

스위칭 제어 기법을 이용한 볼-빔 시스템의 제어

Control of a Ball and Beam System using Switching Control Method

이 경 태* · 정 민 길* · 최 호 림†
(Kyung-Tae Lee · Min-Gil Jeong · Ho-Lim Choi)

Abstract - We propose a switching control scheme for the control of a ball and beam system. It was reported in [4] that a ball and beam system is a nonlinear system which has an ill-defined relative degree. So, the traditional control approaches have been mostly either Jacobian-based control or approximate input-output linearized control in nature. In this paper, motivated by [7], we combine these two traditional control approaches and operate each controller via a pre-designed switching logic so that the improved control result can be obtained without any excessive use of control input. Switching algorithm is developed based on both analysis and actual experimental observation. We verify the effectiveness of our proposed controller via actual experimental results.

Key Words : Ball and beam system, Jacobian linearization, Input-output feedback linearization, Switching control

1. 서 론

볼-빔 시스템(ball and beam system)은 모터와 빔이 연결되어 모터의 입력전압을 통해 모터의 각을 조절하고 다시 빔의 각도를 조절시킴으로써 빔을 따라 움직이는 쇠공이 목표로 하는 곳의 위치로 가도록 하는 시스템이다. 볼-빔 시스템은 그 자체에 비선형적인 특성을 가지고 있기 때문에 제어하기 복잡할 뿐만 아니라 약간의 외부요인으로 쇠공의 위치가 다채롭게 변하기 때문에 매우 정밀한 제어가 필요한 시스템이다.

일반적으로 비선형 미분방정식에 대한 해를 구하기가 쉽지 않을 뿐만 아니라, 해의 존재성이나 안정성 등을 분석하는 것도 매우 어렵다. 따라서 비선형 시스템은 선형시스템과는 달리 해석하기가 쉽지 않고, 이 시스템에 대한 제어기를 직접 설계하는 과정도 상당히 까다롭고 어려운 문제이다. 이러한 특성을 가지고 있기 때문에 볼-빔 시스템을 제어하기 위한 비선형 제어기 설계법에 대해서 지금까지 많은 연구가 진행되어 왔으며 [4], [6] 볼-빔 시스템을 나타내는 식은 비선형 방정식으로 주어지기 때문에 선형화 기법을 통해 근사된 식을 이용하면 제어기를 설계하는데 있어서 용이하다 [2], [3], [5]. 또한, [7], [8], [10]에서는 설계한 제어기의 성능을 개선하기 위해 스위칭 제어 기법을 이용한 연구도 진행되었다. 즉, 두 개 이상의 제어기를 설계하고 각각의 설계된 제어기를 알고리즘에 따라서 효과적으로

적용하면 각각의 제어기에서 얻는 성능보다 향상된 성능을 얻을 수 있다는 것이다. 한편, [7]에서는 자코비안 및 입-출력 궤환 선형화 기법을 자기부상시스템에 적용한 뒤, 결과를 바탕으로 국소영역에서 작동하는 자코비안 선형화 기반 제어기와 전대역에서 작동하는 입-출력 궤환 선형화 기반 제어기를 스위칭 제어 기법을 이용하여 더욱 개선된 성능의 제어기를 제안했다는 점을 착안하여 볼-빔 시스템에 적용을 해 보았다. 따라서, 본 논문에서는 Quanser사의 볼-빔 시스템에 자코비안 선형화와 입-출력 궤환 선형화 기법을 적용하여 각각의 제어기를 설계한 다음 스위칭 제어 기법을 이용하여 제어기의 성능을 더욱 향상시켰다.

두 가지 선형화에 기반한 제어기를 실험에 적용하여 결과를 바탕으로 두 제어기의 장단점을 확인하였고, 시스템의 출력 y 와 모터의 입력전압 u 를 비교하였다. 자코비안 선형화 기반 제어기는 특이점 문제가 없어 모든 상태에 대해서 작동되어 정상상태 오차는 발생하지 않았으며, 오버슈트와 모터의 입력전압은 작다는 장점과 정상상태 응답은 느린 단점을 확인하였으며, 입-출력 궤환 선형화 기반 제어기는 특이점 문제가 있기 때문에 국소영역에서 작동되어 약간의 정상상태 오차와 함께 오버슈트와 모터의 입력전압은 크다는 단점과, 정상상태 응답은 빠른 장점을 확인할 수 있었다. 이에 따라 두 제어기의 장점만을 이용하기 위해 스위칭 제어 기법을 이용하여 자코비안 및 입-출력 궤환 선형화를 기반한 제어기보다 더욱 개선된 성능의 제어기를 제안하였고, 실험을 통해 정상상태 오차는 발생하지 않았으며, 정상상태 응답은 빨라졌고, 오버슈트는 감소 되었으며, 모터의 입력전압은 입-출력 궤환 선형화 기반 제어기 보다는 작고, 자코비안 선형화 기반 제어기와는 거의 차이가 없는 개선된 성능을 입증하였다.

† Corresponding Author : Dept. of Electrical Engineering, Dong-A University, Korea.
E-mail: hlchoi@dau.ac.kr

* Dept. of Electrical Engineering, Dong-A University, Korea.
Received : September 9, 2016; Accepted : December 9, 2016

2. 볼-빔 시스템 모델링 및 두 가지 선형화에 기반한 제어기 설계

2.1 볼-빔 시스템 모델링

Fig. 1, 2는 본 논문에서 다루는 Quanser사의 볼-빔 시스템의 장비 구성과 시스템을 도식적으로 나타낸 것이고, 시스템의 동역학 방정식은 식 (1)과 같다[9].

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= K_{bb} \sin\theta \\ \ddot{\theta} &= -\frac{1}{\tau} \dot{\theta} + \frac{K}{\tau} V_m \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 K_{bb} 는 시스템의 모델 이득값, x 는 쇄공의 위치, θ 는 모터의 각도, K 는 정상상태 이득값, g 는 중력가속도, J_b 는 관성 모멘트, V_m 은 입력전압, τ 는 시정수이다. K_{bb} 값은 시스템의 모델 이득값으로 다음과 같이 정리할 수 있다[6].

$$K_{bb} = \frac{m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{beam} (m_b r_b^2 + J_b)} \quad (2)$$



그림 1 볼-빔 시스템
Fig. 1 Ball and beam system

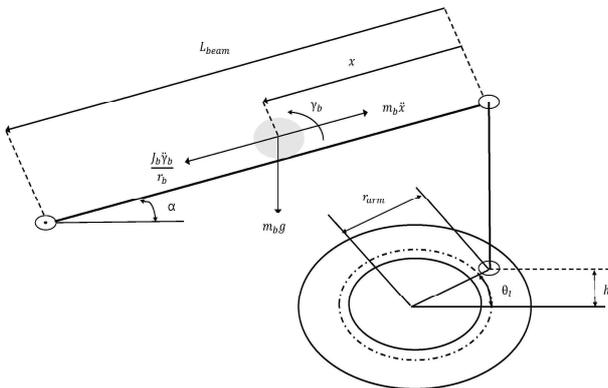


그림 2 볼-빔 시스템의 개략도
Fig. 2 Schematic of ball and beam system

표 1 볼-빔 시스템의 사양

Table 1 Specifications of ball and beam system

Parameter	Description	Value
	Mass of ball beam module	0.65 Kg
	Calibration base length	50 cm
	Calibration base depth	22.5 cm
L_{beam}	Beam length	42.55 cm
	Lever arm length	12.0 cm
r_{arm}	Distance between SRV02 output gear shaft and coupled joint	2.54 cm
	Support arm length	16.0 cm
r_b	Radius of ball	1.27 cm
m_b	Mass of ball	0.064 Kg
K_{bs}	Ball position sensor sensitivity	-4.25 cm/V
V_{bias}	Ball position sensor bias power	±12 V
V_{range}	Ball position sensor measurement range	±5 V

표 1은 Quanser사의 볼-빔 시스템의 사양을 나타낸 것이다[9]. 이제 식 (1)을 상태방정식 형태로 나타내기 위해 상태변수와 입력변수를 식 (3)과 같이 설정하면 [6]

$$\begin{aligned} x &= x_1, & \theta &= x_3, & V_m &= u \\ \dot{x} &= \dot{x}_1 = x_2, & \dot{\theta} &= \dot{x}_3 = x_4 \\ \ddot{x} &= \ddot{x}_2 & \ddot{\theta} &= \ddot{x}_4 \end{aligned} \quad (3)$$

상태방정식은 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= K_{bb} \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{1}{\tau} x_4 + \frac{K}{\tau} u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (4)$$

$K_{bb} = 41.8 \text{ cm/rad} \cdot \text{s}^2$, $\tau = 0.0211 \text{ s}$, $K = 1.53 \text{ rad/V} \cdot \text{s}$ 이고, 초기조건은 $x_1(0) = -18 \text{ cm}$, $x_2(0) = 0 \text{ cm/s}$, $x_3(0) = -0.9774 \text{ rad}$, $x_4(0) = 0 \text{ rad/s}$ 이다. 여기서 빔의 중점과 쇄공의 반지름을 차감하여 쇄공의 초기조건을 -18 cm 로 설정하게 되었으며, 모터의 각도는 쇄공의 질량에 의해 -0.9774 rad 으로 초기조건을 설정하게 되었다.

2.2 자코비안 선형화 기반 제어기

자코비안 선형화(Jacobian linearization)는 시스템을 근사화하고자 할 때 많이 사용되며, 식을 편미분하기 때문에 함수의 변화를 자체가 미소해야 근사값의 신뢰도가 높아지는 선형화 기법이다[1].

$y = x_1$ 을 만족하는 평형점 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})$ 과 정상상태 입력

u_0 를 구하면 $x_{10} = x_{b0}$, $x_{20} = 0$, $x_{30} = 0$, $x_{40} = 0$, $u_0 = 0$ 이다. 상태방정식 (4)를 위 평형점에서 자코비안 선형화로 근사시키면 식 (5)를 구할 수 있다.

$$\dot{\delta x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \end{bmatrix}}_A \delta x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix}}_B \delta u \quad (5)$$

여기서, $\delta x = [x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}, x_3 - x_{30}, x_4 - x_{40}]^T$, $\delta u = u - u_0$, $\delta y = \delta x_1 = x_1 - x_{10}$ 이다.

2.2.1 상태궤환 제어기

근사된 식 (5)를 이용하여 극배치 기법에 기반한 제어기 설계를 위해, 식 (5)의 A 와 B 를 이용하여 A_K 즉, $A_K = A + BK(K = [k_1, k_2, k_3, k_4])$ 가 Hurwitz가 되는 제어기의 이득값을 구한다.

$$A_K = A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{\tau}k_1 & \frac{K}{\tau}k_2 & \frac{K}{\tau}k_3 & \frac{K}{\tau}k_4 - \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \quad (6)$$

임의의 극점이 $-2.1, -2.6, -3.1, -3.6$ 이라고 하면, 제어기의 이득값은 $k_1 = -2.0103, k_2 = -2.9375, k_3 = -0.6635, k_4 = 0.4964$ 이다. 식 (5)에서 $\delta u = u - u_0$ 이므로 $u = \delta u + u_0 = K\delta x + u_0$ 이다. 따라서 제어기 식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

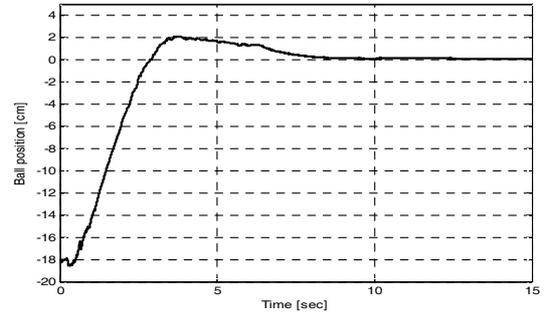
$$u = k_1(x_1 - x_{10}) + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 + u_0 \quad (7)$$

2.2.2 실험 결과

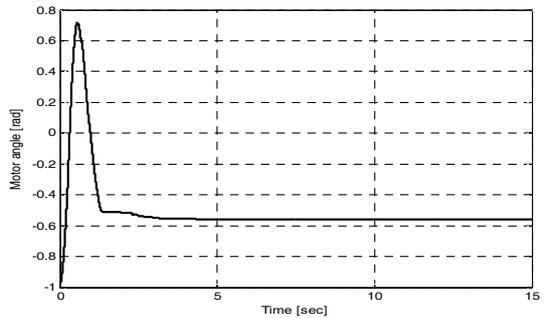
Fig. 3은 자코비안 선형화 기반 제어기의 실험 결과에서 쇄공의 위치 x_1 , 모터의 각 x_3 , 모터의 입력전압 u 를 나타낸 것이며, 쇄공의 속도 x_2 와 모터의 각속도 x_4 는 측정할 수 없어 미분기를 사용하였다.

본 논문에서 다루는 모든 제어기의 실험 결과에서 모터 입력 전압의 과도응답 비교를 위해 응답시간을 7초로 설정하였다.

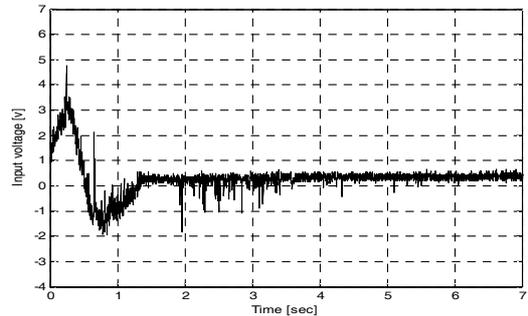
관찰 1: 자코비안 선형화 기법을 적용한 제어기는 식 (7)을 보면 분모에 상태변수가 없어 모든 상태에 대해서 특이점이 없기 때문에 로컬 영역에서는 그 성능이 안정하다는 것이 증명되어 있으므로 실험 결과를 관찰하면 자코비안 선형화를 기반한 제어기는 모든 영역에서 작동되어 약간의 오버슈트가 발생하였고, 정상 상태 응답이 느린 것을 볼 수 있으며, 모터의 입력전압은 작다는 것을 확인할 수 있다.



(a) 쇄공의 위치



(b) 모터의 각



(c) 모터의 입력전압

그림 3 자코비안 선형화 기반 제어기의 실험 결과

Fig. 3 Experimental results of Jacobian linearization based controller

Remark 1: 본 논문에서 나타난 모든 실험 결과에서 쇄공의 위치 x_1 과 모터의 각 x_3 는 초기 조건에서 약간 벗어났는데, 이는 쇄공의 위치와 모터의 각을 감지하는 센서가 외란과 측정잡음에 의해 약간의 오류가 발생하여 오차가 발생하게 되었다.

2.3 입-출력 궤환 선형화 기반 제어기

입-출력 궤환 선형화(Input-output feedback linearization)는 비선형 시스템에 상태 궤환을 가하여 궤환 시스템이 선형의 특성을 갖도록 하는 선형화 기법이다[1]. $y = x_1 = z_1$, $z_2 = \dot{x}_1 = x_2$, $z_3 = \dot{x}_2 = K_{bb} \sin x_3$, $z_4 = K_{bb} x_4 \cos x_3$ 라고 하면, 상

태방정식 (4)를 입-출력 궤환 선형화를 통해 다음과 같이 변환식을 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -x_4^2 \sin x_3 K_{bb} - \frac{1}{\tau} x_4 K_{bb} \cos x_3 + \frac{K}{\tau} K_{bb} \cos x_3 u \\ &= -x_4^2 \sin x_3 K_{bb} - \frac{\cos x_3}{\tau} (x_4 K_{bb} - K K_{bb} u) \end{aligned} \quad (8)$$

2.3.1 상태궤환 제어기

식 (8)에서 $\alpha(x)$ 와 $\beta(x)$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= -x_4^2 \sin x_3 K_{bb} - \frac{1}{\tau} x_4 K_{bb} \cos x_3 \\ \beta(x) &= \frac{K}{\tau} K_{bb} \cos x_3 \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)를 이용하여 u 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\beta(x)} (-\alpha(x) + v) \\ &= \frac{\tau}{K K_{bb} \cos x_3} (x_4^2 \sin x_3 K_{bb} + \frac{1}{\tau} x_4 K_{bb} \cos x_3 + v) \\ &= \frac{\pi x_4^2 \sin x_3}{K \cos x_3} + \frac{x_4}{K} + \frac{\tau}{K K_{bb} \cos x_3} v \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)을 식 (8)의 u 에 대입하면 다음과 같이 v 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} -x_4^2 \sin x_3 K_{bb} - \frac{1}{\tau} x_4 K_{bb} \cos x_3 + \\ \frac{K}{\tau} K_{bb} \cos x_3 \left(\frac{\pi x_4^2 \sin x_3}{K \cos x_3} + \frac{x_4}{K} + \frac{\tau}{K K_{bb} \cos x_3} v \right) = v \end{aligned} \quad (11)$$

따라서, 식 (8)에 식 (11)을 적용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= v \end{aligned} \quad (12)$$

시스템의 출력은 y 이며, 제어 목표인 x_{b0} 는 시스템의 안정성을 고려하여 $x_{b0} = 0$ 으로 설정하였다. 따라서, $y - x_{b0} = z_1 - x_{b0} = 0$ 이 되어야 한다. $e_1 = z_1 - x_{b0}$, $e_2 = z_2$, $e_3 = z_3$, $e_4 = z_4$ 라고 하면 식 (12)는 식 (13)이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{z}_1 = z_2 = e_2 \\ \dot{e}_2 &= \dot{z}_2 = z_3 = e_3 \\ \dot{e}_3 &= \dot{z}_3 = z_4 = e_4 \\ \dot{e}_4 &= \dot{z}_4 = v \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A e + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B v \quad (14)$$

여기서 $e = [e_1, e_2, e_3, e_4]^T$ 이다.

근사된 식 (14)를 이용하여 극배치 기법에 기반한 제어기 설계를 위해, 식 (14)의 A 와 B 를 이용하여 A_K 행렬이 Hurwitz가 되는 제어기의 이득값을 구한다.

$$A_K = A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

앞과 같이 동일하게 임의의 극점이 $-2.1, -2.6, -3.1, -3.6$ 이라고 하면, 이득값은 $k_1 = -60.9336, k_2 = -89.0340, k_3 = -48.1100, k_4 = -11.4000$ 이다. 식 (13)에 의해 v 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} v &= K e \\ &= k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 + k_4 e_4 \\ &= k_1 (z_1 - x_{b0}) + k_2 z_2 + k_3 z_3 + k_4 z_4 \end{aligned} \quad (16)$$

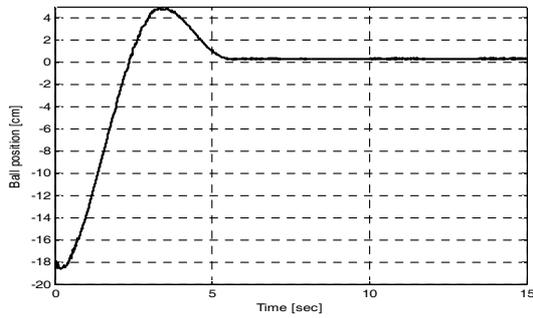
식 (10)의 v 에 식 (16)을 적용하면 제어기 식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{\pi x_4^2 \sin x_3}{K \cos x_3} + \frac{x_4}{K} + \frac{\tau}{K K_{bb} \cos x_3} v \\ &= \frac{\pi x_4^2 \sin x_3}{K \cos x_3} + \frac{x_4}{K} + \frac{\tau}{K K_{bb} \cos x_3} (k_1 (z_1 - x_{b0}) + k_2 z_2 + k_3 z_3 + k_4 z_4) \end{aligned} \quad (17)$$

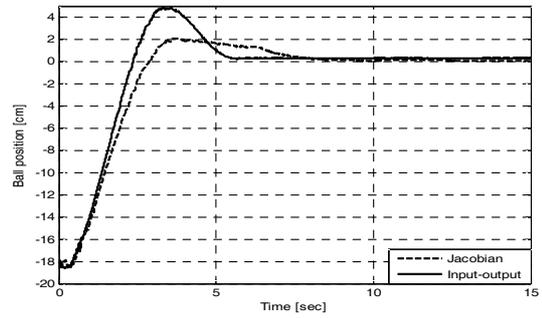
2.3.2 실험 결과

Fig. 4는 입-출력 궤환 선형화 기반 제어기의 실험 결과에서 쇠공의 위치 x_1 , 모터의 각 x_3 , 모터의 입력전압 u 를 나타낸 것이며, 쇠공의 속도 x_2 와 모터의 각속도 x_4 는 측정할 수 없어 미분기를 사용하였다.

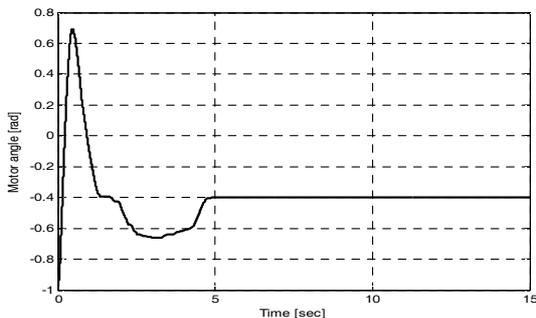
관찰 2: 입-출력 궤환 선형화를 적용한 제어기는 식 (17)을 보면 분모에 x_3 라는 상태변수가 있어 특이점 문제가 있기 때문에 실험 결과를 관찰하면 입-출력 궤환 선형화를 기반한 제어기는 국소영역에서 작동되어 약간의 정상상태 오차가 발생하였고, 오버슈트와 모터의 입력전압은 커졌으며, 자코비안 선형화를 기반한 제어기보다 정상상태 응답이 상대적으로 빠른 것을 확인할 수 있다.



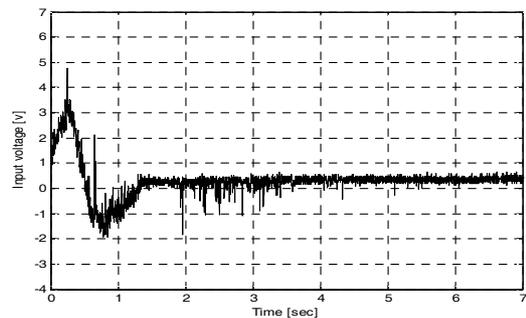
(a) 쇠공의 위치



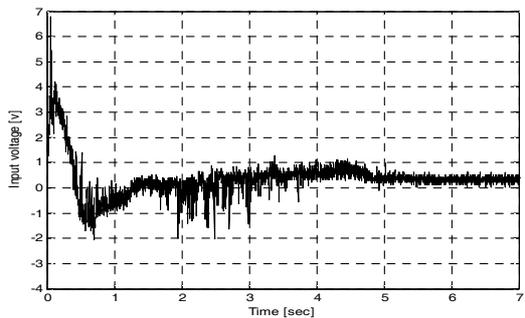
(a) 쇠공의 위치



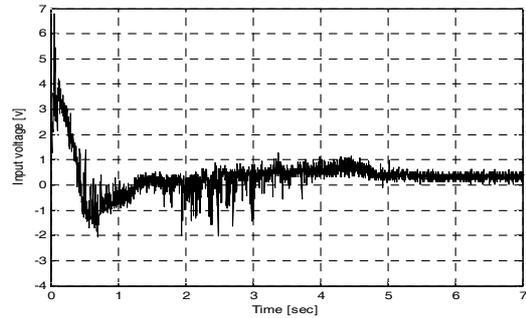
(b) 모터의 각



(b) 모터의 입력전압(자코비안)



(c) 모터의 입력전압



(c) 모터의 입력전압(입-출력 궤환)

그림 4 입-출력 궤환 선형화 기반 제어기의 실험 결과

Fig. 4 Experimental results of input-output linearization based controller

그림 5 두 가지 선형화 기반 제어기의 실험 결과 비교

Fig. 5 Comparison of two linearization based controllers experimental results

3. 두 가지 선형화 기반 제어기 비교

Fig. 5는 자코비안 및 입-출력 궤환 선형화를 적용한 제어기의 실험 결과에서 두 제어기의 장단점을 파악하기 위하여 시스템의 출력 y 와 모터의 입력전압 u 를 비교한 것이다.

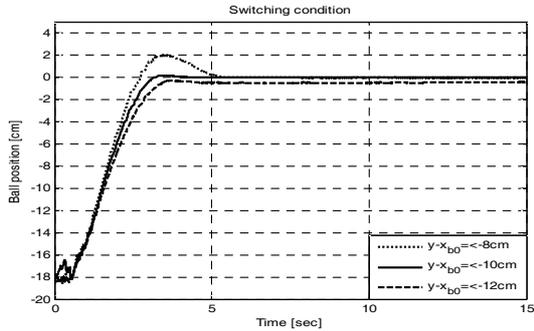
관찰 3: 자코비안 및 입-출력 궤환 선형화를 기반한 제어기의 실험 결과를 비교 및 관찰하면 자코비안 선형화 기반 제어기는 관찰 1을 바탕으로 제어기 식의 특이점 문제가 없기 때문에 모

든 영역에서 작동하여 입-출력 궤환 선형화 기반 제어기 보다 상대적으로 정상상태 응답이 느린 단점과 오버슈트와 모터의 입력전압은 작으며, 정상상태 오차는 없다는 장점을 가졌으며, 입-출력 궤환 선형화 기반 제어기는 관찰 2를 바탕으로 제어기 식의 특이점 문제로 인해 국소영역에서 작동하여 자코비안 선형화 기반 제어기 보다 상대적으로 오버슈트와 모터의 입력전압은 크고, 약간의 정상상태 오차가 있다는 단점과 정상상태 응답은 빠른 장점을 확인할 수 있다.

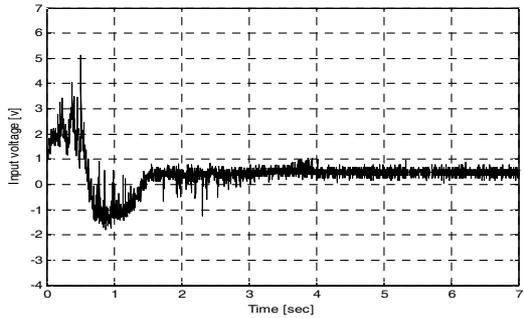
4. 스위칭 제어 기법을 이용한 제어기

4.1 스위칭 제어 기법을 적용하기 위한 오차판단 기준

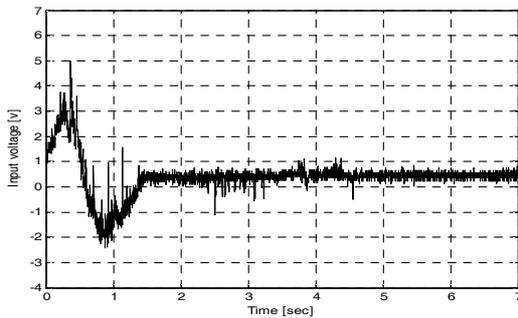
Fig. 6은 자코비안 및 입-출력 제한 선형화 기반 제어기를 스위칭 제어 기법을 이용하여 오차판단 기준에 따라 스위칭 시킨 결과로 쇄공의 위치 x_1 과 모터의 입력전압 u 를 나타낸 것이다.



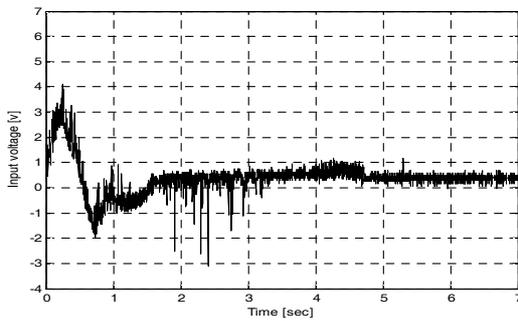
(a) 쇄공의 위치



(b) $y - x_{b0} \leq -8cm$ 일 때의 모터의 입력전압



(c) $y - x_{b0} \leq -10cm$ 일 때의 모터의 입력전압



(d) $y - x_{b0} \leq -12cm$ 일 때의 모터의 입력전압

그림 6 스위칭 조건에 따른 제어기의 실험 결과

Fig. 6 Experimental results of the controller according to switching conditions

관찰 4: 관찰 1, 2, 3을 바탕으로 스위칭 제어 기법을 적용하기 위해 자코비안 및 입-출력 제한 선형화 기반 제어기를 이용하여 두 제어기의 장점만을 사용한 더욱 개선된 성능의 제어기를 제안한다. 시스템의 출력과 제어 목표의 차이 즉, $y - x_{b0} = 0$ 이 되면 출력이 원하는 목표로 제어가 되는 것인데, 스위칭 조건을 오차판단 기준 $y - x_{b0}$ 로 정하고 Fig. 5를 관찰하면 오버슈트와 모터의 입력전압은 크지만 정상상태 응답이 빠른 입-출력 제한 선형화 기반 제어기와 오버슈트와 모터의 입력전압은 작지만 정상상태 응답이 느린 자코비안 선형화 기반 제어기를 실험을 통해 성능이 개선되는 스위칭 조건 $y - x_{b0}$ 의 값을 찾아주어야 한다. 스위칭을 빨리하면 모터의 입력전압이 작고 스위칭을 늦게하면 모터의 입력전압이 클 것으로 예상되어 스위칭 조건을 $-10cm$ 로 설정하였다.

Fig. 6에서 볼 수 있듯이 실험에 적용해보니 $-10cm$ 가 약간의 오버슈트와 함께 정상상태 응답은 빠르고 정상상태 오차는 발생하지 않은 최적의 조건인 것을 확인할 수 있다. 스위칭 조건이 $-8cm$ 인 경우 모터의 입력전압이 큰 입-출력 제한 선형화 기반 제어기의 작동이 길어져 오버슈트는 발생하였지만 정상상태 오차는 없다는 것을 확인할 수 있고, $-12cm$ 인 경우 자코비안 선형화 기반 제어기가 빨리 작동되어 오버슈트는 발생하지는 않았지만, 모터의 입력전압이 작아져 정상상태 오차가 발생한 것을 확인할 수 있다.

Remark 2: Fig. 6의 (a)에서 $-12cm$ 인 경우 정상상태 오차가 발생하였는데, 이는 처음에 충분한 모터의 입력전압이 인가되지 않은 상태에서 이후에 모터의 입력전압이 안정화가 되어 이로 인해 정상상태 오차가 발생하게 되었다.

4.2 스위칭 제어 알고리즘

Fig. 7은 스위칭 제어 알고리즘을 순서도로 나타낸 것이다.

스위칭 제어 알고리즘 설명: 자코비안 및 입-출력 제한 선형화 기반 제어기를 각각 설계하여 두 제어기의 시스템의 출력과 제어 목표의 차이 즉, 오차판단 기준에 따라 스위칭하여 원하는 구간에서만 각각의 제어기를 작동시킨다.

식 (17)을 보면 분모에 상태변수 x_3 가 있는데 Fig. 4의 (b)를 보면 모터의 각 x_3 가 0으로 될 때, 식 (17)의 분모에 있는 $\cos x_3$ 의 값이 변화되어 분자에 영향을 미쳐 이에 따라 모터의 입력전압도 변화기 때문에 성능이 저하되는 특이점 문제가 있어 쇄공이

목표로 하는 지점에서 멀리 떨어진 초기위치에서 모터의 입력전압이 큰 입-출력 궤환 선형화 기반 제어기를 국소영역 부분만 작동시키고 자코비안 선형화 기반 제어기는 식 (7)을 보면 분모에 상태변수가 없으므로 특이점 문제가 없어 성능이 안정하기 때문에 모든 상태에 대해서 작동을 시킨다.

따라서, $y - x_{b0} \leq -10\text{cm}$ 일 때는 입-출력 궤환 선형화 기반 제어기를 작동시키고, $-10\text{cm} \leq y - x_{b0} \leq 0\text{cm}$ 일 때는 자코비안

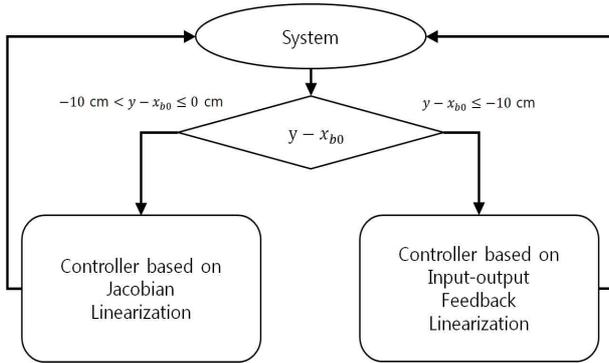


그림 7 제안된 최종 알고리즘
Fig. 7 Proposed final algorithm

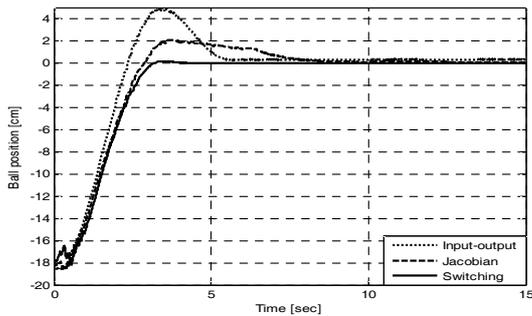
선형화 기반 제어기를 작동시키는 것이다.

4.3 스위칭 제어 기법을 적용한 제어기와 비교

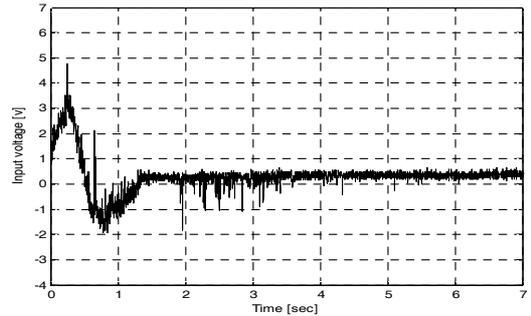
Fig. 8은 스위칭 제어 기법을 이용하여 오차판단 기준을 -10cm 로 설정한 제어기와 자코비안 선형화를 기반한 제어기 및 입-출력 궤환 선형화를 기반한 제어기의 출력 y 와 모터의 입력전압 u 를 최종적으로 비교해본 결과이다.

스위칭 제어 기법의 적용 결과 1: 스위칭 제어 기법을 적용한 제어기의 실험 결과를 관찰하면 자코비안 및 입-출력 궤환 선형화 기반 제어기의 각각의 장점만을 이용하여 자코비안 선형화 기반 제어기에서 확인할 수 있었던 오버슈트는 감소하였고 상대적으로 느렸던 정상상태 응답은 빨라졌으며, 입-출력 궤환 선형화 기반 제어기 역시 오버슈트는 감소하고, 정상상태 응답은 빨라졌으며, 정상상태 오차는 없는 결과를 확인하였다. 모터의 입력전압 또한 입-출력 궤환 선형화 기반 제어기보다는 작고 자코비안 선형화 기반 제어기와는 거의 차이가 없다는 것을 확인하였다.

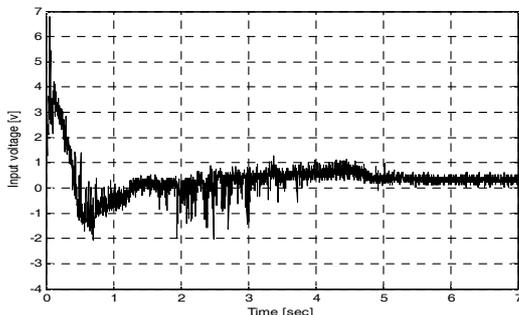
따라서, [7]과 같이 시스템의 형태를 고려해서 자코비안 선형화 기법과 입-출력 궤환 선형화 기법을 제어기에 적용한 뒤, 각각의 제어기에서 확인할 수 있었던 장단점들 중에서 장점만을 이용한 스위칭 제어 기법을 통해 단점들이 개선된 향상된 성능의 효과를 확인할 수 있었다.



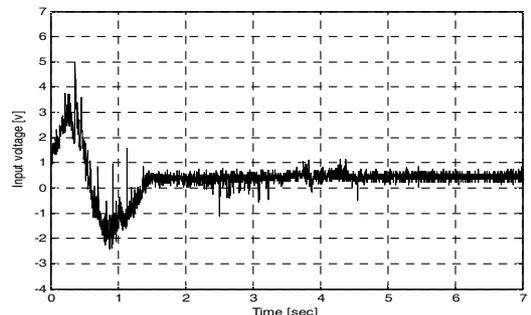
(a) 쇠공의 위치 비교



(b) 모터의 입력전압(자코비안)



(c) 모터의 입력전압(입-출력 궤환)



(d) 모터의 입력전압(스위칭)

그림 8 스위칭 제어 기법을 적용한 제어기의 비교
Fig. 8 Comparison of switching control method based controller

5. 오차판단 기준의 타당성

5.1 스위칭 제어 기법을 적용하기 위한 오차판단 기준

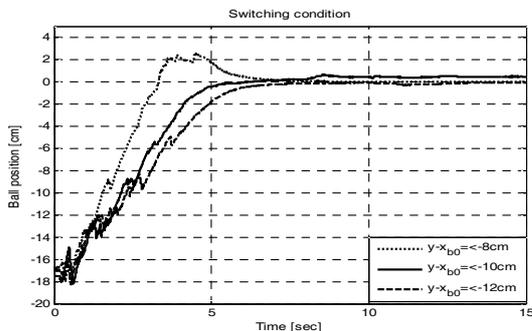
본 논문에서 설정한 오차판단 기준 -10cm 의 타당성을 일반화 시키기 위해 쇄공의 질량 또는 제어기 이득값의 변화를 고려할 수 있다. 그러나 실제 쇄공의 질량은 Table 1에서 볼 수 있듯이 거의 정확한 값이기 때문에 쇄공의 질량 변화로는 타당성을 제시하기 어려워 극점을 $-3, -3, -3, -3$ 으로 달리하여, 오차판단 기준의 타당성을 Fig. 9를 통해 보였다.

관찰 5: 다른 극점으로 설정하여 스위칭 기법을 적용한 실험 결과를 관찰하면 스위칭 조건이 -8cm 일 때는 모터의 입력전압이 큰 임-출력 궤환 선형화 기반 제어기의 작동이 길어져 오버슈트가 발생하였고, 스위칭 조건이 -12cm 일 때는 모터의 입력전압이 작은 자코비안 선형화 기반 제어기가 빨리 작동되어 오버슈트는 발생하지 않았지만 정상상태 응답은 느린 결과를 보였다. 마찬가지로 스위칭 조건이 -10cm 일 때는 정상상태 응답이 빠르면서 오버슈트는 거의 없는 것을 확인하였다. 따라서, 관찰 4에서와 같이 극점을 다르게 설정한 경우에도 오차판단 기준이 -10cm 일 때가 최적의 조건인 것을 확인하였다.

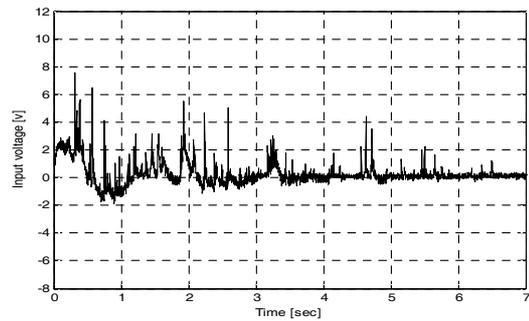
5.2 스위칭 제어 기법을 적용한 제어기와 비교

Fig. 10은 $-3, -3, -3, -3$ 으로 설정한 제어기의 극점을 통해 자코비안 선형화를 기반한 제어기 및 임-출력 궤환 선형화를 기반한 제어기 그리고 스위칭 제어 기법을 이용하여 오차판단 기준을 -10cm 로 설정한 제어기의 출력 y 와 모터의 입력전압 u 를 비교한 결과이다.

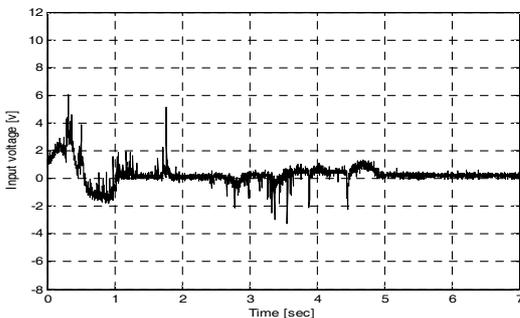
스위칭 제어 기법의 적용 결과 2: 스위칭 제어 기법의 적용 결과 1에서와 같이 자코비안 선형화 기반 제어기는 임-출력 궤환 선형화 기반 제어기보다 상대적으로 오버슈트는 작았지만 정상상태 응답은 느렸으며, 임-출력 궤환 선형화 기반 제어기는 자코비안 선형화 기반 제어기보다 상대적으로 오버슈트는 크지만 정상상태 응답은 빠른 성능을 보였다. 따라서, 각 제어기의 장점인 오버슈트는 작으면서 정상상태 응답은 빠른 성능을 얻기 위해, 스위칭 제어 기법을 적용하였고, 이에 따라 오버슈트는 감소하였고, 정상상태 응답은 빨라졌으며, 모터의 입력전압은 임-출력 궤환 선형화 기반 제어기보다는 작고, 자코비안 선형화 기반 제어기와는 거의 차이가 없는 개선된 성능의 효과를 확인하였다.



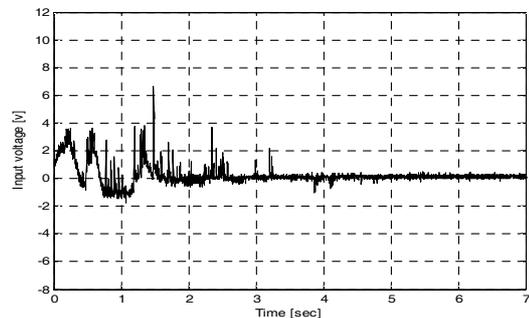
(a) 쇄공의 위치



(b) $y - x_{b0} \leq -8\text{cm}$ 일 때의 모터의 입력전압



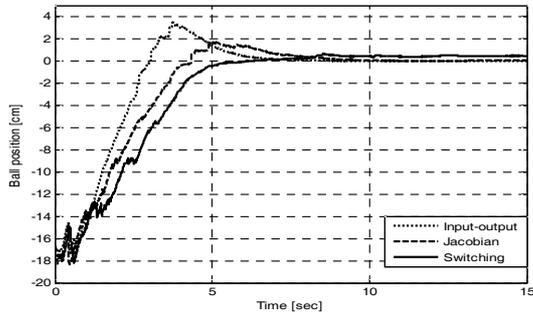
(c) $y - x_{b0} \leq -10\text{cm}$ 일 때의 모터의 입력전압



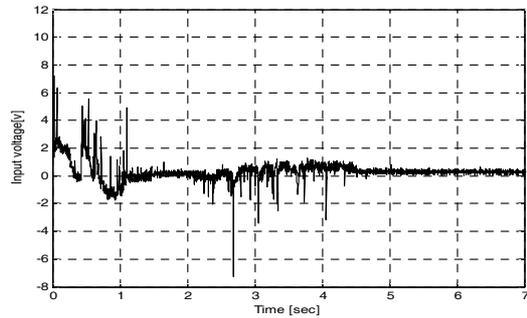
(d) $y - x_{b0} \leq -12\text{cm}$ 일 때의 모터의 입력전압

그림 9 스위칭 조건에 따른 제어기의 실험 결과

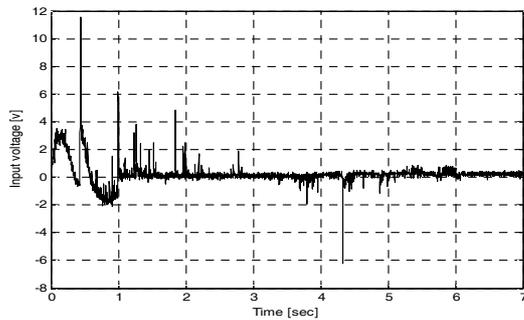
Fig. 9 Experimental results of the controller according to switching conditions



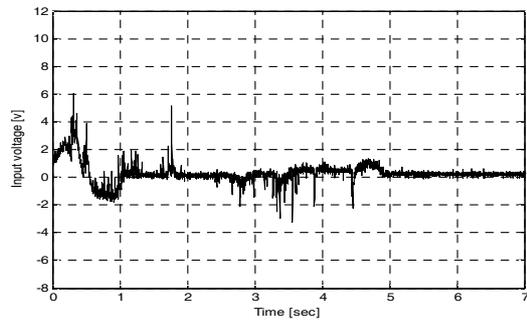
(a) 쇠공의 위치 비교



(b) 모터의 입력전압(자코비안)



(c) 모터의 입력전압(입-출력 귀환)



(d) 모터의 입력전압(스위칭)

그림 10 스위칭 제어 기법을 적용한 제어기의 비교

Fig. 10 Comparison of switching control method based controller

6. 결 론

본 논문에서는 비선형 시스템인 볼-빔 시스템에 자코비안 및 입-출력 귀환 선형화 기법을 적용하여 각각의 제어기를 설계하고 실험을 통해 제어기의 성능을 확인하였다. 실험 결과를 바탕으로 시스템의 출력 y 를 비교한 결과 자코비안 선형화를 기반한 제어기는 특이점 문제가 없어 모든 상태에서 작동되므로 오버슈트와 모터의 입력전압은 작지만 정상상태 응답이 느렸고, 입-출력 귀환 선형화를 기반한 제어기는 특이점 문제로 인해 국소영역에서 작동되므로 오버슈트와 모터의 입력전압은 크지만 정상상태 응답이 빠르다는 것을 확인하였다. 이에 따라 스위칭 제어 기법을 이용하여 시스템의 출력과 제어 목표의 차이 즉, $y - x_w$ 의 스위칭 조건에 따라 자코비안 및 입-출력 귀환 선형화 기반 제어기를 적용한 뒤, 각각의 제어기의 장점을 이용하여 더욱 개선된 성능의 제어기를 제안하였다.

실험을 통해 스위칭 제어 기법을 이용함으로써 시스템의 오버슈트는 감소하였으며 정상상태 응답은 빨라지고, 정상상태 오차는 발생하지 않은 것을 확인하였고, 모터의 입력전압은 입-출력 귀환 선형화 기반 제어기보다는 감소하였으며 자코비안 선형화 기반 제어기와는 거의 차이가 없는 것을 확인하였다. 또한, 오차 판단 기준을 결정하는 방법에 대해 제어기의 이득값을 달리하여 추가적인 실험을 통해 스위칭 조건의 타당성을 검증하였다.

감사의 글

본 논문은 동아대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.

References

- [1] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd Ed., Oxford University Press In c., 1999.
- [2] H.-L. Choi and J.-T. Lim, "On robust approximate feedback linearization," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E87-A, no. 2, pp. 502-504, 2004.
- [3] H.-D. Kim and H.-L. Choi, "An output feedback controller for a ball and beam system under measurement noise of feedback sensor," *Journal of Institute of Control, Robotics and System* (in Korean), vol. 17, no. 10, pp. 955-959, 2011.
- [4] J. Hauser, S. Sastry, and P. Kokotovic, "Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, no. 3, pp. 392-398, 1992.

[5] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd Ed., Prentice Hall Inc., 2002.

[6] H.-S. Jang, J.-I. Bae, and K.-S. Lee, "Nonlinear characteristic analysis for ball-beam system using sliding mode control based-on state observer," *Proc. KIEE Summer Conference, Yongpyeong, Korea*, pp.1279-1280, July, 2012.

[7] M.-G. Jeong and H.-L. Choi, "Switching control of electromagnetic levitation system based on jacobian linearization and input-output feedback linearization," *Trans. KIEE(in Korean)*, vol. 64, no. 4, pp. 578-585, 2015.

[8] S.-Y. Oh and H.-L. Choi, "Design and analysis of a switching state feedback controller to reduce the measurement error effect for a chain of integrators system under AC and DC noise," *Journal of Institute of Control, Robotics and System* (in Korean), vol.20, no.1, pp. 12-17, 2014.

[9] Quanser, *Ball and Beam User Manuals*, 2008

[10] D.-H. Yeom and J.-Y. Choi, "Switching control for second order nonlinear systems using singular hyper-planes," *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 124-135, 2006.



최 호 립 (Ho-Lim Choi)

1996년, Univ. of Iowa, USA(학사).
 1999년, 2004년 KAIST(석·박사).
 KAIST 정보전자연구소 연구조교수, KIST
 인지로봇연구단 선임연구원, 2007년~현재 동
 아대학교 전기공학과 교수. 관심분야는 비선
 형 시스템의 궤환선형화 기법, 시지연 시스
 템, 시간 최적제어 등.

저 자 소 개



이 경 태 (Kyung-Tae Lee)

2016년, 동아대학교 전기공학과(학사).
 2016년~현재 동 대학원 석사과정.
 관심분야는 비선형 시스템의 선형화 기법,
 스위칭 제어 기법 등.



정 민 길 (Min-Gil Jeong)

2014년, 동아대학교 전기공학과(학사).
 2016년, 동 대학원 전기공학과(석사).
 2016년~현재 동 대학원 박사과정.
 관심분야는 비선형 시스템의 궤환 선형화
 기법, 강인 제어기 설계 등.