

가중 포트폴리오에서의 CTE

홍종선¹ · 신동식² · 김재영³

¹²³성균관대학교 통계학과

접수 2016년 12월 8일, 수정 2017년 1월 18일, 게재확정 2017년 1월 18일

Abstract

다변량 분포에서의 VaR (Value at Risk)와 CTE (Conditional Tail Expectation)에 관한 많은 연구문헌에서는 특정한 포트폴리오 구성비를 이용하여 일변량 분포로 변환하여 추정하였다. 다변량 분포에서 분위수에 관한 많은 연구가 존재한다. 그러나 분위수가 유일하게 존재하지 않으므로, VaR와 CTE의 추정에 어려움이 있다. 본 연구에서는 다변량 분위 벡터를 이용한 대안적인 VaR와 통합적인 다변량 CTE의 연구를 확장하여, 여러 종류의 포트폴리오로 구성된 다양한 비율 조합에 따른 가중 CTE 벡터들을 제안한다. 일변량에 대한 CTE 관계식을 다차원의 관계식으로 확장하고, 일변량의 관계식과의 특징과 차이점에 대하여 토론한다. 정규분포로부터 추출한 자료와 실증 예제를 통하여 본 연구에서 제안한 가중 CTE를 탐색하면서 가중 CTE의 활용성과 장점을 유도한다.

주요용어: 가중값, 분위수, 상관계수, 손실, 위험, 포트폴리오, VaR.

1. 서론

금리, 주가, 환율 등 시장가격 요인의 변화 등에 따라 금융회사의 재무 상태에 손실이 발생할 위험(risk)을 측정하기 위한 척도로 Jorion (1997)은 주어진 신뢰수준 하에서 일정기간동안 발생할 수 있는 순자산가치의 최대손실 가능금액을 의미하는 Value at Risk (VaR)를 제안하였다. Sarykalin (2008)은 우측꼬리 $\alpha \in (0, 1)$ 값에 대응하는 $\min\{z|F_X(z) \geq \alpha\}$ 로 정의하고 VaR_α 로 표기하였다. 이후 VaR은 시장위험 (market risk) 관리수단으로 손실위험을 종합적으로 평가하고 위험의 크기를 한눈에 볼 수 있어 일반기업에서도 널리 사용되고 있다 (Kupiec, 1995; Lopez, 1998; Barone-Adesi 등, 1999; Rockafellar와 Uryasev, 2000 2002; Hong과 Kwon, 2010; Berkowitz 등, 2011; Ko와 Son, 2015; Park과 Baek, 2014).

급격한 사회변화들로 인해 점점 불안정해지는 금융시장 속에서 VaR은 시장위험 (market risk)에 대해 충분히 설명할 수 없기 때문에 Artzner 등 (1999)은 CTE (Conditional Tail Expectation) 또는 CVaR (Conditinal Value at Risk)와 ES (Expected Shortfall)을 통해 VaR의 한계점을 보완하였다. CTE는 VaR를 초과하는 손실이 발생할 때 손실에 대한 조건부 기대값을 의미하며 CTE_α 로 표기하였다 (Artzner 등, 1999; Rockafellar와 Uryasev, 2000; Andersson 등, 2001; Krokhmal 등, 2002; Acerbi와 Tasche, 2002; Topaloglou 등, 2002).

많은 변수들로 구성된 복잡한 금융시장에서 Longin (2000, 2001)은 VaR을 이용한 위험관리 방법을 연구하였다. CTE (CVaR 또는 ES)도 다변량 분포에서 위험관리 수단으로써 연구되었는데 대부분

¹ 교신저자: (03063) 서울특별시 종로구 성균관로 25-2, 성균관대학교 통계학과, 교수.

E-mail: cshong@skku.edu

² (03063) 서울특별시 종로구 성균관로 25-2, 성균관대학교 통계학과, 대학원생.

³ (03063) 서울특별시 종로구 성균관로 25-2, 성균관대학교 통계학과, 대학원생.

의 문헌들은 다변량을 일변량으로 변환하여 추정하였다. 이변량 이상의 다변량 분포에서 분위수 (quantile)에 관한 많은 연구가 존재하지만 (Chen과 Welsh, 2002; Yuzhi, 2010), 일변량 분포로 변환한 연구의 이유 중의 하나는 다변량 분포에서 분위수를 정의하기 어렵기 때문이다. Hong과 Kim (2016)은 다변량 분포에서 정의된 분위 벡터 (quantile vector)를 이용하여 다변량 CTE를 제안하였다. 변수들의 정보량을 잃지 않고 다변량 분포를 이용하여 통합적인 다변량 CTE를 추정하는 것이 장점이며, 기존의 CTE보다 작은 값으로 구현되기 때문에 보다 적극적인 투자를 할 수 있는 기대 효과가 있다.

포트폴리오를 구성한 여러 변수들에 대하여 통합적인 CTE를 추정하기보다는 현실 세계에서는 특정한 포트폴리오에 대하여 관심을 갖는다. 즉 여러 변수들의 특정한 비율로 선정한 포트폴리오인 경우에 대하여 CTE를 추정하는데 관심이 있다. 따라서 본 연구에서는 다변량 분포에서 통합적인 CTE를 제안한 Hong과 Kim (2016)의 연구를 확장하여, 특정한 포트폴리오 구성 비율인 가중값 (weight)이 설정된 경우에 다변량 가중 CTE (weighted CTE)를 추정한다. 다변량 분포에서의 위험을 통합적으로 추정된 CTE보다 본 연구에서의 가중 CTE는 위험 정도를 정확하고 세밀하게 측정하며, 다양한 포트폴리오 구성 비율에 대한 비교분석이 가능하다. 또한 다변량 CTE와 같은 공간상에 표현할 수 있으므로 가중 CTE와 비교할 수 있으며, 다양한 가중값에 대응하는 가중 CTE들과 분석도 가능하다. 가중 CTE를 사용하면, 신중하고 안정적인 위험관리를 보다 효율적으로 할 수 있다는 장점이 있다.

본 논문의 2절에서는 주어진 가중값 벡터와 다변량 Vector at Risk의 선형 결합을 최소화하는 k 차원의 한 점에 대응하는 가중 CTE들을 정의하고 가중 CTE들의 관계식을 유도한다. 3절에서는 다양한 상관계수를 포함하는 이변량 표준정규분포와 복잡한 형태의 공분산행렬을 갖는 삼변량 표준정규분포에서 다양한 가중 CTE를 추정하며 탐색하고, 통합적인 CTE와 비교하면서 특징을 토론한다. 4절에서는 이차원과 삼차원의 실증예제를 이용하여 가중 CTE를 구하여 비교하고 분석한다. 마지막 5절은 본 연구에서 제안한 가중 CTE에 대한 결론을 유도하고 활용방안과 기대효과에 대하여 토론한다.

2. 가중 CTE

본 연구에서는 위험에 대해 논하므로 이익률과 손실률 중 손실률에 대해서만 토론한다. 손실률을 나타내는 다변량 확률변수 $\{X_1, \dots, X_k\}$ 는 다변량 분포함수 $F(x_1, \dots, x_k)$ 를 따른다고 가정한다. Hong과 Kim (2016)은 다변량 $1 - \alpha$ 분위벡터 $\underline{z}_\alpha = (z_{1\alpha}, \dots, z_{k\alpha})^T$ 의 우상향 영역 (right and upper region) R_α^k 에 대하여 \underline{z}_α 를 다차원으로 확장한 Vector at Risk, $\underline{VaR}_\alpha = \underline{\mu} + \sqrt{\text{diag}(\Sigma)}\underline{z}_\alpha$ 를 이용하여, 다변량 $\underline{CTE}_\alpha = (CTE_{1\alpha}, \dots, CTE_{k\alpha})$, 여기서 $\underline{CTE}_{j\alpha} = \int \dots \int_{(x_1, \dots, x_k) \in R_\alpha^k} x_j dF(x_1, \dots, x_k)$ 를 정의하였다.

본 연구에서는 특정한 포트폴리오에서의 분산투자를 위한 가중값 벡터 $\underline{w} = (w_1, \dots, w_k)^T$ 가 주어진 경우에, $\underline{w}^T \underline{VaR}_\alpha$ 를 최소화하는 k 차원의 한 점 $\underline{VaR}_\alpha^w = (VaR_{1\alpha}^w, \dots, VaR_{k\alpha}^w)^T$ 를 발견할 수 있다. 특정한 α 보다 작거나 같은 모든 α^* 에 대한 Vector at Risk에서 $\underline{w}^T \underline{VaR}_{\alpha^*}$ 를 최소화하는 $\underline{VaR}_{\alpha^*}^{w+}$ 와 $\underline{VaR}_{\alpha^*}^{w-}$ 는 k 차원의 공간에서 선형직선으로 나타나며, $\underline{VaR}_{\alpha^*}^{w+} = \bigcup_{\alpha^* \leq \alpha} \underline{VaR}_{\alpha^*}^{w+}$ 와 $\underline{VaR}_{\alpha^*}^{w-} = \bigcup_{\alpha^* \leq \alpha} \underline{VaR}_{\alpha^*}^{w-}$ 와 같이 정의한다. 그리고 가중 CTE (weighted CTE)를 다음과 같이 정의한다.

정의 2.1 임의의 α 보다 작거나 같은 Vector at Risk로 부터 설정한 $\underline{VaR}_{\alpha^*}^{w+}$ 와 $\underline{VaR}_{\alpha^*}^{w-}$ 에 대하여 $\underline{CTE}_{\alpha^*}^{w+} = (CTE_{1\alpha^*}^{w+}, \dots, CTE_{k\alpha^*}^{w+})^T$ 와 $\underline{CTE}_{\alpha^*}^{w-} = (CTE_{1\alpha^*}^{w-}, \dots, CTE_{k\alpha^*}^{w-})^T$ 를 다음과 같이 정의한다. 모든 $j = 1, \dots, k$ 에 대하여,

$$\underline{CTE}_{j\alpha^*}^{w+} = \int \dots \int_{(x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha^*}^{w+}} x_j dF^{\alpha^* w+}(x_1, \dots, x_k),$$

$$\underline{CTE}_{j\alpha}^{w-} = \int \cdots \int_{(x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha}^{w-}} x_j dF^{\alpha^{w-}}(x_1, \dots, x_k),$$

여기서 조건부 누적분포함수 $F^{\alpha^{w+}}(x_1, \dots, x_k)$ 와 $F^{\alpha^{w-}}(x_1, \dots, x_k)$ 는 다음과 같으며,

$$F^{\alpha^{w+}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\{F(x_1, \dots, x_k) - (1 - \alpha^{w+})\}}{\alpha^{w+}}, \quad (x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha}^{w+},$$

$$F^{\alpha^{w-}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\{F(x_1, \dots, x_k) - (1 - \alpha^{w-})\}}{\alpha^{w-}}, \quad (x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha}^{w-},$$

그리고 여기서

$$\alpha^{w+} = P[(x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha}^{w+}] = \int \cdots \int_{(x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha}^{w+}} dF^{\alpha^{w+}}(x_1, \dots, x_k),$$

$$\alpha^{w-} = P[(x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha}^{w-}] = \int \cdots \int_{(x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha}^{w-}} dF^{\alpha^{w-}}(x_1, \dots, x_k).$$

□

다변량 가중 CTE에서도 일변량 CTE 관계식을 확장하여 정리 2.1의 관계식을 유도할 수 있다.

정리 2.1 $\underline{CTE}_{\alpha}^{w+}$ 와 $\underline{CTE}_{\alpha}^{w-}$ 의 관계식은 다음과 같다.

$$\underline{CTE}_{\alpha}^{w+} = \lambda^w E(\underline{VaR}_{\alpha}^{w-}) + (1 - \lambda^w) \underline{CTE}_{\alpha}^{w-},$$

여기서 $\lambda^w = (\alpha^{w+} - \alpha^{w-})/\alpha^{w+}$ 이다.

증명: 모든 $j = 1, \dots, k$ 에 대하여,

$$\underline{CTE}_{j\alpha}^{w+} = \frac{\sum_{(x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha}^{w+}} \sum x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\sum_{(x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha}^{w+}} \sum f(x_1, \dots, x_k)} = \frac{\sum_{(x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha}^{w+}} \sum x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\alpha^{w+}},$$

$$\underline{CTE}_{j\alpha}^{w-} = \frac{\sum_{(x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha}^{w-}} \sum x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\alpha^{w-}},$$

$$\begin{aligned} E(\underline{VaR}_{j\alpha}^{w-}) &= \frac{\sum_{(x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha}^{w+} - \underline{VaR}_{\alpha}^{w-}} \sum x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\sum_{(x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha}^{w+} - \underline{VaR}_{\alpha}^{w-}} \sum f(x_1, \dots, x_k)} \\ &= \frac{\sum_{(x_1, \dots, x_k) \in \underline{VaR}_{\alpha}^{w+} - \underline{VaR}_{\alpha}^{w-}} \sum x_j f(x_1, \dots, x_k)}{\alpha^{w+} - \alpha^{w-}}, \end{aligned}$$

그리고 $\lambda^w = \frac{\alpha^{w+} - \alpha^{w-}}{\alpha^{w+}}$ 이므로 정리 2.1의 관계식은 성립한다.

□

다변량 CTE 관계식은 이상향 영역 R_{α}^{k+} 와 R_{α}^{k-} 에서 정리했지만, 정리 2.1의 가중 CTE 관계식에서 $\underline{CTE}_{\alpha}^{w+}$, $E(\underline{VaR}_{\alpha}^{w-})$, $\underline{CTE}_{\alpha}^{w-}$ 는 k 차원 공간의 선형직선인 $\underline{VaR}_{\alpha}^{w+}$ 와 $\underline{VaR}_{\alpha}^{w-}$ 를 통해 식이 유도된다.

3. 다변량 정규분포에서의 가중 CTE

3.1. 이변량 정규분포 가중 CTE

다변량 CTE에서는 모평균 벡터가 영벡터인 다변량 정규분포를 설정하였다. 본 연구에서도 동일하게 가정된 다변량 정규분포를 사용하여 탐색한다. 우선 이변량 정규분포에서 $V(X) = 1, V(Y) = v^2$ 그리고 $Cov(X, Y) = \rho v$ 로 설정하고, 다양한 상관계수 ρ , 분산비율을 의미하는 v 그리고 가중값 $[w_x : w_y]$ 의 변화에 따른 가중 CTE, \underline{CTE}_α^w 를 구한다. 상관계수 ρ 는 -0.6부터 +0.6까지 0.3의 간격으로 살펴보고, v 는 0.8, 1.0, 1.2에 대하여 그리고 $[w_x : w_y]$ 는 [2:8]부터 [8:2]까지 변화를 살펴본다.

Sarykalin 등 (2008)과 Hong과 Kim (2016)에서 정의한 α^+ 와 α^- 를 확장 정의한 α^{w+} 와 α^{w-} 를 이용하여, 5%에 대한 \underline{CTE}_α^w 를 추정하고자 $\alpha^{w+} = 0.055, \alpha^{w-} = 0.045$ 로 설정하여 $\underline{CTE}_{x\alpha}^{w+}, \underline{CTE}_{y\alpha}^{w-}, E(VaR_\alpha^w)$ 를 계산하고 이들의 관계식도 확인한다. 대표적으로 가중값 [3:7], [5:5], [7:3]일 때의 $\underline{CTE}_{x\alpha}^{w+}, \underline{CTE}_{y\alpha}^{w-}, E(VaR_\alpha^w)$ 의 값과 추가로 다변량 \underline{CTE}_α^+ 의 값을 Table 3.1에 정리하였으며, 그 중 $\underline{CTE}_{x\alpha}^{w+}$ 를 Figure 3.1에 표현하였다.

Table 3.1과 Figure 3.1을 바탕으로 상관계수 ρ 가 증가하면 $\underline{CTE}_{x\alpha}^{w+}$ 의 좌표가 우상향 공간 (right and upper space)으로 이동하며, 분산비율 v 가 클수록 우상향 공간으로 이동하는 기울기도 증가함을 탐색할 수 있다. 우선, Figure 3.1의 왼쪽 그래프인 가중값 [3:7]일 때를 확인해보면, $\underline{CTE}_{y\alpha}^{w+}$ 가 $\underline{CTE}_{x\alpha}^{w+}$ 보다 크며 모든 $\underline{CTE}_{x\alpha}^{w+}$ 가 45°보다 위에 위치한다. 또한 상관계수가 증가함에 따라 $\underline{CTE}_{x\alpha}^{w+}$ 는 모두 45°보다 낮은 속도로 커지는데 분산비율이 1.2에서 0.8로 작아질수록 더 낮은 속도로 이동한다. Figure 3.1의 중앙 그래프인 가중값 [5:5]인 경우에는 모든 $\underline{CTE}_{x\alpha}^{w+}$ 가 45°부근에 위치한다. 또한 상관계수가 증가함에 따라 분산비율이 1.2에서는 $\underline{CTE}_{x\alpha}^{w+}$ 는 45°보다 큰 속도로 커지며, 분산비율이 1에서는 45°의 속도로 커지고, 분산비율이 0.8인 경우에는 45°보다 낮은 속도로 커진다. Figure 3.1의 오른쪽 그래프인 가중값 [7:3]에서는 $\underline{CTE}_{y\alpha}^{w+}$ 가 $\underline{CTE}_{x\alpha}^{w+}$ 보다 작으며 모든 $\underline{CTE}_{x\alpha}^{w+}$ 가 45°보다 아래에 위치한다. 또한 상관계수가 증가함에 따라 $\underline{CTE}_{x\alpha}^{w+}$ 는 모두 45°보다 높은 속도로 커지는데 분산비율이 0.8부터 1.2까지 커질수록 더 높은 속도로 커진다. 이것은 상관계수는 작고 분산비율은 클수록 가중값에 따른 위험의 변동이 크다는 것을 뜻한다.

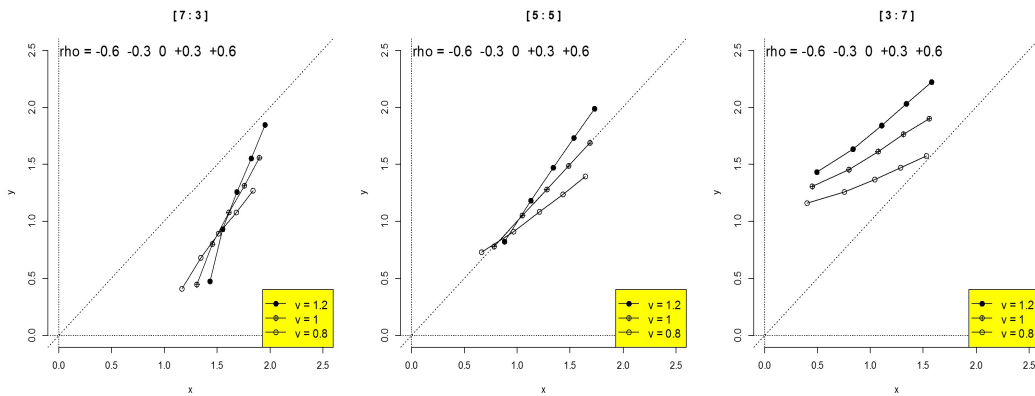


Figure 3.1 $\underline{CTE}_{x\alpha}^{w+}$ with weights [3:7], [5:5], [7:3]

Table 3.1 CTE_{α}^{w+} , CTE_{α}^{w-} , $E(VaR_{\alpha}^w)$ and CTE_{α}^+

		$\rho = -0.6$	$\rho = -0.3$	$\rho = 0$	$\rho = 0.3$	$\rho = 0.6$
$v = 0.8$	CTE_{α}^+	(0.8426, 0.6739)	(1.1303, 0.9042)	(1.3672, 1.0942)	(1.5818, 1.2663)	(1.7743, 1.4202)
	CTE_{α}^{w-}	[3:7] (0.4532, 1.1628)	(0.8128, 1.2772)	(1.1029, 1.3960)	(1.3596, 1.5151)	(1.6106, 1.6274)
		[5:5] (0.7047, 0.7496)	(1.0161, 0.9423)	(1.2700, 1.1220)	(1.4991, 1.2874)	(1.7243, 1.4520)
		[7:3] (1.1856, 0.4546)	(1.3766, 0.7228)	(1.5615, 0.9421)	(1.7390, 1.1354)	(1.9112, 1.3295)
	$E(VaR_{\alpha}^w)$	[3:7] (0.0880, 0.0880)	(0.4225, 0.4225)	(0.6924, 0.6924)	(0.9253, 0.9253)	(1.1611, 1.1611)
		[5:5] (0.4389, 0.4389)	(0.6923, 0.6923)	(0.9115, 0.9115)	(1.0988, 1.0988)	(1.2932, 1.2932)
		[7:3] (1.0700, 1.0700)	(1.1693, 1.1693)	(1.2780, 1.2780)	(1.3903, 1.3903)	(1.5007, 1.5007)
		[3:7] (0.4008, 1.1582)	(0.7571, 1.2571)	(1.0415, 1.3654)	(1.2877, 1.4712)	(1.5326, 1.5727)
	CTE_{α}^{w+}	[5:5] (0.6636, 0.7273)	(0.9663, 0.9095)	(1.2136, 1.0819)	(1.4317, 1.2368)	(1.6473, 1.3922)
		[7:3] (1.1660, 0.4101)	(1.3440, 0.6785)	(1.5156, 0.8925)	(1.6808, 1.0805)	(1.8393, 1.2674)
$v = 1$	CTE_{α}^+	(0.8424, 0.8424)	(1.1303, 1.1303)	(1.3672, 1.3672)	(1.5818, 1.5818)	(1.7742, 1.7742)
	CTE_{α}^{w-}	[3:7] (0.5031, 1.3150)	(0.8525, 1.4800)	(1.1330, 1.6543)	(1.3842, 1.8206)	(1.6347, 1.9691)
		[5:5] (0.8146, 0.8146)	(1.0939, 1.0939)	(1.3340, 1.3340)	(1.5521, 1.5521)	(1.7653, 1.7653)
		[7:3] (1.3184, 0.4990)	(1.4843, 0.8606)	(1.6491, 1.1352)	(1.8163, 1.3828)	(1.9714, 1.6361)
	$E(VaR_{\alpha}^w)$	[3:7] (0.1504, 0.1504)	(0.4734, 0.4734)	(0.7374, 0.7374)	(0.9566, 0.9566)	(1.1878, 1.1878)
		[5:5] (0.5993, 0.5993)	(0.8108, 0.8108)	(0.9887, 0.9887)	(1.1650, 1.1650)	(1.3353, 1.3353)
		[7:3] (1.2649, 1.2649)	(1.3071, 1.3071)	(1.3801, 1.3801)	(1.4663, 1.4663)	(1.5761, 1.5761)
		[3:7] (0.4512, 1.3042)	(0.7977, 1.4518)	(1.0735, 1.6135)	(1.3131, 1.7623)	(1.5575, 1.9001)
	CTE_{α}^{w+}	[5:5] (0.7800, 0.7800)	(1.0508, 1.0508)	(1.2795, 1.2795)	(1.4866, 1.4866)	(1.6895, 1.6895)
		[7:3] (1.3101, 0.4445)	(1.4567, 0.8027)	(1.6103, 1.0780)	(1.7589, 1.3126)	(1.9009, 1.5571)
$v = 1.2$	CTE_{α}^+	(0.8423, 1.0107)	(1.1308, 1.3545)	(1.3676, 1.6349)	(1.5819, 1.8875)	(1.7710, 2.1150)
	CTE_{α}^{w-}	[3:7] (0.5436, 1.4476)	(0.8886, 1.6698)	(1.1663, 1.8923)	(1.4127, 2.1028)	(1.6563, 2.3023)
		[5:5] (0.9146, 0.8766)	(1.1673, 1.2342)	(1.3949, 1.5394)	(1.6007, 1.8114)	(1.8042, 2.0765)
		[7:3] (1.4374, 0.5569)	(1.5761, 1.0038)	(1.7311, 1.3333)	(1.8811, 1.6366)	(2.0243, 1.9372)
	$E(VaR_{\alpha}^w)$	[3:7] (0.2161, 0.2161)	(0.5322, 0.5322)	(0.7793, 0.7793)	(0.9936, 0.9936)	(1.2174, 1.2174)
		[5:5] (0.7321, 0.7321)	(0.8996, 0.8996)	(1.0607, 1.0607)	(1.2242, 1.2242)	(1.3794, 1.3794)
		[7:3] (1.4233, 1.4233)	(1.4200, 1.4200)	(1.4627, 1.4627)	(1.5506, 1.5506)	(1.6252, 1.6252)
		[3:7] (0.4963, 1.4307)	(0.8363, 1.6343)	(1.1069, 1.8399)	(1.3431, 2.0321)	(1.5792, 2.2180)
	CTE_{α}^{w+}	[5:5] (0.8829, 0.8229)	(1.1290, 1.1807)	(1.3407, 1.4688)	(1.5370, 1.7309)	(1.7293, 1.9845)
		[7:3] (1.4348, 0.4742)	(1.5508, 0.9288)	(1.6891, 1.2555)	(1.8260, 1.5507)	(1.9545, 1.8425)

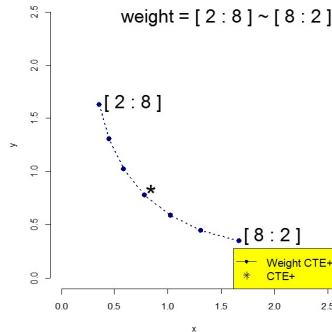


Figure 3.2 CTE_{α} and CTE_{α}^w

본 연구의 CTE_{α}^w 를 Hong과 Kim (2016)이 제안한 CTE_{α} 와 비교하기 위하여, 대표적으로 CTE_{α}^{w+} 와 CTE_{α}^+ 를 Figure 3.2에 표현하였다. CTE_{α} 는 위험을 추정할 때 모든 변수들을 동등하게 취급하여 정보량에 손실은 없고 다양한 위험관리에 적용하기 힘들지만, CTE_{α}^w 는 다양한 투자상황에 맞는 위험을 추정할 수 있도록 특정 포트폴리오 구성 비율인 가중값에 해당하는 점점의 선에서 정의되었다. 따라서 고려하는 정보량은 CTE_{α} 보다 적으나 각각의 특정한 가중값에 따라 다양한 해석을 할 수 있는 장점이 있다.

Table 3.1를 바탕으로 CTE_{α} 와 CTE_{α}^w 를 비교하기 위하여 가중값 [2:8] ~ [8:2]에서 상관계수와 분산 비율에 대한 CTE_{α}^+ , CTE_{α}^- , $E(VaR_{\alpha})$ 중 대표적으로 CTE_{α}^+ 와 CTE_{α}^{w+} , CTE_{α}^{w-} , $E(VaR_{\alpha}^w)$ 중 대

표적으로 CTE_{α}^{w+} 을 Figure 3.3에 표현하였다.

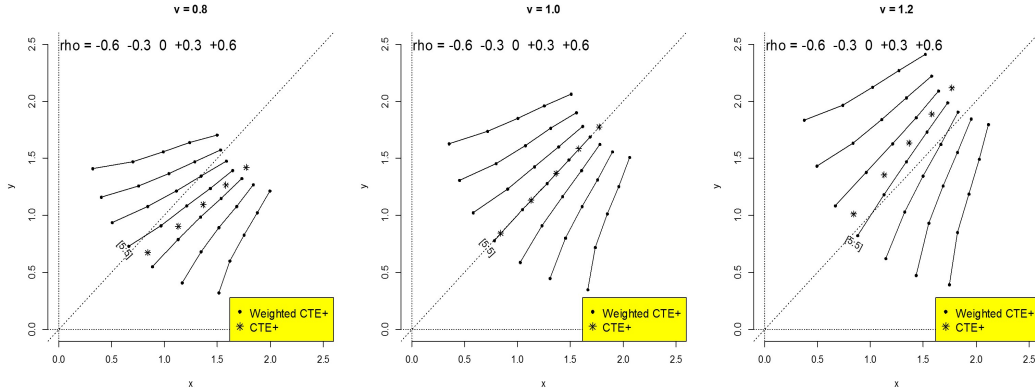


Figure 3.3 CTE_{α}^{+} & CTE_{α}^{w+} with $v = 0.8, 1, 1.2$

Figure 3.3를 바탕으로 상관계수의 증가에 따라 CTE_{α}^w 와 CTE_{α} 모두 우상향 공간으로 이동하는 데 CTE_{α} 에 비해 CTE_{α}^w 가 가중값에 따라 다양한 위치에서 우상향 공간으로 이동하고 있음을 확인할 수 있다. Figure 3.3의 중앙 그래프인 분산비율이 1에서는 가중값 [5:5]에서의 CTE_{α}^{w+} 와 CTE_{α}^{+} 는 같은 선상에 위치하며, [2:8]쪽으로 갈수록 상향 공간 (upper space)에 위치하고, [8:2]쪽으로 갈수록 하향 공간 (lower space)에 위치하고 있다. Figure 3.3의 왼쪽 그래프인 분산비율이 0.8에서는 가중값 [5:5]부터 [2:8]까지의 CTE_{α}^{w+} 는 CTE_{α}^{+} 보다 상향 공간에 위치하며, [6:4]부터 [8:2]까지의 CTE_{α}^{w+} 는 CTE_{α}^{+} 보다 하향 공간에 위치한다. Figure 3.3의 오른쪽 그래프인 분산비율이 1.2에서는 가중값 [4:6]부터 [2:8]까지의 CTE_{α}^{w+} 는 CTE_{α}^{+} 보다 상향 공간에 위치하며, [5:5]부터 [8:2]까지의 CTE_{α}^{w+} 는 CTE_{α}^{+} 보다 하향 공간에 위치한다. 이것은 분산비율이 클수록 가중값에 따른 위험의 격차가 벌어지게 되고, 분산비율이 작을수록 가중값에 따른 위험의 격차가 줄어든다는 것을 의미한다.

가중값 [5:5]인 경우에 CTE_{α}^{w+} 와 CTE_{α}^{+} 를 비교해 보면, CTE_{α}^{w+} 가 CTE_{α}^{+} 보다 원점에 더 가깝다. CTE_{α} 는 포트폴리오 특성이 투입되지 않기 때문에 위험정도가 낮게 추정되어 부주의한 위험관리를 유발할 수 있다. CTE_{α}^w 는 다양한 투자상황에 맞는 포트폴리오 가중값을 적용시켜 위험을 추정하기 때문에 위험정도가 CTE_{α} 보다 보수적이다. 따라서 신중하고 안정적인 위험관리를 가능하게 한다고 해석할 수 있다.

3.2. 삼변량 정규분포 가중 CTE

삼변량 정규분포의 분산공분산 행렬을 다음과 같이 설정한다.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho v & \rho^2 v^2 \\ \rho v & v^2 & \rho v^3 \\ \rho^2 v^2 & \rho v^3 & v^4 \end{pmatrix}$$

여기서 상관계수 ρ 는 -0.6부터 +0.6까지 0.3의 간격으로 살펴보고, 분산비율 v 는 0.5, 1, 2인 경우와 가중값 $[w_x : w_y : w_z]$ 는 [1:1:1], [5:3:2], [3:5:2], [2:3:5]에 대한 변화로 다양하게 살펴본다. 이변량 정규분포의 경우와 마찬가지로 5%에 대한 CTE_{α}^w 를 추정하고자 $\alpha^{w+} = 0.055$, $\alpha^{w-} = 0.045$ 로 설정한 후

CTE_{α}^{w+} , CTE_{α}^{w-} , $E(VaR_{\alpha}^w)$ 를 계산하고 이들의 관계식도 확인한다. 삼변량 정규분포의 경우 공간상의 좌표로써 시각화 표현이 어려우므로 CTE_{α}^w 를 $CTE_{x\alpha}^w$, $CTE_{y\alpha}^w$, $CTE_{z\alpha}^w$ 로 분리하여 표현하고 각각 따로 탐색하고 종합한다.

가중값 [1:1:1]로 고정된 경우에 CTE_{α}^{w+} 를 구하여 Table 3.2에 정리하였다. 상관계수가 증가하면 $CTE_{x\alpha}^w$, $CTE_{y\alpha}^w$, $CTE_{z\alpha}^w$ 모두 증가하며, 증가 속도도 빨라진다. 이것은 상관계수가 높을수록 위험이 증가하는 것을 의미한다.

Table 3.2 $CTE_{x\alpha}^{w+}$, $CTE_{y\alpha}^{w+}$, $CTE_{z\alpha}^{w+}$ with weight [1:1:1]

$[1 : 1 : 1]$	$v = 0.5$	$v = 1$	$v = 2$
$\rho = -0.6$	(0.2360, 0.2360, 0.2360)	(0.4118, 0.4118, 0.4118)	(0.6080, 0.6080, 0.6080)
$\rho = -0.3$	(0.3303, 0.3303, 0.3303)	(0.5790, 0.5790, 0.5790)	(0.7955, 0.7955, 0.7955)
$\rho = 0$	(0.4270, 0.4270, 0.4270)	(0.7443, 0.7443, 0.7443)	(0.9647, 0.9647, 0.9647)
$\rho = 0.3$	(0.5519, 0.5519, 0.5519)	(0.9290, 0.9290, 0.9290)	(1.1443, 1.1443, 1.1443)
$\rho = 0.6$	(0.7504, 0.7504, 0.7504)	(1.1453, 1.1453, 1.1453)	(1.3845, 1.3845, 1.3845)

분산비율이 1로 고정된 경우에 CTE_{α}^{w+} 의 좌표인 $CTE_{x\alpha}^{w+}$, $CTE_{y\alpha}^{w+}$, $CTE_{z\alpha}^{w+}$ 결과를 Table 3.3으로 정리하고 Figure 3.4에 구현하였다. 가중값 [5:3:2]에서는 $CTE_{x\alpha}^{w+}$ 가 제일 크고, 가중값 [3:5:2]에서는 $CTE_{y\alpha}^{w+}$ 가 제일 크며, 가중값 [2:3:5]에서는 $CTE_{z\alpha}^{w+}$ 가 제일 크다는 것을 탐색하였다. 즉 가중값 $[w_x : w_y : w_z]$ 에서 동일한 가중값 $w_x = w_y = w_z$ 인 경우에는 $CTE_{x\alpha}^w = CTE_{y\alpha}^w = CTE_{z\alpha}^w$ 이다. 그리고 $w_x > w_y > w_z$ 라면 $CTE_{x\alpha}^w > CTE_{y\alpha}^w > CTE_{z\alpha}^w$ 이고, $w_y > w_x > w_z$ 라면 $CTE_{y\alpha}^w > CTE_{x\alpha}^w > CTE_{z\alpha}^w$ 이며, $w_x < w_y < w_z$ 라면 $CTE_{x\alpha}^w < CTE_{y\alpha}^w < CTE_{z\alpha}^w$ 임을 발견하였다. 이것은 가중값에 따라 위험의 크기도 비례하여 구성된다는 것을 뜻한다.

Table 3.3 $CTE_{x\alpha}^{w+}$, $CTE_{y\alpha}^{w+}$, $CTE_{z\alpha}^{w+}$ with $v = 1$

$v = 1$	$[5 : 3 : 2]$			$[3 : 5 : 2]$			$[2 : 3 : 5]$		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
$\rho = -0.6$	0.6176	0.3705	0.2470	0.3705	0.6176	0.2470	0.2470	0.3705	0.6176
$\rho = -0.3$	0.8702	0.5222	0.3481	0.5222	0.8702	0.3481	0.3481	0.5222	0.8702
$\rho = 0$	1.1337	0.6801	0.4535	0.6801	1.1337	0.4535	0.4535	0.6801	1.1337
$\rho = 0.3$	1.4623	0.8778	0.5850	0.8778	1.4623	0.5850	0.5850	0.8778	1.4623
$\rho = 0.6$	1.9421	1.1887	0.7893	1.1887	1.9421	0.7893	0.7893	1.1887	1.9421

가중값이 [5:3:2]로 고정된 경우에 CTE_{α}^{w+} 의 좌표인 $CTE_{x\alpha}^{w+}$, $CTE_{y\alpha}^{w+}$, $CTE_{z\alpha}^{w+}$ 결과를 Figure 3.5에 구현하였다. 상관계수와 분산비율이 증가함에 따라 모든 $CTE_{x\alpha}^{w+}$, $CTE_{y\alpha}^{w+}$, $CTE_{z\alpha}^{w+}$ 의 값이 증가한다. 그러나 가중값은 [5:3:2]인 경우에 가중값 비중이 제일 큰 $CTE_{x\alpha}^{w+}$ 는 급격히 증가하고, 가중값 비중이 제일 약한 $CTE_{z\alpha}^{w+}$ 는 증가 속도가 제일 낮다. 이것은 가중값이 클수록 상관계수에 따른 위험의 변동이 커지고, 가중값 비율이 작을수록 상관계수에 따른 위험의 변동이 작다는 것을 의미한다.

가중값 [5:3:2]에서 가중값 비중이 제일 큰 $CTE_{x\alpha}^{w+}$, 가중값 [3:5:2]에서 가중값 비중이 제일 큰 $CTE_{y\alpha}^{w+}$ 그리고 가중값 [2:3:5]에서 가중값 비중이 제일 큰 $CTE_{z\alpha}^{w+}$ 를 Figure 3.6에 구현하였다. Figure 3.6의 왼쪽 그래프인 가중값 [5:3:2]에서의 $CTE_{x\alpha}^{w+}$ 는 상관계수의 증가에 따라 분산비율이 2일 때의 증가 속도가 가장 가파르며, Figure 3.6의 중앙 그래프인 가중값 [3:5:2]에서의 $CTE_{y\alpha}^{w+}$ 는 분산비율이 1일 때의 증가 속도가 가장 빠르고, Figure 3.6의 오른쪽 그래프인 가중값 [2:3:5]에서의 $CTE_{z\alpha}^{w+}$ 는 분산비율이 0.5일 때의 가장 가파르게 상승한다는 것을 탐색하였다. 이것은 가중값과 상관계수 ρ 가 클수록 위험은 커지나 위험의 증가량에는 분산비율에 따라 민감하게 반응하여 위험의 변동을 만들어 낸다는 것을 뜻한다.

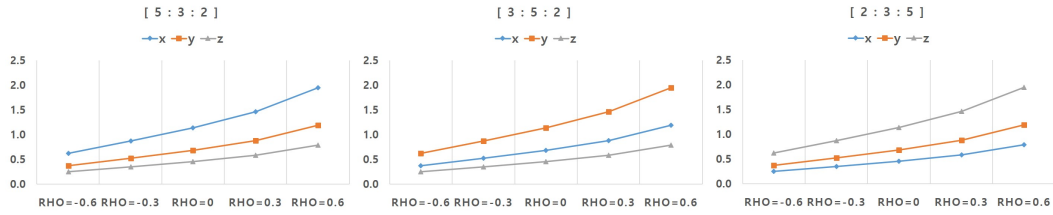


Figure 3.4 $CTE_{x\alpha}^{w+}$, $CTE_{y\alpha}^{w+}$, $CTE_{z\alpha}^{w+}$ with $v=1$

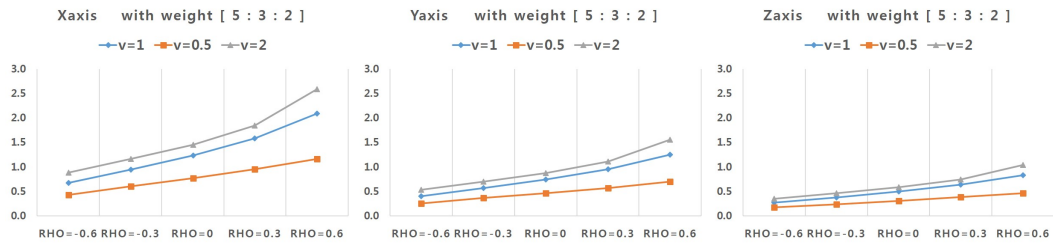


Figure 3.5 $CTE_{x\alpha}^{w+}$, $CTE_{y\alpha}^{w+}$, $CTE_{z\alpha}^{w+}$ with weight [5:3:2]

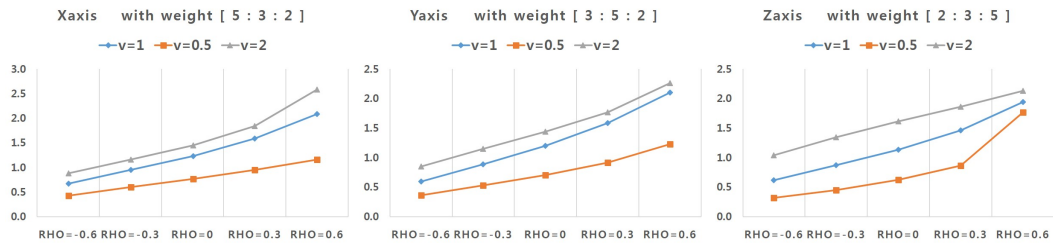


Figure 3.6 $CTE_{x\alpha}^{w+}$ with [5:3:2], $CTE_{y\alpha}^{w+}$ with [3:5:2], $CTE_{z\alpha}^{w+}$ with [2:3:5]

4. 실증예제

5개의 기업인 SK텔레콤 (SKT), 현대건설 (HDEC), 기아차 (KIA), 우리은행 (WB), CJ대한통운 (CJKE) 주식의 증가 자료를 이용하여 손실률의 실증자료로 활용한다. 실증자료는 로그 손실률로써 한국 거래소 (www.krx.co.kr)의 2015년 08월 03일부터 2016년 08월 02일까지 1년간의 247개 시계열 자료를 대상으로 한다. 이변량 자료에 관하여 SK텔레콤과 현대건설의 손실률 자료를, 삼변량 자료는 기아차, 우리은행, CJ대한통운의 자료를 사용하였고, 각각에 대한 다양한 포트폴리오 구성으로 분산투자시의 CTE_{α}^{w+} 를 추정하였다.

이변량 자료인 SK텔레콤과 현대건설에 대한 다변량 정규분포를 검정하는 통계량들 중에서 Henze-Zirkler의 통계량값은 1.0795 (p -값=0.0434)이고, 삼변량 자료인 기아차, 우리은행, CJ대한통운에 대한 Henze-Zirkler의 통계량값은 0.9695 (p -값=0.1051)이지만 본 실증예제에서는 각각 다변량 정규분포를 따른다고 가정하였다. 그리고 5%에 대한 $\alpha^{w+} = 0.055$, $\alpha^{w-} = 0.045$ 로 설정하여 CTE_{α}^{w+} 를 추정한다.

이변량 자료인 SK텔레콤 (SKT), 현대건설 (HDEC)의 표준편차와 상관계수는 $\sigma_{SKT} = 1.5243$, $\sigma_{HDEC} = 2.6025$, $\rho = 0.1609$ 이며, \underline{CTE}_α^w 추정에서 가중값 $[w_{SKT} : w_{HDEC}]$ 은 $[2:8] \sim [8:2]$ 로 설정하였다.

SK텔레콤, 현대건설의 $\underline{CTE}_\alpha^{w+}$, $\underline{CTE}_\alpha^{w-}$, $E(\underline{VaR}_\alpha^w)$ 값을 계산하여 Table 4.1에 정리하였다.

Table 4.1 $\underline{CTE}_\alpha^{w+}$, $\underline{CTE}_\alpha^{w-}$ and $E(\underline{VaR}_\alpha^w)$ of SKT and HDEC

	$\underline{CTE}_\alpha^{w-}$	$E(\underline{VaR}_\alpha^w)$	$\underline{CTE}_\alpha^{w+}$
[2:8]	(1.5203, 3.8939)	(1.3850, 3.7196)	(1.4515, 3.8053)
[3:7]	(1.8613, 3.5615)	(1.5779, 3.1258)	(1.7840, 3.4427)
[4:6]	(2.1372, 3.3025)	(1.7991, 2.7164)	(2.0586, 3.1662)
[5:5]	(2.3864, 3.1078)	(2.0398, 2.4135)	(2.3111, 2.9570)
[6:4]	(2.7622, 3.2738)	(2.3114, 2.1899)	(2.6829, 3.0831)
[7:3]	(3.0289, 3.0859)	(2.6209, 2.0353)	(2.9563, 2.8991)
[8:2]	(3.3369, 2.9004)	(3.0056, 1.9216)	(3.2766, 2.7221)

각 가중값 별로 구한 $\underline{CTE}_\alpha^{w+}$, $\underline{CTE}_\alpha^{w-}$, $E(\underline{VaR}_\alpha^w)$ 는 정리 2.1의 관계식이 성립함을 확인할 수 있다. 다변량 CTE를 구하면 \underline{CTE}_α^- 는 (2.4894, 3.1096), $E(\underline{VaR}_\alpha)$ 는 (2.0516, 2.6605) 그리고 \underline{CTE}_α^+ 는 (2.3725, 2.9897)이다. 본 연구에서 제안한 \underline{CTE}_α^w 와 비교하기 위하여 Table 4.1에 있는 $\underline{CTE}_\alpha^{w+}$ 와 다변량 CTE의 \underline{CTE}_α^+ 를 Figure 4.1에 같이 구현하였다.

Figure 4.1에서 가중값 [5:5]인 경우에 \underline{CTE}_α^w 와 \underline{CTE}_α 를 비교해 보면, \underline{CTE}_α^w 가 \underline{CTE}_α 보다 원점에 더 가까운 것을 발견할 수 있다. 3절에서의 시뮬레이션 결과와 유사하게 포트폴리오의 특성을 갖지 못하는 \underline{CTE}_α 에 비해 \underline{CTE}_α^w 는 특정한 포트폴리오가 설정되었을 때의 가중값이 주어진 경우이므로 \underline{CTE}_α 보다 좀더 신중하고 안정적인 투자를 가능하게 한다고 해석할 수 있다. 이것은 SK텔레콤과 현대건설의 다양한 포트폴리오 구성으로 분산투자를 진행하면, 위험을 예민하게 적용시켜 보다 안정적인 위험관리를 할 수 있도록 정보를 제공한다.

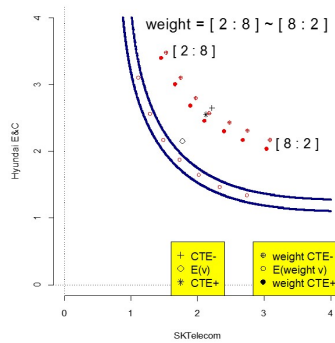


Figure 4.1 $\underline{CTE}_\alpha^{w+}$ and \underline{CTE}_α^+ of SKT and HDEC

다음으로 삼변량 자료인 기아차 (KIA), 우리은행 (WB), CJ대한통운 (CJKE)에서의 표준편차와 상관계수는 $\sigma_{KIA} = 1.8191$, $\sigma_{WB} = 1.4257$, $\sigma_{CJKE} = 2.0398$, $\rho_{KIA, WB} = 0.2879$, $\rho_{KIA, CJKE} = 0.0612$, $\rho_{WB, CJKE} = 0.1905$ 이며, 가중값 $[w_{KIA} : w_{WB} : w_{CJKE}]$ 을 $[1:1:1]$, $[5:3:2]$, $[3:5:2]$ 그리고 $[2:3:5]$ 로 설정하였다.

기아차, 우리은행, CJ대한통운의 $\underline{CTE}_\alpha^{w+}$, $\underline{CTE}_\alpha^{w-}$, $E(\underline{VaR}_\alpha^w)$ 값을 Table 4.2에 정리하였다. 가중값 [5:3:2]에서는 KIA의 위험정도가 가장 크고, WB와 CJKE의 위험정도가 가장 큰 경우는 각각

[3:5:2]와 [2:3:5]이다. 가중값이 같아도 위험정도에는 분산비율과 상관계수에 따라 차이가 있는데 이 예제에서는 KIA, WB, CJKE 중 분산이 제일 큰 CJKE의 위험정도가 가장 크다.

Table 4.2 CTE_{α}^{w+} , CTE_{α}^{w-} and $E(VaR_{\alpha}^w)$ of KIA, WB and CJKE

	CTE_{α}^{w-}	$E(VaR_{\alpha}^w)$	CTE_{α}^{w+}
[1:1:1]	(1.9873, 1.9873, 1.9873)	(1.3880, 1.3880, 1.3880)	(1.8002, 1.8002, 1.8002)
[5:3:2]	(2.9014, 1.7411, 1.1607)	(2.2276, 1.3365, 0.8910)	(2.7592, 1.6557, 1.1037)
[3:5:2]	(1.7680, 2.9467, 1.1787)	(1.4114, 2.3524, 0.9410)	(1.6639, 2.7731, 1.1092)
[2:3:5]	(1.1588, 1.7383, 2.8968)	(0.8817, 1.3225, 2.2044)	(1.1056, 1.6585, 2.7639)

가중값 별로 구한 CTE_{α}^{w+} , CTE_{α}^{w-} , $E(VaR_{\alpha}^w)$ 는 정리 2.1의 관계식이 성립함을 확인할 수 있다. 그리고 다변량 CTE를 추정하면 CTE_{α}^{-} 는 (2.1697, 1.8678, 2.2651), $E(VaR_{\alpha})$ 는 (1.6319, 1.4281, 1.6922) 그리고 CTE_{α}^{+} 는 (2.0871, 1.9001, 2.1770)이다. 본 연구에서 제안한 CTE_{α}^w 와 비교하기 위하여 다양한 가중값에 대한 CTE_{α}^{w+} 와 CTE_{α}^{+} 를 Figure 4.2에 동시에 구현하였다. 우선 기아차에 대한 Figure 4.2를 살펴보면, 기아차에 대한 분산투자비율이 가장 큰 [5:3:2]에서는 CTE_{α}^{+} 보다 CTE_{α}^{w+} 가 큰 값을 가지며 나머지 가중값의 경우에는 CTE_{α}^{+} 보다 모든 CTE_{α}^{w+} 가 작은 값을 갖는다. 특히 기아차에 대한 가중값이 제일 작은 [2:3:5]에서는 가장 작은 CTE_{α}^{w+} 값을 갖는다. 이런 현상은 우리은행과 CJ대한통운의 경우에도 동일하다. 그리고 투입되는 변수의 상관관계를 고려하지 않는 CTE_{α}^{+} 의 경우 가장 큰 분산을 갖는 CJKE가 KIA와 WB에 비교하여 더 큰 위험정도를 갖는다. 반면에 가중값과 상관계수를 고려하는 CTE_{α}^w 의 경우 WB의 위험정도가 가장 크다.

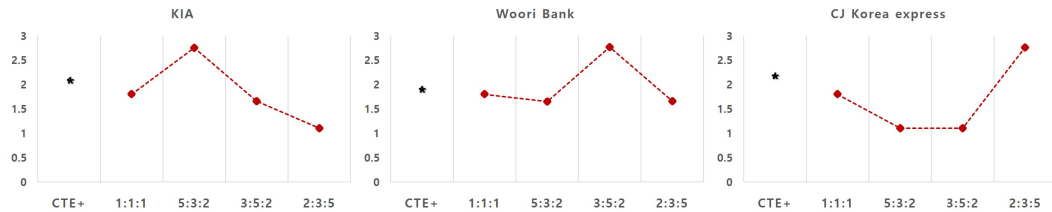


Figure 4.2 CTE_{α}^{w+} and CTE_{α}^{+} of KIA, WB and CJKE

5. 결론

본 연구에서는 Hong 등 (2016)이 제안한 다변량 분위 벡터를 이용하고, 통합적인 다변량 분포에서의 CTE 추정방법을 제안한 Hong과 Kim (2016)의 연구를 확장하여, 여러 종류의 포트폴리오로 구성된 다양한 비율 조합인 가중값에 따른 가중 CTE를 제안하였다. 특정한 가중값 벡터가 주어질 경우 그리고 고정된 유의수준에 대해 두 종류의 CTE를 정의하였으며 이들의 관계식을 유도하였다.

본 연구에서 제안한 가중 CTE를 다변량 CTE와 비교하기 위하여 이변량과 삼변량의 정규분포에서 두 확률변수의 분산비율과 상관계수 그리고 가중값을 다양하게 변화시키면서 살펴보았다.

다변량 정규분포에서 CTE는 다변량 분위벡터의 면적에서 정의되어 투입된 정보량은 많으나 수많은 경우의 수를 가지는 포트폴리오의 위험 정도를 동등하게 취급하여 하나의 점으로 설명하고 해석할 수 있다. 그러나 가중 CTE는 특정 포트폴리오 구성 비율인 가중값에 해당하는 점점들의 집합인 선에서 정의되기 때문에 고려하는 정보량은 CTE보다 적지만, 각각의 특정한 가중값에 따라 다양한 해석을 할 수 있으며 사람들에게 다양한 선택권을 제공한다는 장점이 있다. CTE와 같은 공간상에 표현이 가능하여 비교분석이 가능한데, 동일한 가중값인 경우에 가중 CTE가 CTE보다 원점에 더 가까운 값을 갖는다.

본 연구에서 제안한 가중 CTE는 특정한 포트폴리오가 설정되었을 때의 가중값이 주어진 경우이므로 기존의 CTE보다 신중하고 안정적인 투자를 가능하게 한다고 해석할 수 있다. 실증예제에서는 포트폴리오의 특성을 갖지 못하는 CTE에 비해 특정한 포트폴리오가 설정되어 가중값이 주어진 가중 CTE가 좀 더 위험을 예민하게 적용시켜 신중하고 안정적인 위험관리를 할 수 있다는 장점을 이변량의 경우에서 확인하였다. 삼변량 실증예제에서도 더욱 복잡한 현상을 발견할 수 있었다.

그러므로 포트폴리오로 구성된 다변량 분포에서의 위험을 통합적으로 추정한 CTE보다 본 연구에서의 가중 CTE는 특정한 포트폴리오 구성 비율인 가중값이 설정된 경우에서 CTE를 추정하기 때문에 정보량은 줄지만 위험 정도를 정밀하게 측정하고, 다양한 포트폴리오 구성 비율에 대한 비교분석이 가능하여 신중하고 안정적인 위험관리를 가능하게 하는 장점이 있다.

References

- Acerbi, C. and Tasche, D. (2002). Expected shortfall: A natural coherent alternative to VaR. *Economic notes*, **31**, 379-388.
- Andersson, F., Mausser, H., Rosen, D. and Uryasev, S. (2001). Credit risk optimization with conditional value-at-risk. *Mathematical Programming B*, **89**, 273-291.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M. and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, **9**, 203-228.
- Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K. and Vosper, L. (1999). VaR without correlations for portfolios of derivative securities. *Journal of Futures Markets*, **19**, 583-602.
- Berkowitz, J., Christoffersen, P. and Pelletier, D. (2011). Evaluating value-at-risk models with desk-level data. *Management Science*, **57**, 2213-2227.
- Chen, L. A. and Welsh, A. H. (2002). Distribution function based bivariate quantiles. *Journal of Multivariate Analysis*, **24**, 523-533.
- Hong, C. S. and Kim, T. W. (2016). Multivariate conditional tail expectations. *Korean Journal of Applied Statistics*, **29**, To appear.
- Hong, C. S., Han, S. J. and Lee, G. P. (2016). Vector at risk and alternative value at risk. *The Korean Journal of Applied Statistics*, **29**, 689-697.
- Hong, C. S. and Kwon, T. W. (2010). Distribution fitting for the rate of return and value at risk. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **21**, 219-229.
- Jorion, P. (1997). *Value at risk: the new benchmark for controlling market risk*, Irwin Professional Pub, Chicago.
- Ko, K. Y. and Son, Y. S. (2015). Optimal portfolio and VaR of KOSPI200 using One-factor model. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **26**, 323-334.
- Krokhmal, P., Palmquist, J. and Uryasev, S. (2002). Portfolio optimization with conditional Value-at-Risk objective and constraints. *Journal of Risk*, **4**, 11-27.
- Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk management models. *Journal of Derivatives*, **2**, 73-84.
- Longin, F. M. (2000). From value at risk to stress testing: The extreme value approach. *Journal of Banking & Finance*, **24**, 1097-1130.
- Longin, F. M. (2001). Beyond the VaR. *Journal of Derivatives*, **8**, 36-48.
- Lopez, J. A. (1998). Methods for evaluating value-at-risk estimates. *Economic Policy Review*, **4**, 119-124.
- Park, S. R. and Baek, C. R. (2014). On multivariate GARCH model selection based on risk management. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **25**, 1333-1343.
- Rockafellar, R. T. and Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, **2**, 21-41.
- Rockafellar, R. T. and Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1443-1471.
- Sarykalin, S., Serraino, G. and Uryasev, S. (2008). Value at risk vs. conditional value at risk in risk management and optimization. *Tutorials in Operations Research*, 270-294.
- Topaloglou, N., Vladimirov, H. and Zenios, S. A. (2002). Conditional VaR models with selective hedging for international asset allocation. *Journal of Banking and Finance*, **26**, 1537-1563.
- Yuzhi, C. (2010). Multivariate quantile function models. *Statistica Sinica*, **20**, 481-496.

CTE with weighted portfolios

Chong Sun Hong¹ · Dong Sik Shin² · Jae Young Kim³

¹²³Department of Statistics, Sungkyunkwan University

Received 8 December 2016, revised 18 January 2017, accepted 18 January 2017

Abstract

In many literatures on VaR and CTE for multivariate distribution, these are estimated by using transformed univariate distribution with a specific ratio of many kinds of portfolios. Even though there are lots of works to define quantiles for multivariate distributions, there does not exist a quantile uniquely. Hence, it is not easy to define the VaR and CTE. In this paper, we propose the weighted CTE vectors corresponding to various ratio combinations of many kinds of portfolios by extending the researches on the alternative VaR and integrated multivariate CTE based on multivariate quantiles. We extend relation equations about univariate CTEs to multivariate CTE vectors and discuss their characteristics. The proposed weighted CTEs are explored with some data from multivariate normal distribution and illustrative examples.

Keywords: Correlation, loss, portfolio, quantile, risk, value at risk, weight.

¹ Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Sungkyunkwan University, Seoul 03063, Korea. E-mail: cshong@skku.edu

² Graduate student, Department of Statistics, Sungkyunkwan University, Seoul 03063, Korea.

³ Graduate student, Department of Statistics, Sungkyunkwan University, Seoul 03063, Korea.