韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2017.31.1.71
제 31집 제 1호, 2017. 2. 71–84

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 31, No. 1, Feb. 2017. 71–84

테일러급수의 이해에 대한 연구

오 혜 영 (인천대학교)

테일러급수는 대학 전공 수학의 여러 개념을 포함하는 복잡한 구조를 가지고 있다. 이 주제는 미적분학, 해석학, 복소해석학 등의 수학뿐만 아니라 물리학, 공학 등 다른 학문에서도 유용성과 응용성을 가진 강력한 도구이다. 그러나 학생들은 이 주제의 수학적 구조를 제대로 이해하는데 어려움을 느낀다. 이에 본 연구에서는 어떻게 학생들이 테일러급수 수렴을 이해하는지를 알기 위해서 학생들의 수학적 특징을 세 유형으로 분류한다. 그 후에 테일러급수 수렴의 구조적 상(image)을 이용해서 테일러급수 수렴에 대한 이해도를 분석하고 이에 대한 결과를 제시하고자 한다.

Ⅰ. 서론

테일러급수는 제임스 그레고리, 이삭 뉴톤, 고프리드 라이프니쯔, 레오나르도 오일러, 조세프 루이스 라그랑주와 같은 수학자와 과학자들에 의해 오래된 역사를 통해 사용되어 왔다(Eves, 1995). 테일러급수는 다항함수를 이용해서 일반 함수에 근사시키는 것이다.

테일러급수의 중요성에 대한 완전한 인식은 오일러가 그것을 미분학에 응용했던 1755년과 라그랑주가 함수론의 기초로서 급수를 사용했던 1797년까지 지연됐다. 뉴턴은 유율에 관한 연구서를 44세였을 때 출판했는데, 그 연구서는 뉴턴의 유율법에 대한 최초의 논리적이고 체계적인 설명이었으며, 미분적분학에 대한 버클리 주교의 비판에 대한 답변으로 쓴 것이었다(Eves, 1995). 미분적분학의 엄밀화를 구체적으로 시도한 최초의 수학자는 라그랑주였는데, 그는 함수를 테일러급수 전개로 표현하는 방법에 근거한 시도는 성공과는 거리가 멀었지만, 테일러급수가 미적분학의 근거를 이루는 기초가 되게 했다(Eves, 1995).

오늘날 테일러급수는 복잡한 함수나 미분방정식을 단순화시키기 위해서 물리학이나 공학에서 널리 사용되고 복소해석학의 기초적인 역할을 한다. 미적분학의 몇 개의 절에서 이미 테일러급수의 내용을 다루지만 테일러급수의 내용이 많이 응용되기 때문에 미분방정식, 해석학, 현대 물리학, 화학이나 공학 같은 응용 과목에서 테일러급수를 다시 다루게 된다.

테일러급수는 함수, 극한, 도함수, 수열과 급수의 개념뿐만 아니라 오차한계, 수렴구간, 수렴반경, 중심 같은 내용을 다룬다. 미분적분학을 배운 학생들은 테일러급수를 이용해서 함수의 근사적 접근이 용이하다. 또 특정한 점에서의 함수를 독립변수, 중심, 차수를 이용하여 표현하게 하고, 라그랑주의 나머지 공식을 이용해서 특정하지 않은 변수의 역할을 인식하게 된다. 그러나 미분적분학을 배운 학생들이 처음 테일러급수를 접하면 여러 개념들로 연결되어 복잡해진 구조에 도전받게 된다. 그러므로 테일러급수 수렴은 학생들에게 많은 어려움을 야기 시킨다. 이에 학생들이 어떻게 테일러급수를 이해하는지를 아는 것은 중요하다. 그리하여 본 연구에서 학생들의 테일러급수 수렴에 내재되어 있는 수학적 구조와 그 구조에 수행된 조작과 관련된 구조적 상(image)을 이용해서 학생들이 무엇을 이해하고 어떻게 테일러급수에 대해서 그런 이해를 하게 되는지를 보여 주고자 한다.

---

* 접수일(2016년 10월 19일), 심사(수정)일(2016년 12월 23일), 게재 확정일(2017년 1월 26일)
* ZDM 분류 : I3
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 테일러급수, 테일러다항함수, 구조적 상, 개념 상, 구조적 이해
* 이 논문은 2016년도 자체연구비 지원에 의하여 연구되었음.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 조작적 및 구조적 이해에 대한 고찰

수학 개념을 대상(object)과 대상 위에서 행해지는 과정의 쌍대로서 인식하는 중요성은 이미 잘 서술되어 있다(Sfard, 1991,1992). Sfard는 수학 개념을 구조적인 관점과 조작적인 관점으로 설명했는데, 구조적(structural) 개념은 "마치 대상적 실체처럼" 수학 개념을 설명하는 것이고, 조작적(operational) 개념은 대상에서 작용하는 조작적 과정으로 설명하는 것이다(Sfard, 1992). Sfard에게 조작적 개념에서 구조적 개념으로의 전환은 과정이 대상으로 보일 때 구체화되어 나타난다. 그러므로 과정은 새롭게 구조화된 대상에서 행해질 수 있다.

Sfard(1992)는 학생들의 개념의 이해가 명백하게 조작적이지도 않고 구조적이지도 않으며, 부분적으로 조작적이고 구조에서 불완전하다고 관찰했다. 지식이 "앞서 전개한 개념의 시스템"으로부터 분리될 때 그런 지식을 사용하는 학생들의 추론은 불완전한 구조적(pseudo structural)이라고 했다(Sfard & Linchevski, 1994). 공식과 기호를 다른 것을 대표하는 것으로 여기지 않고, 그래프와 대수식 사이에 어떤 관계가 없는 것을 대수롭지 않게 여기고, 적당한 시간에 적절한 구조적 해석을 하는데 경직되어 있는 것이 불완전한 구조적 추론의 징후다(Sfard, 1994). 학생들은 개념을 정확히 이해할 때조차도 원래 생각했던 개념 상(concept image)이 지속되어서 두 개의 상(image)이 다른 시간에 나타나서 비교되어지며, 이러한 연결의 부족이 학생들에게 어려움으로 남게 되는 많은 경우를 보게 된다(Alcock, L., 2004). Zandieh(2000)는 불완전한 개념은 어떤 내부 구조가 없는 대상으로 생각된다고 했으며, 그는 비록 현재 상(image)이 떠올려지지 않더라도 더 완전한 개념이 후에 가능할 수 있고, 게다가 완전한 구조를 말하지 않는 것이 더 효율적으로 추론하는데 도움을 줄 수 있으므로 불완전한 개념을 이용해서 추론하는 사람의 생각은 부정적으로 간주되지 말아야 한다고 주장했다.

2. 선행연구

선행연구들은 문제 상황에 따라 학생들이 테일러급수 수렴의 수학적 구조에 내재되어 있는 여러 요소들을 다룬 것을 제시했다. Kidron(2002)은 대수식과 테일러 다항식의 시각적 상(image)과의 관계를 CAS를 이용해서 한 교수실험을 서술하여 더 좋은 근사 다항식일수록 오차는 적어진다는 것을 밝혔다. 게다가 Kidron의 접근은 학생들이 극한과정을 구체화시키도록 설계하였다. 또 테일러 다항식은 대수적이고 수렴의 역동적인 그래프 표현을 배열하면서 무한급수로 구체화 시키도록 했고, 나머지 극한의 구체화의 시도가 있었다. 그러나 테일러급수 수렴의 다른 요소와 관계된 과정/대상의 이해는 발견되지 않았다.

Alcock & Simpson(2004)은 테일러급수에 대한 문제를 풀 때 몇몇 학생들이 힘들어 했다고 서술했다. 그러나 알콕은 많은 학생들이 질문이 뜻하는 것에 대해서 혼동하기 때문에 이 질문에 대한 학생들의 반응은 많이 서술하지 않았다.

Kung and Speer(2010)는 "Do they really get it?"에서 거듭제곱급수 수렴에 관한 학생들의 반응에 대해 서술했고, Martin(2013)는 전문가와 학생들 사이에서의 테일러급수 수렴의 수학적 구조를 비교했다. 김진환(2014)은 예비중등교사를 대상으로 테일러급수의 이해 실태를 조사하고 GeoGebra를 활용한 교수방안을 탐색했다. 임경택 외 3인(2001)와 고효상외 5인(2013)은 테일러급수를 이용한 공학 분야의 논문을 서술했다. 그러나 테일러급수 수렴의 구조적 상(structural image)과 관련된 연구는 아직 많지 않으므로 테일러급수 수렴의 내재되어 있는 구조에 근간이 되는 학생들의 이해를 다루려 한다.

3. 연구체계

이 연구는 Sfard의 조작적이고 구조적인 개념을 택해서 테일러급수의 근본적인 구조적 요소와 그 요소에 작용하는 조작(operation) 과정에 집중함으로써 테일러급수 수렴의 개념 상(concept image)을 서술하는 방법을 이용한다. 개념 상(concept image)(Tall & Vinner, 1981)은 수학의 구조적 요소와 조작적 요소가 관련되어 학생들에게 떠오른 상(image)이다. 본 연구에서 조작적이고 구조적인 요소를 포함하는 상(image)을 테일러급수 수렴의 구조적 상(structural image)으로 언급할 것이다.

근사식의 계산은 함수 f(x)에 더 근접한 새로운 다항함수를 얻기 위해서 많은 항들을 테일러 다항함수에 계속 더하는 과정으로 행해진다. 이 경우에 항들 자체는 현재의 다항함수에 연결된 대상으로 사용된다. 다른 상황에서 테일러 다항함수는 테일러급수가 주어진 함수에 수렴하는 것을 증명하는데 이용된 열 $\left\{P_n^f(x)\right\}$의 일부인 대상으로 여겨질 수 있다. 그러므로 구조적 상(image)은 조작적이거나 구조적인 요소로 구성된 테일러급수 수렴의 여러 요소를 참조할 수 있다.

Carlson & Bloom(2005)은 사실, 정의, 알고리즘, 판에 박힌 문제, 규칙을 선택하는 적절한 지식을 개인이 어려운 문제를 풀 때 사용하는 자원(resource)이라고 설명한다. 또한 학생들은 자원(resource)을 접근하고, 전략을 세우고, 생각을 명확히 하는 문제 푸는 태도를 가져야하므로 자원(resource)의 효율성은 적절한 시간에 적절한 자원(resource)을 접근시키는 조절의 정도에 달려있다고 했다.

본 연구에서는 학생들이 테일러급수 수렴을 어떻게 이해하는지를 알기 위해서 학생들의 수학적 특징을 세 유형으로 분류한 후에 테일러급수 수렴에 내재되어 있는 구조적 상(structural image)을 이용해서 테일러급수 수렴에 대한 수학적 구조를 비교 분석하고 이에 대한 결과를 제시하고자 한다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구대상 및 방법

본교 수학교육과 학생을 대상으로 테일러급수 수렴과 관련된 문제를 풀게 한 후에 테일러급수 수렴에 대한 학생들의 수학적 구조를 분석한다. 학부 2,3학년 학생들 각각 14명씩 28명이 연구대상이고, 이 학생들은 모두 미분적분학을 배웠다. 학부 2학년 학생들은 해석학을 배우고 있으며, 3학년 학생들은 해석학은 이미 배웠고 복소해석학을 배우는 중이다.

다양한 수학적 배경으로부터의 학생들을 대상으로 문제를 푸는 설문조사를 했다. 검사 문항은 전형적인 테일러급수와 관련된 문제이며, W.R.Wade의 해석학과 J.Stewart의 미분적분학과 Martin(2013)의 문제에서 발췌된 문제이다. 설문조사한 구체적인 문제는 다음과 같다.

1. 테일러급수란 무엇인가요?
2. 미분적분학에서 테일러급수를 배우는 이유는 무엇이라 생각하나요?
3. x가 임의의 실수일 때 $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$ 이 성립한다.

여기서 등호의 의미를 말하시오.

4. $-1 < x < 1$일 때 $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ \cdots$ 이 성립한다.

여기서 $-1 < x < 1$의 의미를 말하시오.

5. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} - \cdots$ 이 성립한다. 이 식을 증명하시오.

6. 테일러급수를 이용해서 sine 함수를 측정하는 방법을 말하시오.

7. x가 0 가까이에 있을 때 sine 함수에 대한 테일러 다항함수는 $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$ 이다.

여기서 근사 기호의 의미를 말하시오.

8. 다항식 $x - \dfrac{x^3}{3!}$ 보다 더 좋은 sine 함수의 근사식을 어떻게 얻을 수 있을까요?

9. $f(x) = \log x$ 이고 $n \in \mathbb{N}$ 이라 하자.

(1) 중심 1에서 f에 의해 생성된 n차 테일러 다항함수 $P_n = P_n^{f,1}$을 구하시오.

(2) $x \in [1,2]$일 때 다음이 성립함을 증명하시오.

$$|\log x - P_n(x)| \le \frac{1}{n+1}$$

10. sine 함수의 테일러 다항함수와 테일러급수의 그래프를 같은 좌표 평면에 그리시오.

검사 문항의 1,2번 문제는 테일러급수의 정의와 의미에 관한 문제이고, 3-8번 문제는 기본 문제를 풀 때 구조적 상(image)을 어떻게 사용하는지 파악하는 문제이다. 9번 문제에서는 테일러 다항함수와 나머지 항에 대해서 질문하고, 10번 문제에서는 테일러 다항함수 및 테일러급수의 그래프에 대해서 묻게 된다. 검사를 위한 문제 풀기는 학기 중간에 1시간 동안 실시됐으며 활동지는 제출했다.

본 연구를 위해서 문제 푸는 설문조사 이외에 인터뷰를 시행했다. 인터뷰는 풀었던 문제의 증명이나 일반적인 정의, 근사문제를 말로 설명하게 했다. 인터뷰는 거의 1시간 동안 지속했으며 개인 인터뷰를 학기 중에 실시했다. 분석을 쉽게 하기 위해서 각 인터뷰는 오디오로 녹음하고 기록했으며, 익명성을 유지하기 위해서 학생들의 이름을 적지 않았다.

학생들이 작성한 활동지를 수집하여 자료로 이용했으며, 증명문제에서는 학생들의 특징화를 명확히 하기 위해서 오답과 무응답의 경우도 분류에 반영했다. 3-9번 문제에 대한 전체 학생에 대한 정답자의 비율은 <표 III-1>에 나타냈다. 또한 학생들이 증명하거나 인터뷰하는 과정에서 나타나는 실수와 오류를 정확히 판단하기 위해서 활동지를 꼼꼼히 살펴보았다.

문제		3	4	5	6	7	8	9
정답율	3학년	85.7	85.8	92.9	92.9	100	100	
(%)	2학년	92.9	64.3	78.7	72.4	72.4	57.1	63.2

<표 III-1> 전체 학생에 대한 정답자의 비율

2. 연구대상의 수학적 행동에 따른 분류

구조적 상(image)에 의한 이해 체계는 학부 2,3학년 학생들 간에 수학적 행동의 유형에 따라 다르므로 유형에 따른 이해의 차이를 나타내기 위해 수학적 행동을 다음 두 기준에 따라 학생들의 수학적 특징을 분류한다(Alcock and Simpson(2002a)).

1. 어떤 대상이 핵심적인 수학적 정의의 연장(extension)에 속하는 대상인지를 이해하는가?
2. 말로 설명할 때 적절하게 정의를 사용하는가?

학부 2,3학년 대상 학생들 전체를 위의 분석 기준에 따라 수학적 특징을 세 유형 A,B,C로 분류한 후에 유형별로 수학적 구조를 비교하려고 한다. 수학적 행동의 유형에 따른 특징은 다음과 같다.

2.1. A유형

A유형 학생들은 정의를 불러오고 일반적인 주장에 이것을 이용해서 정확도와 기능을 발전시키는데 어려움이 없다. 정의에 의미를 주고 문제 풀 때 여러 면을 통합하려고 상(image)을 수정하는 노력을 한다. 그리하여 정의와 더 직관적이고 파악하려는 개념의 시각적인 개념 사이의 연결을 이해하게 된다. 이 학생들은 질문을 정확히 파악하고 불일관성을 빨리 인식하고, 어떤 대상이 핵심적인 수학적 정의의 연장(extension)에 속해서 정의와 더불어 맞게 작용하는지 이해한다.

2.2. B유형

B유형 학생들은 어떤 대상이 중요한 수학 정의인지는 알지만, 중요한 정의를 말로 설명할 때 정확하게 설명하지 못하거나 정의 사용을 거의 안하면서 설명한다. 상(image)과 약하게 연결되어 있어 정의를 적절히 설명하지 못하는 경향이 있다. 교재를 이해하는 내적, 직관적인 감각이 있으며, 시각적 상(image)과 수학의 형식적 표현을 통합시키지 못하고 혼란스러워 한다. 직관적이고 비주얼을 기반으로 발전시킨 것만 이해 가능하고, 관계되지 않은 친숙한 것을 사용하여 이미 정당화 되어있는 결과와 분리해서 증명하는 경향이 있다. 그들은 문제 풀이에는 신뢰를 가지나, 정당화 시키는데 적절한 정의를 이용할 수 없다. 또한 형식적인 정의와 증명의 세부사항에 관심 기울이지 않으며 그것들을 이해하고 사용함에 취약하다.

2.3. C유형

C유형 학생들은 형식적인 정의와 개념의 이해가 불일치하며 일반적인 명제를 말로 설명할 때 정의를 사용할 수 없는 유형으로 이 학생들은 주로 시각적 상(image)에 의존한다. 시각적 상(image)으로 이해는 할 수 있지만 신중하게 정의나 증명을 공부하지 않는다. 정의가 불완전하고 여러 정의를 구별하지 못하고 기억하지도 못한다. 형식적 수학 표현의 이해는 피상적 수준이고, 형식적 이론에 해당하는 중심 개념을 이해하지 못하고, 중요한 정의를 사용하지 못하고 해석하지도 못한다. 형식적 작업은 시각적 상(image)에 의존하지만 정의와 증명의 대수적 형태를 내면화하지 못하고, 시각화와 기호 표현을 연결시키지 못한다.

Ⅳ. 연구 결과

구조적 상(image)의 요소는 항, 독립변수, 테일러 다항함수, 함수, 테일러급수 전개, 전개 급수의 꼬리, 나머지를 포함한다. 대상 학생들이 사용한 구조적 상(image)을 구조적 요소와 조작적 요소를 관련 시켜 설명하면 다음과 같다.

·나머지 상(image): 테일러 다항함수와 함수와의 차를 말하며, 나머지를 0으로 접근시키는 극한 과정을 통해서 수렴을 얻는다. 구조적 요소는 테일러 다항함수와 함수이며, 조작적 요소는 나머지 열의 극한이다.

·부분합의 열 상(image): 테일러 다항함수의 열을 말하며, 다항식을 함수로 접근시키는 극한 과정을 통해서 수렴을 얻는다. 구조적 요소는 테일러 다항함수이며, 조작적 요소는 다항함수 열의 극한이다.

·특정한 x 상(image): 독립변수 x에 대입된 특정한 값을 말하며, 구간 전체에서의 수렴이 아니라 x에 특정한

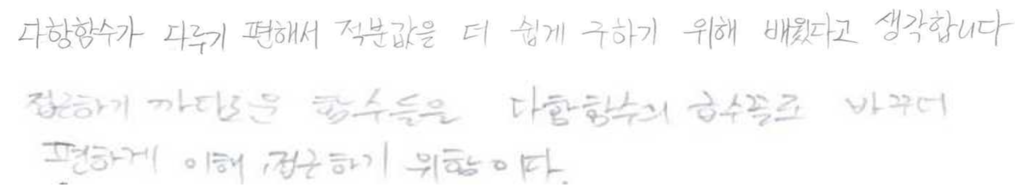
값을 대입하는 과정을 통해서 수렴을 얻는다. 독립변수를 구조적 요소로 생각하고 특정한 값에서 평가된 테일러 다항함수의 극한에서 무엇이 일어나는지 살펴보는 과정이 사용된다.

·역동적인 부분합 상(image): 단일한 다항식을 말하며, 다른 항이 테일러 다항함수에 더해지는 과정을 통해서 수렴을 얻는다. 구조적 요소는 항이며, 근사문제에서 원하는 다항함수를 만들기 위하여 어떤 조건이 성취될 때까지 반복적으로 항들을 더하는 과정이 사용된다.

역동적인 부분합은 6-8번 문제를 풀 때 학생들에게 가장 많이 떠오른 상(image)중의 하나이며, 여러 근사문제에서 학생들이 쉽게 접근할 수 있는 상(image)이다.

3-8번 테일러급수 수렴 문제에 대해 대상 학생들의 활동지를 분석하여 전체 학생에 대한 구조적 상(image)을 이용한 학생들의 비율을 <표 Ⅳ-1>에 제시하였다. 이 통계표는 각 문제에 대해 학생들이 사용한 두 가지 이상의 구조적 상(image)을 허용하여 만들었으며, 테일러급수 수렴의 비형식적이거나 애매한 대답은 통계에 포함시키지 않았다.

학생들은 1,2번 문제에서 테일러급수를 배우는 이유를 다항함수를 이용해서 다루기 어려운 함수의 미분, 적분, 함수의 값을 쉽게 구하기 위함이라고 대부분 대답했는데, 이것은 학생들이 테일러급수에 대한 의미를 잘 알고 있다는 것을 말해준다.



[그림 Ⅳ-1] 테일러급수의 의미에 대한 학생 답의 예시

<표 Ⅳ-1> 전체 학생에 대한 구조적 상(image)을 이용한 학생의 비율(단위%)

문제 / 상	3		4		5		6,7		8	
	3학년	2학년	3학년	2학년	3학년	2학년	3학년	2학년	3학년	2학년
나머지			7.1		21.4	7.1				
부분합의 열	14.2	7.1	7.1	14.2						
특정한 x	50	78.6			21.4	7.1				
부분합	35.7	14.2	71.4	64.3	50	64.3	78.5	64.2	100	50.1
오차							7.1	7.1		7.1
무응답			7.1	21.4		21.4	7.1	28.6		42.9

이제, 앞 절에서 보여준 Alcock and Simpson의 분류의 기준에 따라 학생들의 유형별로 수학적 구조를 비교한다. 여기에서의 분석은 5-8번 문제의 분석이며, 그 이외의 문제들의 비교분석은 오류분석에서 제시한다.

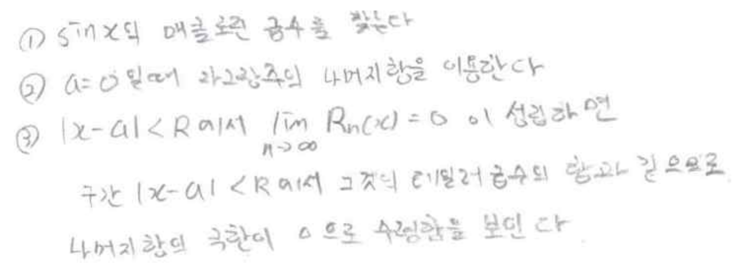
1. 학생들의 유형에 따른 수학적 구조

1.1. A유형 학생들의 문제분석

5번 문제를 풀 때 이 유형에 속하는 학생들은 sine 함수의 테일러급수가 sine 함수와 같다는 것을 증명하기 위해서 다음 전략을 사용했다.

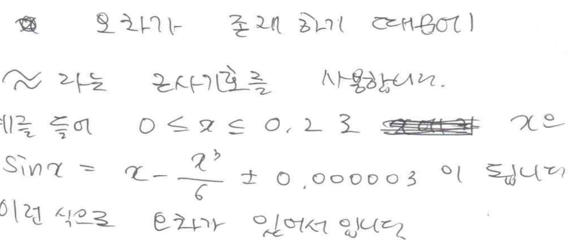
1. 테일러 다항함수의 항들을 찾는 식을 이용하기
2. 수렴구간 구하기
3. 수렴구간에서 테일러 다항함수와 함수 사이의 차(나머지)가 0으로 수렴하는 것을 보이기

5번 문제에서 나머지 상(image)을 이용해서 테일러급수 수렴을 보였으며, 특정한 x상(image)을 테일러급수 수렴과 급수 수렴을 관련시키는 수단으로 사용했다. 테일러급수 수렴을 열의 수렴과 같은 개념과 연결시키는 학생은 간혹 있었다. 테일러급수 수렴을 열의 수렴과 연결시키지 않은 학생들은 문제 해결을 위해 나머지 상(image)을 떠올렸으며, 나머지 상(image)을 떠올린 학생은 3학년 학생들의 21.4%이며, 2학년 학생들의 7.1%였다.



[그림 IV-2] 5번에 대한 학생 답의 예시

6,7번 문제를 풀 때 대부분의 학생들은 부분합 상(image), 특정한 x상(image), 오차 한계를 이용했다. 오차를 이용한 학생들의 비율은 2학년, 3학년 각각 7.1%였다. 이 유형의 대부분의 학생들은 오차한계를 근사의 전략으로 생각하여 x의 범위에 의해 만들어진 오차까지 제시하여 근사를 설명하기도 했다. 6,7번 문제에서는 학생들이 부분합 상(image)을 많이 사용했으나, 오차한계를 정확도로 연결시키는 학생은 없었다.



[그림 IV-3] 근사 기호에 대한 학생 답의 예시

8번 문제에 대한 대답으로 A,B유형 학생들 모두 테일러 다항함수에 더 많은 항을 더한다고 했다. 많은 학생들이 부분합과 오차를 자원(resource)으로 접근했으며, 특히 부분합 상(image)을 많이 사용했다.

3,5번 수렴을 증명하는 문제에서 3학년 학생들의 경우에 3번 문제에서 특정한 x상(image)을 증명의 수단으로 사용한 비율이 50%였다가 5번 문제에서 그 비율이 21.4%로 줄면서 나머지 상(image)을 사용한 비율이 0%에서 21.4%로 바뀌었다. A유형의 학생들은 수렴을 명확히 설명하고, 증명하는 문제에 전략을 세우는데 부분합과 나머지의 구조적 상(image)을 체계적으로 사용했다. 3,5번 증명문제에서 비록 어떤 특정한 x상(image)을 먼저 사용

했다 할지라도 나중에 나머지 상(image)으로 바꾼 것은 그들이 관심을 적절한 문제 상황에 집중시킬 줄 안다는 것을 말한다.

이 유형 학생들은 테일러급수 수렴의 여러 상(image)의 이해를 명확히 하고, 문제에 대한 적절한 전략을 제시하도록 상(image)들을 의미 있게 이용했다. 이것은 그들이 수렴의 이해 상태를 설명할 때, 또 테일러급수 수렴을 증명할 때 나타났으며, 그들은 테일러급수 수렴, 급수수렴, 열의 수렴과 관련시키는 경향이 있었다.

1.2. B유형 학생들의 문제분석

3번 문제에서 어떤 학생은 특정한 x상(image)을 전략적으로 이용했다. 특정한 x에 값을 대입하여 모든 점에서 함수가 급수와 같다고 언급했다. 구체적인 예시를 증명이라고 생각했으며, 테일러급수 수렴의 증명과는 연결시키지 못했다. 그 학생들의 비율은 3학년 학생의 50%였다. 통상적인 같다는 의미로 받아들인 학생도 있었으나 열의 수렴과 관련시키지 못했다.

5번 문제에서 A유형의 학생들은 특정한 x상(image)을 테일러급수 수렴과 급수 수렴을 관련시키는 수단으로 사용했지만, B유형의 학생들은 테일러급수 수렴을 급수 수렴과 연결시키지 못하고 테일러급수의 독립변수 x에 특정한 수치를 대입하여 등식이 성립한다는 증명 방법을 택했다. 3학년 학생의 21.4%는 특정한 x상(image)을 이용했으며 이 문제를 증명할 때 나머지식이 0으로 수렴함을 보이지 않고, 공식을 이용하여 테일러 다항함수의 합으로만 나타낸 학생은 전체의 57.1%였다. 또한 테일러급수전개에서 나머지를 “뒤에 따라오는 꼬리”라고 말하는 학생도 있었다.

대부분의 학생들은 체계적으로 추론하지 않고, 많은 문제에 어떤 구조적인 상(image)을 고정시켜서 그 상(image)을 이용했다. 예를 들면, 이 유형의 학생들은 증명 전략의 한 부분으로 특정한 x상(image)을 가장 많이 사용했다. 즉, 한 상(image)을 이용하여 비록 그것이 모든 문제에 적합하지 않더라도 그 상(image)을 거의 모든 문제 푸는 데 사용했다. 또한, 그들은 5번 문제에서 부분합과 나머지 같은 구조적 상(image)을 같이 사용하지 못함으로써 수학 구조의 체계성 부족을 나타냈다.

6-8번 문제에서는 무응답자 28%(2학년의 경우)를 제외하고는 대부분 부분합 상(image)을 이용했다. 부분합에 많은 항들을 더함으로써 정확하게 만들 수 있다고 답했는데, 근사의 맥락에서 테일러급수를 잘 이해하고 있었다.

부분합, 특정한 x상(image) 같은 구조적 상(image)은 테일러 다항함수 전개식에서 바로 이용 가능하므로 표면수준(surface level)(Kozma & Russel, 1997)이라고 생각할 수 있다. 꼬리 상(image) 같은 나머지는 테일러 다항함수 전개에서 나온 반면에 나머지와 부분합의 열같은 구조적 상들은 근사함수와 다항함수의 조직화, 또는 테일러 다항함수의 열을 포함하므로 표면수준보다 더 심화된 상(deep image)으로 생각한다. 이 유형의 학생들은 심화된 상(image)을 선택한 비율은 낮고 표면수준의 상(image)을 선택한 비율은 높은데, 이것은 학생들이 심화된 상(image)에 접근하기 어려움을 말해 준다.

표면수준(surface level)의 구조적 상, 상(image)의 고착화, 적절한 시간에 상(image)들 사이에서 움직임의 불변, 그래프와 연결되지 않은 식의 사용은 이 유형에서 나타나는 학생들의 불완전한 추론의 징조이다(Sfard). 이 유형의 학생들에게 떠오른 개념 상(concept image)은 많지 않았으며 수렴의 개념을 불완전하게 이해하고 상(image)들이 잘 연결되어있지 않다. 이런 형태의 불완전한 추론은 테일러급수 수렴에 대하여 엄격하게 추론하는 능력을 방해할 수 있다(Zandieh 2000).

1.3. C유형 학생들의 문제분석

이 유형의 학생들은 1-3번 문제는 대답했지만 4-8번 문제에서 거의 무응답으로 일관하고 있다. 이것은 이 유형의 학생들이 문제 푸는 동안 결코 어떤 상(image)이 떠오르지 않았다는 것을 말해 준다. 3번 문제에서 이 유형의 어떤 학생은 테일러급수 수렴을 증명하는 전략의 한 부분으로 특정한 x, 나머지 상(image)을 포함시키지

못하고 어떤 것이 매우 가깝다는 애매한 개념으로 답했다. 6-8번 근사 문제에서는 테일러급수에 구체적인 세부 사항 없이 비형식적인 근사 형태의 대답을 하고 있다. 형식적 기호를 사용하지 않고 증명하기 위해서 정의를 도입하지 않는데, 이것은 논리를 정당화하는데 충분하지 않음을 말해준다. 5번 문제의 경우에는 중심 0 근처에만 집중하여 전체를 보지 못하고 있다.

이들에게 떠오른 개념 상(concept image)은 극히 제한적이어서 증명 전략으로 특정한 x상(image)을 주로 사용한다. 비록 그것이 모든 문제에 적합하지 않더라도 그 상(image)을 거의 모든 문제 푸는 데 사용하고 있다. 또 그들은 직관적이고 시각적인 상(image)에 집중해서 결론을 말하고, 시각적 상(image)에 바탕을 둔 이해와 수학의 형식적 표현 사이에서 연결의 부족을 나타낸다.

2. 오류분석

본 절에서는 학생들의 유형에 관계없이 학생들이 혼동하고 있는 수렴 문제 3,5번과 근사 문제 7번을 비교하고, 4,9,10번을 심층 분석 및 수학 표현에 나타난 오류에 대해 서술한다.

2.1. 3,5번과 7번 문제간의 비교분석

2학년 학생의 경우 7번 문제에서 오답율이 28.6%이지만 3번 문제와는 달리 오답자가 전부 무응답자이다. 이들을 제외한 나머지 학생들은 7번 문제에 대해 정답을 말했다. 이들은 x가 중심 0에 가까이 있을 때 sine 함수가 sine의 테일러 다항함수 $P_n^f(x)$와 비슷하다고 했다.

2학년 학생의 경우 3번 문제에서는 등호의 의미를 근사로 대답하거나 중심 0 근처에서만 성립한다고 대답한 학생이 14.3%로 7번 근사 문제와의 차이를 인지하지 못하고 있다. 이들은 7번 문제처럼 3번 문제도 x가 중심 0에 가까이 있을 때만 f(x)에 근사하는 근사함수로 생각하여 등호의 의미를 근사로 말한다. 이들은 수렴구간에 속하는 모든 x에 대해서 어떤 n차 다항함수가 함수 f(x)에 수렴하는 등호의 의미를 인식하지 못하고 있다. 즉, 3번과 5번 문제는 모든 실수 x에 대해서 테일러급수가 함수 f(x)에 수렴하는데 이것을 제대로 이해하지 못하고, 중심 0 근방에서만 테일러급수가 함수 f(x)에 수렴하는 것으로 이해했다.

테일러 다항함수가 f(x)에 근사함을 보일 때 중심 근처에서의 그래프 몇 개를 학생들에게 제시하게 된다. 학생들은 n차 다항함수의 차수가 커질수록 주어진 함수의 그래프와 가까워지는 것을 보는데, 그 그래프가 중심 근방에만 집중되어 있고, 그 상(image)이 고정되어 있어서 함수 전체의 그래프로 상(image)을 확장시키는데 어려움을 느낀다. 학생들은 그 상(image)이 중심 근처에 고착화 되어 있어 실수 전체의 상(image)으로 유연하게 전환되지 않는 것이다. 학생들은 한 상(image)을 이용하여 비록 그것이 모든 문제에 적합하지 않더라도 그 상(image)을 거의 모든 문제 푸는 데 사용했다. 이미 한 상(image)이 떠오른 경우에는 다양한 상(image)을 이용하지 못했다.

2.2. 4번 문제 분석

4번 문제에서 수렴구간의 의미를 알고 있는 학생들은 3학년 85.8%, 2학년 64.3%인데 2학년 학생들의 경우는 등식의 우변에서 첫째 항이 1이고 공비가 x인 무한등비급수로 생각하여 무한등비급수가 구간 $-1<x<1$에서 수렴한다는 사실을 이용한 학생이 28.6%이었다. 2학년 학생들은 많은 해석학 지식이 없으므로 이전 지식을 이용하는 것을 수월하게 생각했다. 그들은 테일러급수의 개념은 약하게 정립되어 있었으나 테일러급수 수렴과 급수수렴을 관련시켜 이해하는 경향이 있다.

어떤 학생은 함수가 구간 $-1<x<1$에서 테일러급수에 근사한다고 대답하여 3,5번과 마찬가지로 수렴 개념과

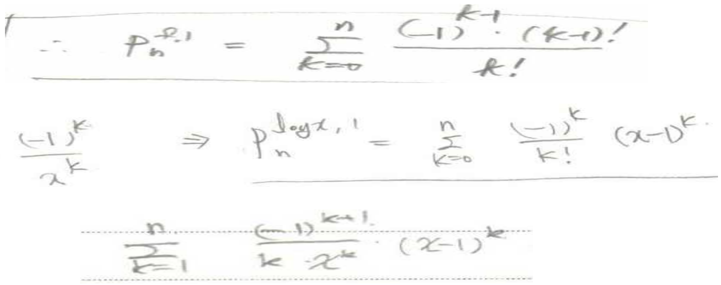
혼동하고 있음을 알 수 있다. 이 문제에서는 부분합 상(image)을 이용한 학생들이 가장 많았는데 3학년은 71.4% 2학년은 64.3%였다.

2.3. 9번 문제 분석

9번 문제는 현재 해석학을 배우고 있는 학부 2학년 학생만이 대상자이다. 9번의 오답을 살펴보면 잘못된 수학 표현과 실수의 오답이 가장 많았다. $\sum$를 사용할 때 첨자가 불일치하며, x에 1을 대입을 하지 않은 경우가 있었다. 9번의 (1)에서 거듭제곱항을 쓰지 않거나 분자 대신에 분모에 쓰는 일이 있었다. 또한 n계도함수를 구하지 못하거나 계산 틀린 학생이 몇몇 있었다.

9번의 (2)의 나머지 항에서는 n+1계 도함수를 빠뜨리거나 잘못 계산, n+1 대신에 n이라 썼으며, 나머지항이 함수와 n째 항까지의 합과의 차가 아니라 n-1째 항까지의 합과의 차로 혼동하기도 했다. c는 중심(x=1)과 x 사이에 속하는데, c를 중심(x=1) 또는 x로 잘못 적용, x 대신에 c로 쓰기도 하고, 중심을 잘못 알고 테일러급수로 전개한 학생도 있었다. 이와 같은 오류는 독립변수 x, 중심, 나머지 항의 개념이 완전하지 않아 적용하는데 문제가 있음을 말해준다.

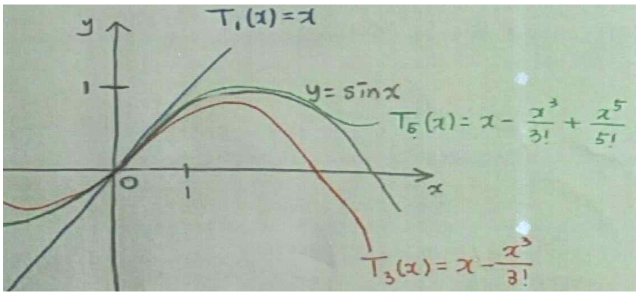
증명 과정의 전체를 살펴보지 않고 단지 기호나 부호를 적용한 계산방식이 수학적인 추론과 이해를 증진시키는 효과적인 방법은 아니라 할지라도 몇몇 학생들이 위와 같은 오류를 갖는 것은 불완전한 구조적 개념을 가짐을 말해준다.



[그림 Ⅳ-4] 테일러다항함수 표현의 오류

2.4. 10번 문제 분석

10번 문제에서 대상 학생들에게 sin x 그래프가 주어졌을 때 sine 함수의 테일러 다항함수를 그리도록 했다. A유형의 학생들의 sin x의 다항함수의 그래프는 중심에 가까울수록 점점 더 정확해졌으며, 다항함수의 차수가 커질수록 sin x의 그래프를 추적하는 다항함수의 그래프를 볼 수 있었다. 중심 근처의 구간에서 sin x를 잘 근사시킨 다항함수를 그렸지만, 중심에서 멀어질수록 차수가 큰 다항함수의 그래프를 그리는 것은 힘들어했다.



[그림 Ⅳ-5] sin x와 테일러 다항함수의 그래프

학생들 중 몇몇은 테일러 다항함수의 그래프를 이용하면 테일러급수의 개념을 이해하기 쉽다고 말했다. 그러나 테일러 다항함수의 그래프를 그리는 시도조차 못하는 학생이 있었는데, 그것은 차수의 구체적 언급 없이 테일러 다항함수를 그리라고 한 것이 학생들에게 혼란을 주었기 때문이다. 또 어떤 학생은 테일러 다항함수의 그래프가 sin x의 그래프와 같다고 생각하여 sin x의 그래프만 그렸는데, 이것은 테일러 다항함수와 테일러급수를 혼동하고 있음을 말한다. 학생의 80%는 그래프를 그렸지만, 학생 스스로 그래프를 그리는 데 어려움을 느낀 학생도 있었다.

그래프로 테일러급수를 설명했을 때 쉽게 이해했던 학생이 테일러 다항함수의 그래프를 그릴 수 없는 것은 테일러 다항함수의 이해가 불완전하여 그래프와 대수적 표현을 연결시키지 못하는 것이다. 시각적 상(image)에 바탕을 둔 이해와 수학의 형식적 표현 사이의 연결이 부족함을 나타내고, 시각화에 강한 의존성을 가진 학생들이 그래프에서 관계식을 세우는 능력이 부족하여 시각적 상(image)에서 형식적 작업의 전환이 어려움을 나타낸다.

Ⅴ. 결론

테일러급수와 거듭제곱급수는 최근에 부상한 수학 연구의 주제이다. 본 연구에서 테일러급수 수렴의 개념상(concept image)을 서술했는데, 구조적인 요소와 조작은 구조적 상(image)을 구성한다. 학생들은 항, 부분합, 나머지(remainder) 같은 구조적 상(image)은 이용하고, 부분합의 열(sequence) 같은 구조적 상(image)은 이용하지 않음으로써 불완전한 구조적 상(image)을 가짐을 보여주었다.

학생들이 테일러급수 수렴을 어떻게 이해하는지에 대한 활동지를 풀게 했는데 몇몇 학생들은 문제 푸는데 어려움이 있었고, 그들의 테일러급수 수렴에 대한 이해도가 좋지 않았다. 기호나 부호를 사용한 수학식 표현뿐만 아니라 근사 문제와 수렴 문제의 차이, 수렴 구간에 대한 해석에서 학생들은 혼란을 겪었다.

테일러급수 수렴의 구조적 상(image)을 이용해서 학부 2,3학년 대상 학생들과 A,B,C 유형의 학생들 분석 결과 2학년 학생들은 3학년 학생들보다 그래프 묘사, 구조적 상(image)의 적절한 선택에서 부족함을 나타냈고, A,B,C 유형 간에는 다음과 같은 차이점이 있었다.

A유형의 학생들은 수렴의 이해 상태를 설명할 때나 테일러급수 수렴을 증명할 때 여러 상(image)의 이해를 명확히 했으며, 문제에 대한 적절한 전략을 제시하도록 상(image)들을 의미 있게 이용했다. 비록 어떤 특정한 x 상(image)을 사용했다 할지라도 문제의 상황에 맞춰 나머지 상(image)으로 바꾸어 그들의 관심을 적절한 문제 상황에 집중시킬 줄 알았다. 또 테일러급수 수렴, 급수수렴, 열의 수렴과 관련시키는 경향이 있었다.

B유형의 학생들은 표면수준(surface level)의 구조적 상을 이용했고, 상(image)이 고착화되고, 적절한 시간에

상(image)들 사이에서 움직임이 불변했으며, 그래프와 연결되지 않은 식을 사용했다. 학생들에게 떠오른 개념 상(concept image)은 많지 않고, 수렴의 개념을 불완전하게 이해하고 상(image)들이 잘 연결되어 있지 않아서 테일러급수 수렴에 대하여 엄격하게 추론하는 능력이 부족하다.

C유형의 학생들은 특정한 x상(image)을 가장 많이 사용했다. 한 상(image)을 이용하여 비록 그것이 모든 문제에 적합하지 않더라도 그 상(image)을 거의 모든 문제 푸는 데 사용했다. 또 그들은 직관적이고 시각적인 상(image)에 집중해서 결론을 말하고, 시각적 상(image)과 수학의 형식적 표현 사이에서 연결의 부족을 나타낸다.

특히 B,C 유형 학생들은 수렴의 개념을 불완전하게 이해했으며, 일반적인 증명보다는 특정한 x상을 이용해서 구체적인 예시를 통한 증명방법을 택했다. 또 상(image)들이 잘 연결되어 있지 않아서 테일러급수 수렴에 대하여 엄격하게 추론하는 능력을 방해했다.

이 연구를 통해 몇몇 학생의 경우 일부의 그래프 상(image)이 고착화가 되어 전체를 보는데 장애가 되어 테일러급수 수렴을 명확하게 이해하지 못하는 것으로 나타났다. 이런 학생들에게는 테일러 다항함수가 수렴함을 보이기 위해서 컴퓨터를 이용한 수치적인 근사 접근법을 통한 급수 개념 지도의 다양성을 꾀하는 교수법이 필요하다. 그래프 전체를 볼 수 있는 MATLAB이나 Mathematica 같은 소프트웨어의 사용은 학생들에게 직관적인 요소를 보완하여 쉽게 이해하고, 대수적 표현을 그래프 해석과 연결시키는데 도움을 주리라 기대되므로 이에 대한 계속적인 연구가 필요하다. 또한, 심화된 상(deep image)이 존재하는 경우의 추론에 많은 학생들의 이해도를 높이기 위해서 교수는 학생들의 오류와 오해를 깨달아야만 하고(Bezuidenhout, 2001), 구체적인 수학 개념을 해석하는데 더 많은 시간을 할애해야 하고(Vinner, 1992), 학생들이 빠뜨리는 경향이 있는 지식을 명확히 할 수 있도록 수업내용을 잘 설계해야 한다.

본 연구를 토대로 추후 극한이나 함수와 관련된 더 많은 문제를 제시하여 테일러급수 수렴의 연구를 좀 더 광범위하게 하는 후속 연구가 필요하다. 또한, 학생들의 수업과 반응을 꾸준히 추적하고 관찰하여 테일러급수와 관련된 수학적 지식을 확장하도록 연구자들의 지속적인 관심과 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

고효상・김두웅・김준혁・김철환・김슬기・김응상 (2013). 테일러급수를 이용한 전기 자동차 충전 대수 예측. 대한전기학회 전력기술부분회 추계학술대회 논문집.

Go, H. S., Kim, D. U., Kim, J. H., Kim, C. H., Kim, S. K., Kim, E. S.(2013). The prediction of electric vehicle charging load using Taylor series. *Journal of electrical engineering and technology.*

김진환 (2014). 테일러급수 수렴에 대한 예비중등교사의 이해실태와 GeoGebra를 활용한 교수방안 탐색. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 16(2), pp.317-334.

Kim, J. H.(2014). Exploring teaching way using GeoGebra based on pre-service secondary teachers' understanding-realities for Tayor series convergence conceptions. *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics <School Mathematics>*, 16(2), 317-334.

임경택・조태호・백종검・김시유 (2001). CMOS 그라운드 연결망에서 발생하는 최대 동시 스위칭 잡음의 테일러급수 모형의 분석. 대한전자공학회 하계종합학술대회 논문집, 24(1)

Im, K. T., Cho, T. H., Baek, J. H., Kim, S. Y.(2001). Taylor's series model analysis of maximum simultaneous switching noise for ground interconnection networks in CMOS systems. *Journal of the institute of electronics and information engineers*, 24(1).

허민・오혜영역. Howard Eves (1995). 수학의 위대한 순간들. 서울: 경문사.

Howard Eves , Her, M., Oh, H. Y.(1995). *Great Moments in Mathematics*. Seoul: Kyungmoon Co.

Alcock, L.,& Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 1-32.

Alcock, L.,& Simpson, A. (2002a). *Two components in learning to reason using definitions'.* Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, Hersonisoss, Greece, www.math.uoc.gr/~ictm2/

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32, 487-500.

Carlson, M.,& Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 45-75.

Kidron, I., & Zehavi, N.(2002). The role of animation in teaching the limit concept. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 9(3), 205-227.

Kozma, R., & Russell, J.(1997). Multimedia and understanding: Expert and novice responses to different representations of chemical phenomena. *Journal of Research in Science Teaching*, 34(9), 949-968.

Kung. D., & Speer. N.(2010). *Do they really get it? Evaluating evidence of student understanding of power series*. In Proceedings of the Thirteenth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. Raleigh. NC; North Carolina State University.

Martin. J., & Oehrtman. M.(2010). *Strong metaphors for the concept of convergence of Taylor series*. In Proceedings of the Thirteenth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. Raleigh, NC: North Carolina State University.

Martin. J.(2013). *Differences between experts' and students' conceptual images of the mathematical strucrure of Taylor series convergence*. Edu Stud Math.

Sfard, A.(1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

Sfard, A.(1992). *Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-The case of function.* In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy MAA Notes (Vol. 25, pp. 59-84). Washington. DC: Mathematical Association of America.

Sfard, A., & Linchevski, L.(1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies In Mathematics*, 26(2/3), 191-228.

Stewart, J.(2008). Calculus. (6thed.).Belmont: Brooks Cole.

Tall, D., & Vinner, S.(1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169

Vinner, S.(1992). *The function concept as a prototype for problems in mathematics learning*. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy(pp. 195-213). Washington, DC: Mathematical Association of America.

W.R. Wade(2010). *An introduction to analysis*. Pearson Education, Inc.

Zandieh, M.(2000). *A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative*. Research in Collegiate Mathematics Education IV. 8, 103-126.

A study on understanding of Taylor series

Oh, Hye-Young
Department of Mathematics Education, Incheon National University, Incheon 406-740, Korea
E-mail : hyoh@inu.ac.kr

Taylor series has a complicated structure comprising of various concepts in college major mathematics. This subject is a strong tool which has usefulness and applications not only in calculus, analysis, and complex analysis but also in physics, engineering etc., and other study. However, students have difficulties in understanding mathematical structure of Taylor series convergence correctly.

In this study, after classifying students' mathematical characteristic into three categories, we use structural image of Taylor series convergence which associated with mathematical structure and operation acted on that structure. Thus, we try to analyze the understanding of Taylor series convergence and present the results of this study.

* ZDM Classification : I3
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words :Taylor series, Taylor polynomial, structural image, concept image, structural understanding
* This work was supported by the University Research Grant in 2016.