韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2017.31.1.85
제 31집 제 1호, 2017. 2. 85-101

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 31, No. 1, Feb. 2017. 85-101

초등학생의 수직선 이해와 사용의 어려움

김 양 권 (솔개초등학교)
홍 진 곤 (건국대학교)†

본 연구는 초등학생들이 수 개념과 관련하여 수직선을 어떻게 이해하고 사용하는지, 또 그 학습의 어려움은 무엇인지 파악하고자 하였다. 이를 위하여 수직선 은유가 수 개념과 어떻게 관련되는지 살펴보았고, 프로이덴탈의 수 개념 지도론에서 수직선의 역할에 대하여 고찰하였다. 실제 초등학생들의 수직선에 대한 이해와 사용의 어려움을 파악하기 위해 실시한 검사는 수직선에 주어진 위치에서 적절한 수를 대응시키는 문항과 학년별로 수직선이 활용되는 관련 단원 내용을 묻는 문항으로 이루어졌다. 같은 내용과 구조의 문항이지만 수직선으로 표현된 것은 해결하지 못하면서 수 트랙이나 다른 그림으로 표현된 것은 해결하는 학생들이 다수 관찰되었고, 본 연구에서는 이러한 현상의 의미를 해석하고자 하였다. 또한 다양한 교수-학습 자료(수 트랙, 그림, 빈 수직선, 이중 수직선등)를 활용하여 수직선 이해의 어려움을 보완하고 관련 수 개념 학습을 돕는 방안을 제안하였다.

Ⅰ. 서론

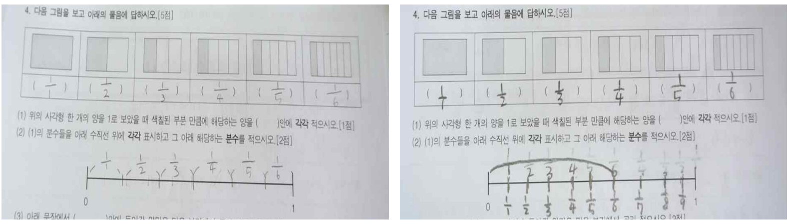
수직선은 수 체계에 대한 좋은 은유이며 수 개념 학습에 유용한 도구이다. Herbst(1997)는 좀 더 정교한 수준에서 수직선은 수 체계의 은유라는 사실에 동의하고 수직선을 0으로부터 특정한 단위 선분 U의 연속적인 배열로 정의하였다. 단위 선분 U는 무한히 많은 방법으로 나누어지고 수직선을 형성한다. 수 체계의 은유로 수직선을 언급할 수 있는 것은 수직선을 직관적으로 파악하기 쉽기 때문에 모든 종류의 수, 즉 자연수, 정수, 유리수, 실수를 수직선 위에 표현할 수 있다.

수직선은 수 체계를 학습하는 교육적인 상황에서 서로 다른 수를 표기하기 위하여 일련의 다른 수직선을 생성하는 것이 가능하다. 자연수 수직선에서 출발하여, 양의 유리수 수직선, 그리고 정수의 수직선, 음의 유리수 수직선, 마지막으로 모든 수를 포함하는 실수의 수직선까지 다루는 상황이 가능한 것이다. 수직선은 수와 수의 표현 방식, 수 사이의 관련성을 이해하고 수의 크기를 비교하거나 연산 절차를 구조화하기에 유용한 수학적 도구이기 때문에, 1학년 2학기 자연수의 연산과 관련하여 처음으로 도입되어, 6학년까지 수와 연산, 측정, 규칙성의 영역에서 다양하게 활용되고 있다.

수직선은 수와 수의 표현 방식, 수 사이의 관련성을 이해하고 수의 크기를 비교하는 데 유용한 수학적 도구임에도 불구하고, 학생들이 수직선을 활용하여 분수나 소수를 표현하거나 이해하는 면에서 많은 어려움을 겪고 있다. 오현근(2014)은 4학년 학생들이 분수의 개념에 대해 어느 정도 알고 있는지 파악하기 위해 전 차시에 배웠던 내용을 바탕으로 분자가 1인 분수를 수직선에 나타내도록 하였다. [그림 Ⅰ-1]과 같이 학생 26명 중 2명을 제외한 나머지 학생들은 그림을 보고 이를 수직선에 제대로 나타내지 못하였다. 이상미(2010)는 초등학교 4, 5, 6학년 학생들의 수직선에 대한 이해를 실태 조사하였다. 수에 대한 이해 정도를 알아보기 위한 문항 중 수 표현

* 접수일(2016년 5월 2일), 심사(수정)일(1차: 2016년 11월 16일, 2차: 2016년 12월 10일), 게재확정일(2017년 1월 4일)
* ZDM 분류 : F42, U22
* MSC2000 분류 : 97U20
* 주제어 : 은유적 개념, 수 개념, 수 체계, 수직선
† 교신저자 : dion@konkuk.ac.kr

에 대한 정답률은 자연수 표현에서 85.2%, 소수 표현에서 82.3%, 수의 범위 표현에서 78.8%로 높은 정답률을 나타냈으나 분수 표현에서는 정답률이 41.6%로 0과 1 사이의 분수를 바르게 나타내지 못하는 학생들이 많았다. 수의 크기 비교에 대한 정답률은 자연수의 크기 비교에서 99.0%, 소수의 크기 비교에서 97.9%, 분수의 크기 비교에서 76.6%, 분수와 소수의 크기 비교에서 78.0%로 자연수와 소수의 정답률이 높은 편이었으나, 분수가 있는 경우의 정답률은 낮은 경향을 나타냈다.



[그림 Ⅰ-1] 분수를 수직선으로 나타내기

홍진곤·김양권(2015)은 수직선의 도입 시기, 도입 내용, 활용 방법의 문제점을 확인하였다. 첫째, 자연수, 유리수와 관련된 여러 개념이 도입되는 시기와 수직선이 활용되는 시기 사이의 불일치를 <표 Ⅰ-1>과 같이 제시하였다. 둘째, 자연수의 덧셈과 뺄셈, 자연수의 나눗셈, 분수의 이해, 몫의 의미와 관련한 분수 학습, 분수의 의미와 관련된 내용, 분수의 덧셈과 뺄셈, 분수의 곱셈과 나눗셈, 소수의 곱셈과 나눗셈의 학습에서도 도입 내용의 문제점이 있었다. 셋째, 수직선의 활용 면에서, 수직선과 함께 다양한 반구체물(사각형, 막대, 띠, 자, 원 등)을 함께 활용하고 있으나, 다양한 형태의 수직선(이중 수직선이나 빈 수직선 등)을 활용하지 않고 단일 수직선만을 활용하고 있었다. 자연수나 유리수와 같은 수 개념의 학습에서 수직선의 도입이나 활용 등에 대한 구체적인 안내나 지도 방법, 효과적인 활용 방법 등이 제시되지 않아서 단원이나 영역, 난이도에 따라 적절하게 활용되지 못하고 있었다.

<표 Ⅰ-1> 자연수와 유리수 학습에서 수직선의 도입 시기

수 개념	의미 및 연산	학습 시기	수직선 도입 시기
자연수	기수와 서수	1학년 1학기 1. 9까지의 수	2학년 2학기 1. 네 자리 수
	덧셈과 뺄셈	1학년 1학기 3. 덧셈과 뺄셈	1학년 2학기 5. 덧셈과 뺄셈(2)
	곱셈	2학년 1학기 6. 곱셈	2학년 1학기 6. 곱셈 6차시
	나눗셈	3학년 1학기 3. 나눗셈	4학년 1학기 2. 곱셈과 나눗셈
유리수	분수의 의미	3학년 1학기 6. 분수	3학년 2학기 4. 분수
	동분모 분수의 덧셈과 뺄셈	4학년 1학기 4. 분수의 덧셈과 뺄셈	4학년 1학기 4. 분수의 덧셈과 뺄셈
	이분모 분수의 덧셈과 뺄셈	5학년 1학기 3. 분수의 덧셈과 뺄셈	수직선 도입하지 않음
	분수의 곱셈	5학년 1학기 4. 분수의 곱셈	수직선 도입하지 않음
	분수의 나눗셈	5학년 2학기 2. 분수의 나눗셈	5학년 2학기 2. 분수의 나눗셈 4차시
	소수의 나눗셈	5학년 2학기 5. 소수의 나눗셈	5학년 2학기 5. 소수의 나눗셈 3차시

수직선과 관련된 연구들이 제한된 범위에서 수직선 이해 실태 및 활용, 초등학교 수학 교과서에서 수직선의 활용과 문제점 등에 그치고 있어서 실제 초등학생들의 수직선의 은유적 개념에 대한 이해 및 수 개념 학습과 수직선의 관계, 수직선 사용에 대한 이해가 어느 정도인지 구체적으로 살펴볼 필요가 있다. 또한 수직선에 대해 낮은 이해를 하는 학생들의 수 개념과 수와 연산의 학습 구조에 대한 이해를 통하여 수 개념을 제대로 이해하고 수 체계를 형성하는데 도움이 되는 연구도 필요하다. 그래서 본 연구에서는 초등학생의 수직선에 대한 이해를 분석하고 수직선 사용의 어려움을 밝히고자 한다.

Ⅱ. 문헌 연구

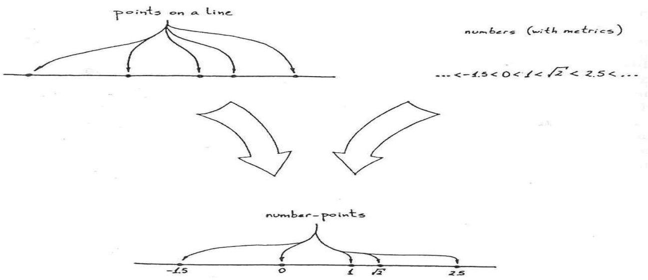
1. 수 개념의 수직선 은유

수는 직선 위의 점이며 0은 원점이고 수의 크기는 거리이며 '보다 크다'는 위(수직방향의 직선에 대하여)에 있거나 오른쪽(수평방향의 직선에 대하여)에 있다는 은유는 유클리드 기하를 산술로 사상한다. 이는 기하와 산술의 영역을 연결하는 은유이다. 흥미로운 것은 이 은유가 은유적 혼합, 은유의 바탕영역과 목표영역의 합성, 즉 수와 수직선 위의 점의 합성에 사용된다는 점이다. 수직선은 이 은유에서 바탕영역(기하)을 목표영역(산술) 위에 겹쳐 놓음으로써 형성된 개념적 혼합이다. 이 혼합은 수-점(number-point), 곧 은유적으로 점인 수이다. 이 혼합은 기하와 산술을 결합하여 목표영역인 산술에 대한 새로운 추론을 가져다준다(Lakoff & Nunez, 2000).

<표 Ⅱ-1> 수는 직선 위의 점이다

바탕영역 직선 위의 점		*목표영역* 수의 모임
선 위의 점 P	→	수 P'
점 O	→	0
점 O의 오른쪽 점 I	→	1
점 Q의 오른쪽 점 P	→	수 P'는 수 Q'보다 크다
점 Q는 점 P의 왼쪽에 있다	→	수 Q'는 수 P'보다 작다
점 P는 점 Q와 같은 위치에 있다	→	수 P'는 수 Q'와 같다
점들은 O의 왼쪽에 있다	→	음수
점 O와 점 P 사이의 거리	→	P'의 절댓값

우리가 초등학교에서 배우는 수직선은 이 은유에서 사용하는 바탕영역과 목표영역의 개념이 합성(수직선 혼합, the Number Line blend)된 것으로, 이 수직선에서는 개체들이 수이면서 동시에 점이다([그림 Ⅱ-1]).



[그림 Ⅱ-1] 수직선 혼합[3]

수직선이 수학적으로 의미 있는 시각적 표현이며, 직관적인 사고의 활용 폭도 넓고, 수직선의 은유적 개념을 통해 수 체계에 대한 이해와 좌표평면의 구성에 큰 도움을 주기도 하지만, 잘못된 사용으로 인한 어려운 점도 고려해야 한다. Doritou(2006)는 수 개념 학습 초기에 도구로서 수직선의 잘못된 사용이 수 체계의 은유로서의 장점을 약화시킬 수도 있고 이어지는 수 체계 지식의 재구성에서 학생들에게 약점이 될 수도 있다고 하였다. 수직선이 수 체계에 대한 좋은 은유이며 수 개념 학습에 유용한 도구이지만, 수 개념이 형성되기 전의 초등학생은 Herbst(1997)가 이야기한 수직선의 은유성과 직관적 완비성을 제대로 이해하기 어렵기 때문이라고 예상할 수 있

3) "수는 수직선 위의 점이다"라는 은유는 수직선 위의 점과 수들의 일치(대응)를 이룬다. 이 은유의 바탕 영역과 목표 영역이 모두 활성화될 때, 그 결과는 개념적인 혼합으로, 이 혼합관계에서는 서로 대응되는 요소들이 하나의 개체, 즉 수-점(number-point)을 형성하게 된다. 그림에서 왼쪽 위는 수직선 위의 점들의 바탕영역을 나타내고, 오른쪽 위는 정렬된 수들의 목표영역을 나타낸다. 이 두 영역의 혼합된 결과는 그 아래에 나타난다.

다. 또한 Gray & Doritou(2008)는 수직선의 의미에 대한 설명을 하지 않고 수직선의 특성을 분명히 하지 않으면 학생은 수직선을 어려워하고 선과 점 사이에 어떤 관계가 있는지에 대한 개념적인 이해가 발달하지는 않는다고 하였다.

2. 프로이덴탈의 수 개념 지도론과 수직선

프로이덴탈(1973)은 수 개념은 단일하게 형성되는 것이 아니며 수 개념을 형성하는 데에는 다양한 방법이 존재한다고 주장하였다. 그는 수 개념을 내용과 형태에 따라 방법론적, 발생적, 교수학적 관점에서 다양하게 살펴보았다. 프로이덴탈의 교수학적, 현상학의 측면에서 수 개념을 다섯 가지 형태로 정리하였다(Gravemeijer, 1994). 이 연구에서는 수 개념 중에서 수직선과 관련이 깊은 개수와 셈수를 중심으로 살펴보고자 한다.

가. 수 개념

셈수는 수를 바로 세거나 거꾸로 세는 등 구두로 수를 셀 때의 수를 말하며, 결과적 세기(resultative counting)[4]과정과는 별도로 발달한다.

개수(numerosity number)는 기수나 양을 나타내는 수와 같은 의미에 등다[5](equipotent)의 개념이 연합된 개념이다. 등다는 집합 사이에 일대일 대응이 존재함을 말하며 반드시 세지 않아도 알 수 있다. 어린 아동의 개수 개념은 셈수와 함께 발달하지 않는 경우가 있다. 즉, 셈수의 개념이 없더라도 개수의 개념을 지니고 있는 아동이 있는 경우이다. 프로이덴탈은 이러한 예로 그의 손자(Bastiaan)가 숟가락 위에 딸기 여섯 개가 놓인 형상과 식탁에 식구들이 둘러앉은 모습을 보고 그 수가 같다고 말할 수 있는 경우와 같다고 설명하였다. 즉, 식탁에 둘러앉은 '할아버지와 할머니', '아버지와 어머니', 그리고 '자신(Bastiaan)과 여동생'을 언급하면서 딸기의 수와 사람의 수가 같음을 설명한 경우라 볼 수 있다.

나. 수와 연산의 학습(나귀수 외, 2002에서 재인용)

앞서 제시된 수의 다양한 측면은 초등학교에서 다루어지는 수와 연산의 개념을 이해하고 비와 비례 학습을 위한 기초를 닦는다는 의미가 있다. RME(Realistic Mathematics Education)에서는 연구를 통하여 위에서 언급한 수의 측면들을 고루 접하도록 교수-학습 과정을 개발하였는데, 그 과정에서 수와 연산의 학습이 자연스러운 연결을 이루고 있다.

수의 개념 측면에서 학습 과정을 구조화한 [그림 Ⅱ-2]에서 알 수 있듯이 수 세기 전략을 개수와 관련짓고 수 구조화하기를 결과적 세기와 주로 관련된 것으로 나타내고 있다(Gravemeijer, 1994). 그러나 세기 전략은 셈수에서 발달하며 개수를 알아야 가능한 것이고 또 결과적 세기와 세기 전략은 발달의 전후 관계를 알 수는 없지만 분명한 관련을 맺고 있으며 이것이 수의 구조화나 덧셈과 뺄셈 절차와 관련되므로 연관성을 분명히 나타낼 필요가 있다. [그림 Ⅱ-2]에서 알 수 있듯이 수의 개념과 각 측면을 고려한 교수-학습은 개별적인 것이 아니라 서로 유기적으로 관계를 맺고 있다. 초등학교 수준의 수 학습에서는 개수와 셈수, 계산수가 밀접히 관련되어 있다. 또한, 덧셈과 뺄셈에서의 계산수의 속성은 고학년에서의 연산과는 달리 계속적인 수 관계의 반성에서 발생해야 한다. 따라서 개수와 셈수의 학습에서 관계적으로 학습해야 한다. 수와 연산의 학습 계열에서 개수의 측면

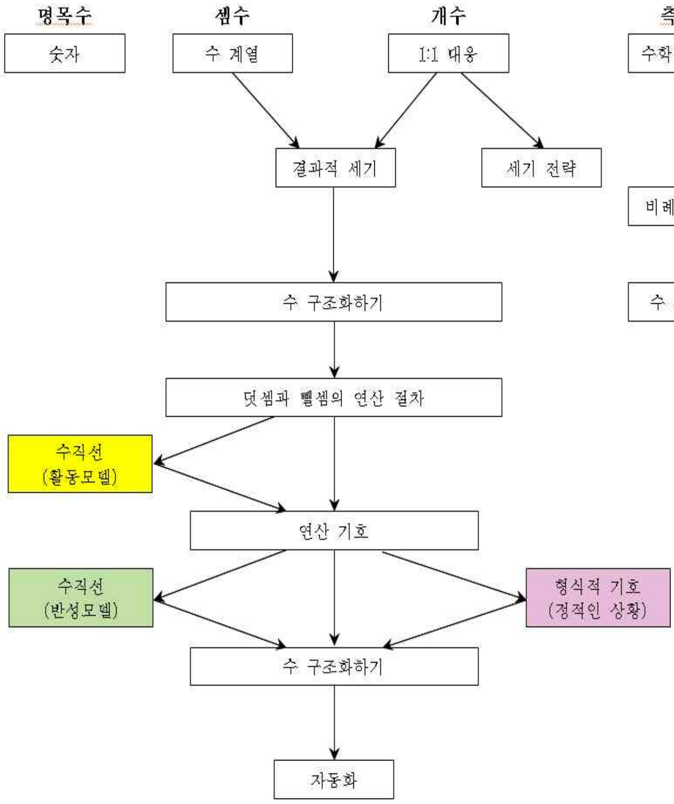
---

4) 결과적 세기는 사물(예: 막대, 공, 사람…)이 몇 개인지를 정하기 위하여 수를 세는 것을 말한다. 결과적 세기는 셈수와 수 발달이 통합된 과정으로, 수 개념들이 서로 관련되어 발달한다는 대표적인 예의 하나이다. 결과적 세기에서는 가산의 대상이 수와 일대일 대응이 되고 마지막 수는 기수로 인식된다.
5) 같은 等, 많을 多로써 '많음이 같다'의 뜻을 표현한 것이다.

은 일대일 대응과 수의 크기를 기본으로 한다. 수 세기(여러 가지 세기 전략, 결과적 세기)와 수 구조화하기 활동을 주로 하며, 수 관계를 탐구하면서 수 개념과 연산 개념이 자연스럽게 연결되어야 한다. 수 세기를 하여 개수를 아는 것은 결과적 세기와 세기 전략을 학습하는 것이며, 수의 구조화하기와 함께 덧셈과 뺄셈 학습의 기본이 된다.

한편, 수 계열은 결과적 세기의 선결 조건으로서 뿐만 아니라 산술 과정에서도 중요하다. 다시 말하면 셈수, 즉, 수 계열의 학습은 결과적 세기, 세기 전략의 발달과 덧셈과 뺄셈 절차에서 중요하다. 프로이덴탈(1973)이 지적하듯이, 아동은 수의 개수적 측면과는 독립적으로 수 계열을 알게 된다. 그러나 셈수의 개념만으로는 수학 학습을 진척할 수 없다. 앞에서도 지적하였듯이 개수 개념을 같이 학습하여야 한다. 셈수 속성의 학습과 이를 수의 연산에 응용하는 대표적인 예가 수직선이다. 수직선을 이용한 학습은 수 계열, 즉, 셈수만을 강조할 우려가 있으나 수 세기 전략에서 잇달아 세기를 하였던 다비도프의 접근법을 사용하게 되면 이를 방지할 수 있다. 즉, 수직선에서 연산할 때 피가수와 피감수 부분을 개수로 인식하여 나타내고 가수와 감수 부분을 잇달아 세기 하거나 거꾸로 세기 하면 된다.

결론적으로 셈수는 결과적 세기의 근거이며 다양한 셈 활동 근거로서, 수 계열이 중요한 위치를 차지하는 연산의 학습에 이용되어야 한다. 셈수의 측면은 덧셈과 뺄셈에서 앞으로(또는 뒤로) 세기의 학습과 수직선 모델로서 중요한 역할을 한다.



[그림 II-2] 수와 연산의 학습 구조

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구는 수 개념 학습에서 수직선을 배우는 초등학생이 수직선에 대한 이해와 사용을 어떻게 어려워하는지 밝히고자 한다. 이를 위하여 경기도의 한 중소도시에 위치한 A초등학교 1학년에서 6학년 학생 171명을 연구 대상으로 선정하였다.

2. 연구 절차

모든 학년에서 수와 연산 영역과 관련된 단원을 학습한 이후의 시기인 2015년 9월에 1, 2차 검사를 차례로 실시하였다. 1차 검사에서는 수직선에 주어진 위치에서 적절한 수를 대응시키는 두 문항[6]을 모든 학년에 공통으로 제시하였고, 학년별로 관련 내용을 수 트랙이나 그림으로 표현하여 문제를 해결하는 문항을 두 문항씩 제시하였다. 2차 검사에서는 학년별로 제시된 문항을 수직선으로 표현하여 제시하였다. 또한 1차 검사에서는 오류를 보였지만 2차 검사에서는 정확하게 해결한 1~6학년 12명과 면담을 실시하였다. 면담 방법은 면담에 참여한 12명의 검사 실시 결과에 대한 배경적 지식, 해결 방법 등에 대한 연구자와 직접 면담을 통해 의견을 듣고 수 트랙과 그림 표현 문제와 수직선 표현 문제의 차이가 나는 현상의 의미를 해석하고자 하였다.

수 개념 학습에서 초등학생이 수직선에 대한 이해와 사용에서 어떤 점을 어려워하는지 파악하기 위한 검사 문항은 다음과 같다.

<표 Ⅲ-1> 수직선 이해와 사용 검사 문항

번호	1차 검사 문항	2차 검사 문항	학년 (인원)	단원
1	1. 수 예상하기(1-6학년) 1. 화살표로 표시된 수를 예상하여 ( ) 안에 써 넣으시오. 0 100 0 100		1~6 (171명)	
2	2. 자연수 표시하기(1-6학년) 2. 수직선 위에 수 92, 41, 13, 5, 76, 2, 8, 24, 98, 95, 87, 59를 화살표로 표시하시오. <92> 0 100 <41> 0 100		1~6 (171명)	
3	3. 37과 50 사이에 수 넣기(1학년) 1. 가 에 알맞은 수를 써 넣으시오. 37 가 50 가: ( )	3. 37과 50 사이에 수 넣기(1학년) 3. □ 안에 알맞은 수를 써 넣으시오. 37 50	1학년 (28명)	50까지의 수
4	4. 뺄셈식 해결하고 표현하기(1학년) 2. □에 들어갈 알맞은 수만큼 ○을 ×로 지우고, □에 들어갈 알맞은 수를 구하시오. $10 - \square = 7$	4. 뺄셈식 해결하고 표현하기(1학년) 4. □에 들어갈 알맞은 수만큼 수직선에 화살표를 그리고, □에 들어갈 알맞은 수를 구하시오. $10 - \square = 7$ 0 10	1학년 (28명)	덧셈과 뺄셈
5	5. 225와 315 사이에 수 넣기(2학년) 1. 가 에 알맞은 수를 써 넣으시오. 225 가 315 가: ( )	5. 225와 315 사이에 수 넣기(2학년) 3. □ 안에 알맞은 수를 써 넣으시오. 225 315	2학년 (29명)	세 자리 수
6	6. 곱셈식 해결하고 표현하기(2학년) 2. 다음 식에 맞게 ○를 묶고, □에 들어갈 알맞은 수를 구하시오. $8 \times \square = 24$ 5 10 15 20 25	6. 곱셈식 해결하고 표현하기(2학년) 4. 다음 식을 수직선에 화살표로 나타내고, □에 들어갈 알맞은 수를 구하시오. $8 \times \square = 24$ 0 5 10 15 20 25	2학년 (29명)	곱셈

6) Doritou, M.(2006)의 연구를 바탕으로 수직선 검사 문항을 수정하여 적용함

7	7. 나눗셈식 해결하고 표현하기(3학년) 1. 다음 식에 맞게 ★를 묶고, □에 들어갈 알맞은 수를 구하시오. 24 ÷ □ = 6	7. 나눗셈식 해결하고 표현하기(3학년) 3. 다음 식을 수직선에 화살표로 나타내고, □에 들어갈 알맞은 수를 구하시오. 24 ÷ □ = 6	3학년(27명)	나눗셈
8	8. 분수의 크기만큼 표현하기(3학년) 2. 다음 왼쪽 분수의 크기만큼 오른쪽 빈 막대에 색칠하시오. $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$	8. 분수의 크기만큼 표현하기(3학년) 4. 다음 왼쪽 분수의 크기만큼 오른쪽 수직선 위에 각각 표시하시오. $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$	3학년(27명)	분수
9	9. 분수의 뺄셈 해결하고 표현하기(4학년) 1. 다음 식을 그림에 나타내고, □에 들어갈 알맞은 수를 구하시오. $4\frac{2}{5} - \square = 1\frac{4}{5}$	9. 분수의 뺄셈 해결하고 표현하기(4학년) 3. 다음 식을 수직선에 화살표로 나타내고, □에 들어갈 알맞은 수를 구하시오. $4\frac{2}{5} - \square = 1\frac{4}{5}$	4학년(30명)	분수의 덧셈과 뺄셈
10	10. 나머지가 있는 나눗셈 해결하고 표현하기(4학년) 2. 다음 나눗셈에 맞게 ★을 ○로 묶고, □ 안에 알맞은 수를 써 넣으시오. 40 ÷ 15 = □ ⋯ □	10. 나머지가 있는 나눗셈 해결하고 표현하기(4학년) 4. 다음 나눗셈을 수직선에 화살표로 표시하고, □ 안에 알맞은 수를 써 넣으시오. 40 ÷ 15 = □ ⋯ □	4학년(30명)	곱셈과 나눗셈
11	11. 두 분수를 표현하고 크기 비교하기(5학년) 1. 다음 두 분수의 크기만큼 오른쪽 빈 막대에 색칠하고, ○ 안에 >, =, <를 알맞게 써 넣으시오. $\frac{3}{4}$ ○ $\frac{4}{5}$	11. 두 분수를 표현하고 크기 비교하기(5학년) 3. 다음 두 분수를 수직선에 나타내고 ○ 안에 >, =, <를 알맞게 써 넣으시오. $\frac{3}{4}$ ○ $\frac{4}{5}$	5학년(30명)	약분과 통분
12	12. 분수의 곱셈 해결하고 표현하기(5학년) 2. 다음 그림에 $\frac{4}{5}$의 $\frac{3}{7}$만큼 색칠하고, □에 들어갈 알맞은 수를 구하시오. $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \square$	12. 분수의 곱셈 해결하고 표현하기(5학년) 4. 다음 식을 수직선에 화살표로 나타내고, □에 들어갈 알맞은 수를 구하시오. $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \square$	5학년(30명)	분수의 곱셈
13	13. 분수의 나눗셈 해결하고 표현하기(6학년) 1. 다음 식을 그림에 나타내고, □에 들어갈 알맞은 수를 구하시오. $4 \div \frac{2}{3} = \square$	13. 분수의 나눗셈 해결하고 표현하기(6학년) 3. 다음 식을 수직선에 화살표로 나타내고, □에 들어갈 알맞은 수를 구하시오. $4 \div \frac{2}{3} = \square$	6학년(27명)	분수의 나눗셈
14	14. 비를 표현하고 비율 구하기(6학년) 2. 다음 비를 그림에 표시하고, 비율을 구하시오. 5 : 9 비율: ( )	14. 비를 표현하고 비율 구하기(6학년) 4. 다음 비를 수직선에 화살표로 나타내고, 비율을 구하시오. 5 : 9 비율: ( )	6학년(27명)	비와 비율

Ⅳ. 연구 결과 및 논의

초등학생이 수직선에 대한 이해와 사용에서 어떤 점을 어려워하는지 파악하기 위해 실시한 검사 결과는 <표 Ⅳ-1>과 같다. 초등학생들의 수직선 이해에 대한 검사는 학년별로 수직선이 사용되는 내용을 묻는 문항으로 이루어졌다. 같은 구조와 내용의 문항이지만 수 트랙이나 그림으로 표현된 것은 해결하면서 수직선으로 표현된 것은 해결하지 못하는 학생들이 다수 관찰되었고, 본 연구에서는 이러한 현상의 의미를 해석하고자 하였다.

<표 Ⅳ-1> 검사 결과

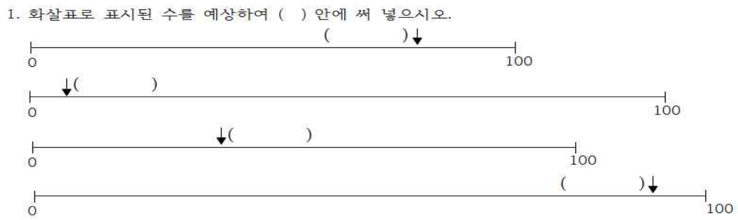
번호	문항	학년(인원)	단원	1차 검사 정답률		2차 검사 정답률
				수식	수 트랙, 그림 표현	수직선 표현
1	화살표로 표시된 수 예상하기	1~6(171명)				
2	수직선에 자연수 표시하기	1~6(171명)				
3	37과 50 사이에 수 넣기	1학년(28명)	50까지의 수		89%	46%
4	뺄셈식 해결하고 표현하기	1학년(28명)	덧셈과 뺄셈	96%	89%	43%
5	225와 315 사이에 수 넣기	2학년(29명)	세 자리 수		79%	66%
6	곱셈식 해결하고 표현하기	2학년(29명)	곱셈	86%	76%	62%
7	나눗셈식 해결하고 표현하기	3학년(27명)	나눗셈	93%	93%	59%
8	분수의 크기만큼 표현하기	3학년(27명)	분수		70%	37%
9	분수의 뺄셈 해결하고 표현하기	4학년(30명)	분수의 덧셈과 뺄셈	65%	70%	40%
10	나머지가 있는 나눗셈 해결하고 표현하기	4학년(30명)	곱셈과 나눗셈	80%	67%	40%
11	두 분수를 표현하고 크기 비교하기	5학년(30명)	약분과 통분	97%	70%	50%
12	분수의 곱셈 해결하고 표현하기	5학년(30명)	분수의 곱셈	83%	43%	40%
13	분수의 나눗셈 해결하고 표현하기	6학년(27명)	분수의 나눗셈	85%	65%	56%
14	비를 표현하고 비율 구하기	6학년(27명)	비와 비율	93%	78%	44%

연구 결과는 <표 Ⅳ-1>의 검사 결과 중에서 수직선에 주어진 위치에서 적절한 수를 대응시키는 문항과 수 트랙이나 그림 표현은 해결하였지만, 수직선 표현은 해결하지 못한 학생들을 중심으로 분석하였다.

1. 수직선에서 수 감각의 변화

가. 화살표로 표시된 수 예상하기

이 문항은 0부터 100까지 기록된 다양한 크기의 수직선에서 화살표가 표시된 지점의 수를 예상하기 위한 문항으로, 초등학생들이 수직선 위의 한 점에 대한 위치를 어떻게 파악하여 자연수를 예상하는지 알아보기 위한 문항이다.

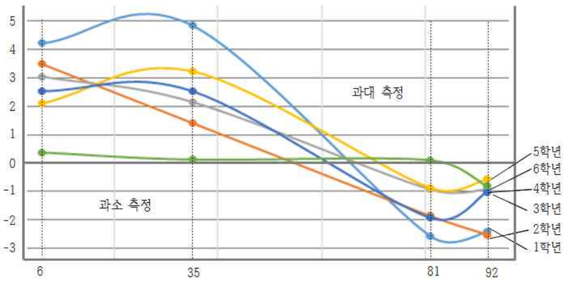


[그림 Ⅳ-1] 화살표로 표시된 수 예상하기

화살표로 표시된 수 예상하기 문항에서 1학년부터 6학년 171명의 학년별 평균은 다음과 같다.

<표 Ⅳ-2> 화살표로 표시된 수 예상하기 학년별 평균

학년	인원	6	35	81	92
1	28명	10.21	39.84	78.43	89.57
2	29명	9.48	36.41	79.14	89.48
3	27명	9.04	37.15	80.07	91.07
4	30명	8.10	38.23	80.12	91.43
5	30명	8.53	37.53	79.07	90.92
6	27명	6.37	35.12	81.10	91.19

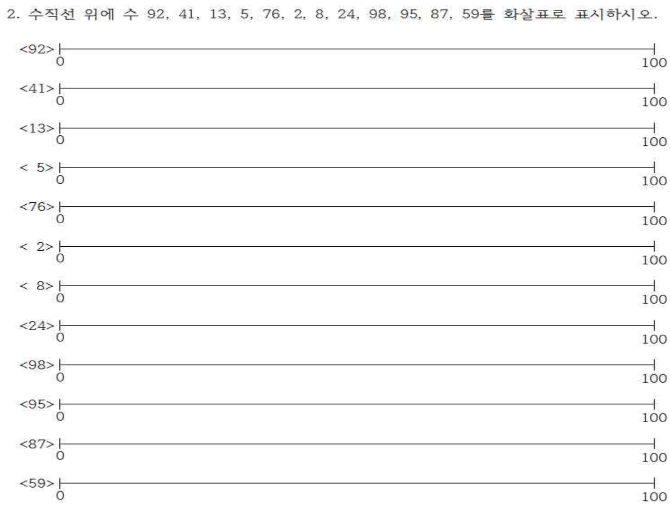


[그림 Ⅳ-2] 화살표로 표시된 수 예상하기 학년별 평균 그래프 비교

학생들은 50이하의 수에서는 과대 예상을 하는 경향이 있고, 50이상의 수에서는 과소 예상하는 경향이 있다. 학생들 중에서 일부는 10단위의 수로 인식하는 경향이 있고, 대체로 학년이 높아질수록 화살표로 표시된 수를 정확하게 예상하였다. 이 문항은 <표 Ⅱ-1>에서 바탕영역인 직선 위의 점이 주어지고 목표영역인 수를 예상하는 문항이다. 저학년 학생들에게 <표 Ⅳ-2>와 같은 경향이 많이 나타나는 것은 '수는 직선 위의 점'이라는 은유를 통한 개념화가 아직 충분히 이루어지지 못하였음을 시사한다. 1학년부터 3학년까지 수와 연산의 학습을 통해 자연수 체계가 어느 정도 완성이 되고, 수직선의 은유적 개념의 이해가 깊어지는 4학년 이상의 학생들은 수 예상하기의 정확성이 늘어남을 알 수 있다.

나. 수직선에 자연수 표시하기

이 문항은 크기가 같은 0부터 100까지 기록된 수직선에 50을 기준으로 서로 대칭이 되는 6쌍 12개의 수를 화살표로 표시하기 위한 문항으로, 수직선에서의 수의 크기를 어떻게 파악하고 있는지 알아보기 위한 문항이다.

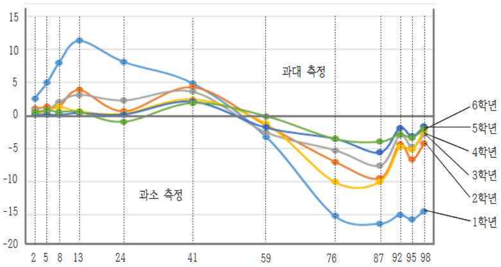


[그림 Ⅳ-3] 수직선에 자연수 표시하기

수직선에 자연수 표시하기 문항에서 1학년부터 6학년 171명의 학년별 평균과 그래프 비교는 다음과 같다.

<표 Ⅳ-3> 수직선에 자연수 표시하기 학년별 평균

학년	인원	2	5	8	13	24	41	59	76	87	92	95	98
1	28명	4.64	9.96	16.04	24.32	32.11	45.86	55.82	60.79	70.64	76.96	79.29	83.57
2	29명	3.03	6.31	9.38	16.86	24.66	45.28	57.55	69.03	77.48	87.62	88.34	93.76
3	27명	2.78	5.74	10.04	16.15	26.30	44.59	56.48	70.78	79.41	89.04	90.26	95.11
4	30명	2.50	5.60	9.33	13.63	24.30	43.47	57.77	65.93	76.57	87.30	89.83	95.67
5	30명	2.13	5.17	8.10	13.40	24.17	43.12	57.18	72.50	81.40	90.13	91.83	96.37
6	27명	2.52	5.78	8.59	13.56	23.07	41.93	58.93	72.48	83.04	89.15	91.67	96.04



[그림 Ⅳ-4] 수직선에 자연수 표시하기 평균 그래프 비교

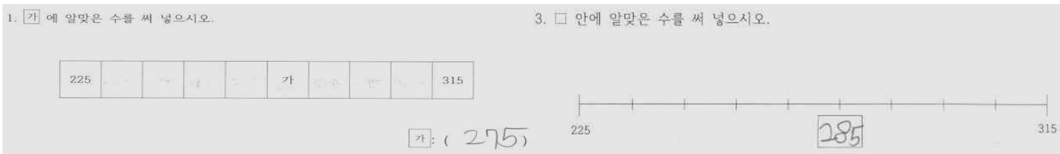
예상의 정확성은 0으로부터 멀어질수록 감소하다 증가하고, 100으로부터 가까워질수록 정확성은 증가하다 감소되었다. 학생들은 50이하의 수에서는 과대 예상을 하는 경향이 있고, 50이상의 수에서는 과소 예상하는 경향이 있다. 절댓값 오류의 분포는 전 학년에 걸쳐 나타나고 있으며, 대체로 학년이 올라갈수록 점점 오류가 줄어든다. 높은 성취도의 학생은 낮은 성취도의 학생보다 예상하는 능력이 양호하였다. 이 문항은 [그림 Ⅳ-1]의 화살표로 표시된 수 예상하기 문항과는 반대로, 목표영역인 수가 주어지고 바탕영역인 직선 위의 점을 예상하고 표시하는 문항이다. 대체로 저학년 학생들에게 <표 Ⅳ-3>과 같은 경향이 많이 나타나는 것은 화살표로 표시된 수 예상하기 문항과 마찬가지로 '수는 직선 위의 점'이라는 은유를 통한 개념화가 아직 충분히 이루어지지 못하였음을 시

사한다. 하지만 자연수 체계가 어느 정도 완성이 되고, 수직선의 은유적 개념의 이해가 깊어지는 4학년 이상의 학생들은 수직선에 자연수 표시하기의 정확성이 늘어남을 알 수 있다.

2. 수직선의 좌표 개념

1학년의 '37과 50 사이에 수 넣기'와 2학년의 '225와 315 사이에 수 넣기' 문항이 수 트랙으로 표현된 경우에는 정확한 수를 말하면서도, 수직선으로 표현된 경우에는 오답을 말하는 학생들이 관찰되었다(1학년 8명, 2학년 8명).

[그림 Ⅳ-5] 37과 50 사이에 수 넣기-13 학생의 사례



[그림 Ⅳ-6] 225와 315 사이의 수 넣기-25 학생의 사례

<에피소드 1>과 같이 수직선의 좌표 개념에 대한 이해가 부족한 학생들이 많이 관찰되었다.

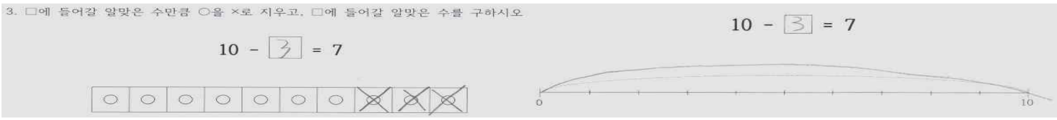
<에피소드 1> 225와 315 사이의 수 넣기(25 학생의 사례)

교사: 225에서 315가 표시된 수직선 문제에서 □안에 들어갈 수를 285로 썼네요. 왜 그렇게 생각하고 썼나요?
25 : 수직선에서 세어 보니 285가 들어가는 것 같았어요.
교사: 그래요. 그런데 수 트랙 문제에서 가에 들어 갈 수로 275를 썼네요. 어떻게 해서 썼나요?
25 : 빈 칸에 10씩 더해서 수들을 써 보니까 가에 들어갈 수가 275인지 알았어요.
교사: 그렇다면 수직선에서도 그렇게 한 칸 마다 10씩 더해서 세어보면 쉽게 찾을 수 있지 않을까요?
25 : (수직선의 칸과 칸 사이에 써야 할지, 한 칸이 구분되는 곳에 써야 할지 위치를 잡지 못하고 고민함)

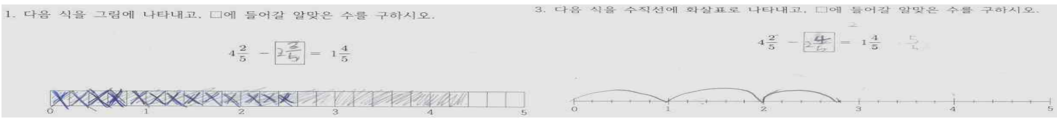
<에피소드 1>의 25학생은 수 트랙 문제에서 빈 칸에 들어 갈 수를 10씩 넣어서 구하였지만, 수직선 문제에서는 수직선의 칸과 칸 사이에 수를 넣어야 할지, 한 칸이 구분되는 곳에 수를 써야 할지 모르고 답을 구하지 못하였다. 이것은 수직선에서 수가 배열되는 위치와 방향 등과 같은 수직선 은유가 의미하는 바를 수 개념과 관련하여 충분히 확립하지 못하고 있음을 확인하였다. 이와 관련된 오류는, 수직선에서 수가 배열되는 위치와 방향 등과 같은 수직선 은유가 의미하는 바를 수 개념과 관련하여 충분히 확립하지 못하고 있음을 보여주며, 특히 '좌표' 개념은 초등학생들에게 쉽게 형성되지 않는다는 것을 확인하게 한다. 은유를 사용한 설명은 이해에 도움이 되기도 하지만, 조절이 불충분하거나 중요한 점을 놓치게 되면 은유가 수학적 사고의 발달에서 '인식론적 장애'의 근원이 될 수도 있음을 확인할 수 있다(우정호, 2013, p.354). 하지만 수 트랙에서는 위치나 좌표 개념을 생각하지 않더라도, 빈 칸에 수를 차례로 기록하면서 수의 순서나 배열을 쉽게 파악할 수 있었다.

3. 수직선을 측정의 도구로 사용하는 문제

1학년의 ‘뺄셈식 해결하고 표현하기’, 2학년의 ‘곱셈식 해결하고 표현하기’, 3학년의 ‘나눗셈식 해결하고 표현하기’, 4학년의 ‘분수의 뺄셈 해결하고 표현하기’, ‘나머지가 있는 나눗셈 해결하고 표현하기’ 문항이 수식이나 그림으로 표현된 경우에는 정확한 수를 말하면서도, 수직선으로 표현된 경우에는 오답을 말하는 학생들이 관찰되었다(1학년 8명, 2학년 13명, 3학년 9명, 4학년 8명, 6명). 그러나 5학년의 ‘분수의 곱셈 해결하고 표현하기’, 6학년의 ‘분수의 나눗셈 해결하고 표현하기’ 문항에서는 분수의 곱셈이나 나눗셈의 의미를 제대로 이해하지 못하기 때문에 수직선 표현이나 그림 표현에서 모두 오답을 말하는 학생들이 많았다.



[그림 Ⅳ-7] 뺄셈식 해결하고 표현하기-14 학생의 사례



[그림 Ⅳ-8] 분수의 뺄셈 해결하고 표현하기-49 학생의 사례

[그림 Ⅳ-9] 나머지가 있는 나눗셈 해결하고 표현하기-410 학생의 사례

<에피소드 2>와 같이 측정의 도구로서 수직선에 대한 이해가 부족한 학생들이 많이 관찰되었다.

<에피소드 2> 나머지가 있는 나눗셈 해결하고 표현하기(410 학생의 사례)

교사: 나눗셈 식을 수직선에 나타내는 문제는 어떻게 해결하였나요?

410: 나눗셈 식을 해결하니까 몫이 2이고 나머지가 10이어서 수직선에 40과 15를 나타내었어요.

교사: 나눗셈 식을 모두 나타내지 않았고 나누어지는 수 40과 나누는 수 15를 나타내었네요. 그럼 나눗셈 식에 맞게 ★를 ○로 묶는 문제에서는 어떻게 해결하였나요?

410: 40개의 ★을 15개씩 ○로 묶으니까 2묶음과 나머지 ★이 10개가 남았습니다.

교사: 수직선에 나타내는 문제와 ★를 ○로 묶는 문제에서 차이가 나네요. 왜 이렇게 차이가 났나요?

410: 제가 수직선에서 나타내는 것을 제대로 이해를 못하고 푼 것 같아요. 그냥 40과 15만 나타내었어요.

교사: 이 문항에서 어떤 점에서 어려웠던 것 같아요?

410: ★를 ○로 묶는 것은 쉽게 하였는데 수직선에는 어떻게 나타내야 하는지 잘 몰랐어요.

<에피소드 2>의 410학생의 경우 40개의 ★을 15개씩 ○로 2묶음과 나머지 ★이 10개인 것을 그림으로 잘 표현하였지만, 수직선에는 15개씩 2묶음과 나머지 10개를 나타내지 못하였다. 4학년 B학생은 나눗셈 식을 해결하거나 그림 표현에서는 잘 나타내지만 수직선 표현에서는 수직선 은유를 제대로 이해하지 못하고 나눗셈의 몫과

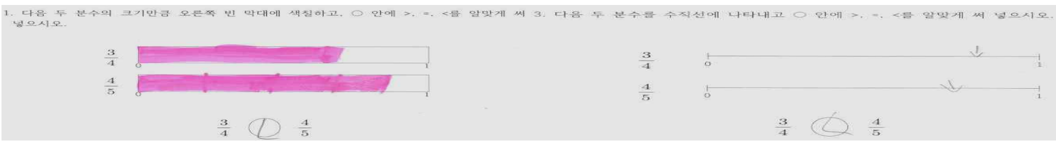
나머지와 같은 양을 제대로 표현하지 못하고 있음을 알 수 있었다.

측정의 도구로서 수직선은 <표 Ⅲ-1>의 바탕영역인 점 O와 점 P 사이의 거리가 목표영역인 수 P'의 절댓값과 합성된 은유적 혼합(즉, 수와 수직선 위의 점의 합성)으로 사용되고 있다. 그러나 학생들은 한 점의 '위치'로 이해한 수 개념으로부터 크기나 길이 등과 같은 양에 대한 측정의 도구를 연결 지을 만큼 수직선 은유를 이해하는데 어려움을 느끼고 있음이 관찰되었다.

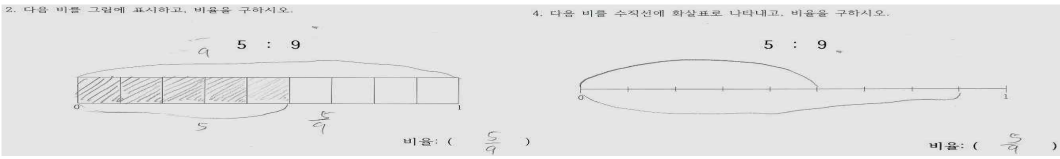
4. 양을 길이로 표현하는 문제

3학년의 '분수의 크기만큼 표현하기', 5학년의 '두 분수를 표현하고 크기 비교하기', 6학년의 '비를 표현하고 비율 구하기' 문항에서 학생들은 분수나 비를 넓이로 분할하는 것은 정확하게 표현하면서도 수직선에 양(분수나 비)을 길이로 제대로 표현하지 못하는 학생들이 관찰되었다(3학년 8명, 5학년 6명, 6학년 9명).

[그림 Ⅳ-10] 분수의 크기만큼 표현하기-38 학생의 사례



[그림 Ⅳ-11] 두 분수 표현하고 크기 비교하기-511 학생의 사례



[그림 Ⅳ-12] 비를 표현하고 비율 구하기-614 학생의 사례

<에피소드 3>과 <에피소드 4>와 같이 수직선에서 양의 길이 표현을 어려워하는 학생들이 많이 관찰되었다.

<에피소드 3> 분수의 크기만큼 표현하기(38 학생의 사례)

교사: 왼쪽 분수의 크기만큼 오른쪽 수직선 위에 왜 이렇게 나타내었어요?

38 : 자로 대략 재어보니 $\frac{1}{1}$이 1칸이어서 이렇게 나타냈어요.

교사: 아, $\frac{1}{1}$은 1칸, $\frac{1}{2}$은 2칸, $\frac{1}{3}$은 3칸이니까 이렇게 표시한 거네요.

38 : 네 맞아요.

교사: 그렇다면 왼쪽 분수의 크기만큼 오른쪽 막대 그림에는 이렇게 색칠하였어요?

38 : $\frac{1}{1}$은 1을 나타내니까 전체를 색칠했고, $\frac{1}{2}$은 절반을 나타내니까 이렇게 그렸고, $\frac{1}{3}$은 3개로 나눈 것 중에서 1개이므로 이렇게 그렸어요.

교사: 그럼 수직선 문제와 막대 그림 문제를 왜 이렇게 다르게 나타내었을까요?

38 : 두 문제가 서로 다른 문제인 것 같아서 다르게 생각했어요. 수직선에 나타내는 것은 자로 재어본 것을 생각해서 1칸, 2칸, 3칸으로 나타내었고, 막대 그림에서는 분수를 생각해서 나타내었어요.

<에피소드 3>의 38학생의 경우 면적에 대한 양감을 가지고 있어서 막대 그림에 분수를 나타내는 것은 쉽게 해결하지만, 수직선에 분수의 크기를 길이로 나타내는 문제에서 분모를 수직선의 길이로 생각하고 표현하였다. 이는 학생들이 수직선의 은유적 개념 이해와 나누기 및 분할에 대한 사고가 부족함을 알 수 있었다.

<에피소드 4> 비와 비율(614 학생의 사례)

교사: 비를 수직선에 어떻게 나타내었습니까?

614: 9개 중에 5개를 나타내었습니다.

교사: 0에서 1까지 몇 칸인 것 같아요?

614: (칸을 세어보며 10칸이 아님을 알고 나서 후회하듯) 9칸입니다.

교사: 왜 9칸을 10칸이라고 생각했나요?

614: 그냥 자가 10칸으로 나눠져서 깊게 생각하지 않은 것 같아요.

<에피소드 4>의 614학생의 경우 빈 막대에 비를 표현하는 문제에서는 9개 중에서 5개를 정확히 표현하였지만, 수직선에 표현하는 문제에서는 수직선의 은유적 개념과 비례적 사고가 부족하여 수직선을 일반적인 자와 같이 9칸을 10칸으로 생각하여 문제를 해결하였다. 많은 학생들이 수직선의 은유적 개념 이해와 길이에 대한 비교, 나누기 및 분할, 비례적 사고가 부족하여 양의 길이 표현을 어려워하지만, 막대그림에서는 길이와는 다르게 면적에 대한 양감을 가지고 있으므로 분수나 비를 넓이로 쉽게 분할하였다. 막대 그림과는 다른 특성을 가지고 있는 수직선의 의미에 대한 개념적인 이해가 이와 같은 오류의 해결을 위해 필요한 것으로 보인다.

Ⅴ. 요약 및 결론

본 연구는 초등학생들이 수 개념과 관련하여 수직선을 어떻게 이해하고 사용하는지, 또 그 학습의 어려움은 무엇인지 파악하고자 하였다. 이를 위하여 수직선 은유가 수 개념과 어떻게 관련되는지 살펴보았고, 프로이덴탈의 수 개념 지도론에서 수직선의 역할에 대하여 고찰하였다. 실제 초등학생들의 수직선에 대한 이해와 사용의 어려움을 파악하기 위해 실시한 검사 결과는 다음과 같다.

첫째, '화살표로 표시된 수 예상하기' 문항이나 '수직선에 자연수 표시하기' 문항에서 예상의 정확성은 고학년이거나 성취도가 높은 학생일수록 점점 오류가 줄어들었다. 높은 성취도의 학생은 낮은 성취도의 학생보다 예상하는 능력이 양호하였다. 대체로 저학년이거나 성취도가 낮은 학생들에게 <표 Ⅳ-2>와 <표 Ⅳ-3>과 같은 경향이 많이 나타나는 것은 '수는 직선 위의 점'이라는 은유를 통한 개념화가 아직 충분히 이루어지지 못하였음을 시사한다. 하지만 자연수 체계가 어느 정도 완성이 되고, 수직선의 은유적 개념의 이해가 깊어지는 4학년 이상의 학생들은 수 예상하기의 정확성이 늘어남을 알 수 있었다.

둘째, 수직선의 좌표 개념에 대한 이해가 부족한 학생들이 많이 관찰되었다. 이와 관련된 오류는, 수직선에서 수가 배열되는 위치와 방향 등과 같은 수직선 은유가 의미하는 바를 수 개념과 관련하여 충분히 확립하지 못하

고 있음을 보여주며, 특히 '좌표' 개념은 초등학생들에게 쉽게 형성되지 않는다는 것을 확인하게 한다. 은유를 사용한 설명은 이해에 도움이 되기도 하지만, 조절이 불충분할 경우 중요한 점을 놓치게 되면 은유가 수학적 사고의 발달에서 '인식론적 장애'의 근원이 될 수도 있음을 확인할 수 있다.

셋째, 측정의 도구로서 수직선에 대한 이해가 부족한 학생들이 많이 관찰되었다. 측정의 도구로서 수직선은 바탕영역인 점 O와 점 P 사이의 거리가 목표영역인 수 P'의 절댓값과 합성된 은유적 혼합(즉, 수와 수직선 위의 점의 합성)으로 사용되고 있다. 그러나 학생들은 한 점의 '위치'로 이해한 수 개념으로부터 크기나 길이 등과 같은 양에 대한 측정의 도구를 연결 지을 만큼 수직선 은유를 이해하는데 어려움을 느끼고 있음이 관찰된다.

넷째, 수직선에서 양의 길이 표현을 어려워하는 학생들이 많이 관찰되었다. 이러한 학생들은 수직선을 자와 같이 생각하여 분수의 크기에 대한 위치 개념을 중심으로 생각하기 보다는 분모를 자의 눈금으로 생각하는 경향이 있었다. 많은 학생들이 수직선의 은유적 개념 이해와 길이에 대한 비교, 나누기 및 분할, 비례적 사고가 부족하여 양의 길이 표현을 어려워하지만, 막대그림에서는 길이와는 다르게 면적에 대한 양감을 가지고 있으므로 분수나 비를 넓이로 쉽게 분할하였다. 막대 그림과는 다른 특성을 가지고 있는 수직선의 의미에 대한 개념적인 이해가 이와 같은 오류의 해결을 위해 필요한 것으로 보인다.

초등학교 저학년 학생들이나 낮은 성취도의 학생들을 관찰한 결과로부터 알 수 있는 점은, 수 개념 학습 초기에 교수-학습 도구로서 수직선의 사용이 정교하게 이루어지지 못할 경우 수 체계의 은유로서의 수직선의 장점을 약화시킬 수도 있고, 학생들이 후속 학습에서 수 체계 지식을 재구성하기 힘들 수 있다는 것이다. 이는 Doritou(2006)의 주장과도 상통하는 점이 있다. 수직선의 의미에 대한 이해가 충분히 이루어지지 않고 수직선의 특성을 분명히 하지 않으면 학생들은 수는 수직선 위의 점이라는 은유에 대해 개념적인 이해가 쉽게 발달하지 않는다.

수직선은 수 체계에 대한 은유이며 수 개념 학습에 유용한 도구이다. 수직선은 바탕영역(기하)을 목표영역(산술) 위에 겹쳐 놓음으로써 형성된 은유적 혼합이다. 이 혼합은 수-점(number-point), 곧 은유적으로 점인 수이다. 이 혼합은 기하와 산술을 결합하여 목표영역인 산술에 대한 새로운 추론을 가져다주며, 수직선의 은유적 개념을 사용하면 훨씬 더 복잡한 은유적 개념인 좌표평면을 구성할 수 있다.

학생들이 수 개념을 이해하고 수 체계를 바르게 형성하기 위해서는 실수 체계와 동형인 수직선을 충분히 이해하고 학습할 필요가 있다. 수직선의 은유적 개념 이해가 깊어질 수 있는 교수-학습 자료(수 트랙, 그림, 빈 수직선, 이중 수직선 등)를 활용한 교수-학습 방법에 관한 연구와 저학년이거나 성취도가 낮은 학생들이 수직선의 은유적 개념과 수 체계를 바르게 이해하기 위하여 수직선의 수준별 접근에 관한 추후 연구의 필요성을 제안하고자 한다.

참 고 문 헌

권성룡 외. (2005). 수학의 힘을 길러주자(Translation of the book by A. J. Baroody, & R. T. Coslick, Fostering Children's Mathematical Power. 1998), 서울: 경문사.

Kwon, S. Y. et al. (2005). *Fostering Children's Mathematical Power*(Translation of the book by A. J. Baroody, & R. T. Coslick, Fostering Children's Mathematical Power. 1998). Seoul: Kyungmoon-Sa.

나귀수 외 (2002). 초등학교 수학과 교수-학습 방법과 자료 개발 연구. 한국교육과정평가원 연구보고 RRC 2002-16.

Na, G. S. et al. (2002). *Development of Mathematics Methods and Materials for Instruction at the Elementary Level.* Research report of Korea Institute for Curriculum and Evalution RRC 2002-16.

박만구 (2000). 수 세기와 수 개념의 발달 유형에 관한 이론. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 4(1), 43-49.

Park, M. G (2000). Counting and the Development of Number Concepts. *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C: Education of Primary School Mathematics* Mar. 4(1), 43-49.

오현근 (2014). 분수의 덧셈과 뺄셈 지도의 효과적인 방법. 경인초등수학연구회 수원지회 6월 세미나 발표자료, 1-5.

Oh, H. G. (2014). *Effective method of teaching addition and subtraction of fractions.* June seminar presentation of Kyungin Elementary Mathematics Research Association Suwon branch, 1-5.

우정호 (2007). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부

Woo, J. H. (2007). *Educational Foundation of the School Mathematics*, Seoul: Seoul National University Press.

우정호 (2013). 수학 학습-지도원리와 방법. 서울: 서울대학교출판부

Woo, J. H. (2013). *Mathematics Learning-Guiding Principles and Methods*, Seoul: Seoul National University Press.

이상미 (2010). 초등학교 4, 5, 6학년 학생들의 수직선 이해 실태 조사. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

Lee, S. M. (2010). *Survey on the Understanding of the Number Line of Fourth, Fifth, and Sixth Graders in Elementary School.* Master's thesis, Korea National University of Education.

이우영・신항균 (2005). 수학사(Translation of the book by Howard Eves, An Introduction, To The History Of Mathematics. 1990). 서울: 경문사.

Lee, W. Y. & Sihn, H. G. (2005). *An Introduction, To The History Of Mathematics*(Translation of the book by Howard Eves, An Introduction, To The History Of Mathematics. 1990). Seoul: Kyungmoon-Sa.

정영옥 (2013). 초등수학에서 자연수 곱셈 지도. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 15(4), 889-920.

Chong, Y. O. (2013). Teaching Multiplication with Whole Numbers in Elementary School Mathematics. *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics School Mathematics,* 15(4), 889-920.

홍진곤・김양권 (2015). 초등학교 수학 교과서의 수직선 활용과 문제점. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 29(3), 353-372

Hong, J. K. & Kim, Y. G. (2015). The utilization and problems of number line in elementary school mathematics textbook, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education,* 29(3), 353-372

Doritou, M. (2006). *Understanding the Number Line: Conception and Practice.* Unpublished PhD., Mathematics Education Research Centre, University of Warwick.

English, L. D. (1997) *Mathematical reasoning analogies, metaphors, and images.* Lawrence Erlbaum & Associates. 권석일 외 역(2009). 수학적 추론과 유추, 은유, 이미지. 서울: 경문사.

Kwon, S. I. et al. (2009). *Mathematical reasoning analogies, metaphors, and images* (translation of the book by English, L. D. Lawrence Erlbaum & Associates, 1997). Seoul: Kyungmoon-Sa.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, The Netherland: D. Reidel Publishing Company.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrect: CD-β Press.

Gray, E. & Doritou, M. (2008). The number line: Ambiguity and interpretation. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 97-104). Morelia, Mexico.

Gullberg, J. (1997). *Mathematics: From the Birth of Numbers*. New York: Norton and Company.

Herbst, P. (1997). The Number-Line Metaphor in the Discourse of a Textbook Series. *For the Learning of Mathematics*, 17(3), 36-45.

Olive, J. (2001). Children's number sequences: An explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational numbers of arithmetic. *The Mathematics Educator*, 11(1), 4-9.

Olive, J. & Steffe, L. P. (1995). *TIMA: Bars* (computer program). Acton, MA: William K. Bradford Publishing Company.

Lakoff, G. & Nunez, R. (2000), *Where mathematics comes from:* How the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books.

Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel & J. Confrey (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. New York: SUNY Press.

Steffe, L. P. & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.

Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J. & Cobb, P. (1983). *Children's counting types: Philosophy, theory, and application*. New York: Praeger.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Difficulty of understanding and using the number line by Elementary school students

Kim, Yang Gwon
Solgae Elementary School, Suji-gu, Yongin, Gyeonggi-do 16937, Korea
E-mail : agsarang@korea.kr

Hong, Jin-Kon †
Konkuk University, Gwangjin-gu, Seoul 05029, Korea
E-mail : dion@konkuk.ac.kr

The purpose of this study is to investigate how elementary school students understand and use the number line relating number concept and what is the main problem in the learning process. For the efficient achievement of this purpose, we investigated how the number line metaphor is related to the number concept and considered the role of the number line on Freudenthal's number concept teaching theory. The test conducted to find the degree of understanding and difficulty on using the number line by actual elementary school students consisted of two questions ; to find appropriate number corresponding to the given number on the number line and to identify contents of chapters about the use of number line on each grade. It was found that many students couldn't solve the problem represented by the number line though they could solve the problem represented by other ways such as number track and pictures. The only difference between the two problems was the way of representation, and they had same contents and structure. This study tried to figure out the meaning of this phenomenon. Also, by using various teaching-learning method (number track, pictures, empty number line, and double number line etc.), this study was aimed to provide the way to help learning 'related number concept' and to solve the difficulty on understanding the number line.

* ZDM Classification : F42, U22
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key Words : metaphorical concepts, numeracy concept, number systems, number line
† Corresponding author