G. and Papadatos, N. (2004). Heteroscedastic one way ANOVA and lack of fit tests. *Journal of the American Statistical Association*, **99**, 368-382.
- Blair, R. C., Sawilowsky, S. S. and Higgins, J. J. (1989). An investigation of the type I error and power properties of the rank transform procedure in factorial ANOVA. *Journal of Educational Statistics*, **14**, 255-267.
- Choi, J. (2015). Projection analysis for balanced incomplete block designs. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **26**, 347-354.
- Choi, Y. H. (1998). A study of the power of the rank transform test in a 2(3) factorial experiment. *Communications in Statistics*, **27**, 251-266.
- Choi, Y. H. (2014). Power study for 2×2 factorial design in 4×4 latin square design. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **25**, 1195-1205.
- Conover, W. J. and Iman, R. L. (1981). Rank transformations as a bridge between parametric and non-parametric statistics. *The American Statistician*, **35**, 124-128.
- Fabian, V. (1991). On the problem of interactions in the analysis of variance. *Journal of the American Statistical Association*, **86**, 362-374.
- Gorman, J. O. and Akritis, M. G. (2001). Nonparametric models and methods for designs with dependent censored data. *Biometrics*, **57**, 88-95.
- Hicks, C. R. (1982). *Fundamental concepts in the design of experiments*, 3rd Ed., Holt, Rinehart and Winston, New York.
- Jo, S. and Kim, D. (2013). Nonparametric procedures using aligned method and joint placement in randomized block design. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **24**, 95-103.
- Montgomery, D. C. (1991). *Design and analysis of experiments*, 3rd Ed., John Wiley & Sons, New York.
- Neter, J., Wasserman, W. and Kutner, M. H. (1990). *Applied linear statistical model*, 3rd Ed., Irwin, Homewood and Boston.
- Pavur, R. and Nath, R. (1986). Parametric versus rank transform procedures in the two-way factorial experiment. *Journal of Statistical Computation Simulation*, **23**, 231-240.
- Woo, H. and Park, S. (2014). Statistical procedures of add-on trials for bioequivalence in 2×k crossover designs. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **25**, 1181-1193.

## Power comparison for $3 \times 3$ split plot factorial design<sup>†</sup>

Young Hun Choi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Applied Statistics, Hanshin University

Received 27 December 2016, revised 13 January 2017, accepted 17 January 2017

### Abstract

Restriction of completely randomization within a block can be handled by a split plot factorial design splitted by several plots.  $3 \times 3$  split plot factorial design with two fixed main factors and one fixed block shows that powers of the rank transformed statistic for testing whole plot factorial effect and split plot factorial effect are superior to those of the parametric statistic when existing effect size is small or the remaining effect size is relatively smaller than the testing factorial effect size. Powers of the rank transformed statistic show relatively high level for exponential and double exponential distributions, whereas powers of the parametric and rank transformed statistic maintain similar level for normal and uniform distributions. Powers of the parametric and rank transformed statistic with two fixed main factors and one random block are respectively lower than those with all fixed factors. Powers of the parametric and rank transformed statistic for testing split plot factorial effect with two fixed main factors and one random block are slightly lower than those for testing whole plot factorial effect, but powers of the rank transformed statistic show comparative advantage over those of the parametric statistic.

*Keywords:* Power, rank transformed statistic, split plot effect, whole plot effect,  $3 \times 3$  split plot factorial design.

---

<sup>†</sup> This research was supported by Hanshin University Research Grant.

<sup>1</sup> Professor, Department of Applied Statistics, Hanshin University, Gyeonggi-do 447-791, Korea.  
E-mail: choicyh@hs.ac.kr