

<학술논문>

DOI <https://doi.org/10.3795/KSME-A.2017.41.1.031>ISSN 1226-4873(Print)
2288-5226(Online)**절대절점좌표계에서 선형 강성행렬을 활용한 2차원 보의 무차원 해석 §**

김건우* · 이재욱* · 장진석* · 오주영* · 강지현*** · 김형렬** · 유완석****

* 한국생산기술연구원, ** 국방과학연구소, *** 부산대학교 기계공학부

Non-Dimensional Analysis of a Two-Dimensional Beam Using Linear Stiffness Matrix in Absolute Nodal Coordinate FormulationKun Woo Kim*, Jae Wook Lee*, Jin Seok Jang*, Joo Young Oh*, Ji Heon Kang**,
Hyung Ryul Kim*** and Wan Suk Yoo****†

* Korea Institute of Industrial Technology,

** Agency for Defense Development,

*** School of Mechanical Engineering, Pusan Nat'l Univ.

(Received July 18, 2016 ; Revised August 30, 2016 ; Accepted September 22, 2016)

Key Words: Absolute Nodal Coordinate Formulation(절대절점좌표계), Non-Dimensional Analysis(무차원 해석), Two-Dimensional Beam(2차원 보), Linear Stiffness Matrix(선형 강성행렬)

초록: 1990년대 중반에 개발된 절대절점좌표는 탄성체 동역학 해석에 활용되고 있다. 운동방정식을 유도하는 과정에서 변위장을 이루는 다항식의 차수가 증가하면 필연적으로 자유도가 증가하게 되고, 이는 해석 시간의 증가로 이어진다. 따라서 본 연구에서는 차원 운동방정식을 무차원 운동방정식으로 전환함으로써 해석 시간을 단축시키고자 하였다. 위치 벡터를 이루는 형상 함수는 무차원으로, 절점 좌표는 길이 차원으로 정리한 후 무차원화하는 변수를 통해 무차원 질량행렬, 무차원 선형 강성행렬 및 무차원 보존력을 유도하였다. 무차원 운동방정식의 검증과 효율성은 정적 처짐에 대한 정해가 존재하는 외팔보 및 단진자 예제를 통해 제시하였다.

Abstract: Absolute nodal coordinate formulation was developed in the mid-1990s, and is used in the flexible dynamic analysis. In the process of deriving the equation of motion, if the order of polynomial referring to the displacement field increases, then the degrees of freedom increase, as well as the analysis time increases. Therefore, in this study, the primary objective was to reduce the analysis time by transforming the dimensional equation of motion to a non-dimensional equation of motion. After the shape function was rearranged to be non-dimensional and the nodal coordinate was rearranged to be in length dimension, the non-dimensional mass matrix, stiffness matrix, and conservative force was derived from the non-dimensional variables. The verification and efficiency of this non-dimensional equation of motion was performed using two examples; cantilever beam which has the exact solution about static deflection and flexible pendulum.

1. 서 론

1990년대 중반에 개발된 절대절점좌표(absolute nodal coordinate)^(1~4)는 탄성체 동역학 해석(flexible-

body dynamic analysis)에서 보(beam)에 관한 유한 요소 해석(finite element analysis) 기법을 도입함으로써 시작되었다. 이후 절대절점좌표는 현(string)^(5~7), 평판(plate)^(8~10), 탄성 호스(flexible hose)⁽¹¹⁾, 판 스프링(leaf spring)⁽¹²⁾ 및 타이어(tire)^(13~15) 등과 같이 대변위(large displacement) 혹은 대변형(large deformation) 해석에 활용되고 있다. 절대절점좌표는 탄성체 임의의 점을 향하는 전역 위치 벡터(global position vector)가 관성 좌표계(inertial coordinate

§ 이 논문은 대한기계학회 동역학 및 제어부문 2016년도 춘계학술대회(2016.04.27-29., 부여롯데리조트) 발표논문임

† Corresponding Author, wsyoo@pusan.ac.kr

© 2017 The Korean Society of Mechanical Engineers

system)에서 바로 정의되는 비 점진적 기법(non-incremental method)으로써 질량행렬(mass matrix)이 상수로 표현된다.^(1~4) 또한 좌표변환 행렬(transformation matrix)이 존재하지 않기 때문에 원심력(centrifugal force)과 코리올리력(Coriolis force)이 존재하지 않는다.^(1~4) 강성행렬(stiffness matrix)은 일반적으로 고전 보 이론(classical beam theory)^(1~4,16) 혹은 연속체 역학 개념(continuum mechanics concept)^(17,18)을 활용하여 유도할 수 있다.

전역 위치 벡터는 형상 함수(shape function)와 절점 좌표(nodal coordinate)로 표현되며, 형상 함수와 절점 좌표의 조합은 관심 있는 변형을 고려한 다항식으로 표현되는 변위장(displacement field)의 선정에 의해 다양한 형태로 나타난다.^(18,19) 관심있는 변형을 확인하기 위해 변위장을 이루는 다항식의 차수가 증가하게 되면 필연적으로 위치 벡터 구배(position vector gradient)의 증가에 의해 자유도(degrees of freedom)가 증가하게 되고, 이는 해석 시간(analysis time)의 증가로 이어진다. 따라서 본 연구에서는 절대절점좌표 차원 운동방정식(dimensional equation of motion)을 무차원 운동방정식(non-dimensional equation of motion)으로 전환함으로써 해석 시간을 단축시키고자 하였으며, 차원 운동방정식을 무차원 운동방정식으로 전환하기 위해 시간, 길이, 그리고 힘에 관련된 무차원 변수(non-dimensional variables)를 활용하였다. 본 연구에서 개발된 무차원 운동방정식은 2000년 Berzeri, M. and Shabana, A. A.⁽¹⁹⁾에 의해 개발된 2차원 오일러-베르누이 보(Euler-Bernoulli beam)⁽²⁰⁾를 기반으로 한 것이며, 본 연구는 무차원 운동방정식의 유도 과정 및 무차원 운동방정식에 관한 효율성을 제시하는 것이 목적이므로 선형 강성행렬(linear stiffness matrix)만을 활용하였다. 개발된 무차원 운동방정식은 예제를 활용하여 차원 운동방정식과의 비교를 통해 검증(verification)하고 효율성(efficiency)을 제시하였다. 이를 바탕으로 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 길이, 시간, 힘 차원을 무차원화하는 변수를 통해 무차원 운동방정식을 구성하는 무차원 질량행렬, 무차원 강성행렬 및 무차원 보존력을 유도한다. 이를 바탕으로 3장에서는 정적 처짐(static deflection)에 대한 정해(exact solution)가 존재하는 외팔보(cantilever beam) 및 탄성 단진자(pendulum) 예제를 활용하여 차원 및 무차원 운동방정식을 검증하고, 무차원 운동방정식의 효율성을 제시하도록 한다. 마지막으로 Section 4에서는 본 연구에 대한 결론을 제시한다.

2. 2차원 보의 무차원 운동방정식

본 연구에서 개발된 무차원 운동방정식은 2000년 Berzeri, M. and Shabana, A. A.⁽¹⁹⁾에 의해 개발된 2차원 오일러-베르누이 보(Euler-Bernoulli beam)⁽²⁰⁾를 기반으로 한 것임을 다시 한 번 언급하며, 차원 운동방정식으로부터 무차원 운동방정식을 유도하는 과정을 설명하도록 한다.

Fig. 1에서 보는 바와 같이 관성 좌표계에서 정의되는 전역 위치 벡터 $\bar{\mathbf{r}}$ 를 표현하기 위해 2차원 보의 단면 변형을 고려하지 않는 변위장을 식 (1)과 같이 정의한다.

$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 x 는 변형 전 탄성체의 임의의 점 P 를 향하는 요소 좌표이며, 경계 조건(boundary condition)에 의해 식 (1)의 전역 위치 벡터는 식 (2)와 같이 형상 함수와 절점 좌표의 조합으로 표현할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{r}} = [r_1 \quad r_2]^T = \mathbf{S}\bar{\mathbf{e}} \quad (2)$$

식 (2)에서 전역 위치 벡터 $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(\xi, t)$ 는 공간 및 시간에 관한 함수이며, 이 중 형상 함수가 공간에

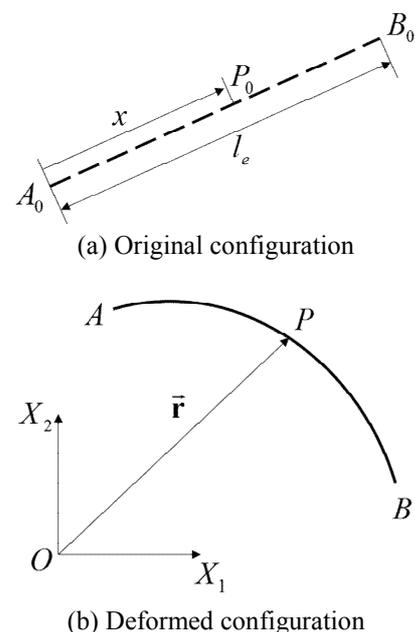


Fig. 1 Original and deformed configuration in absolute nodal coordinate formulation

관한 함수, 절점 좌표가 시간에 관한 함수이다.

식 (1)의 변위장을 바탕으로 식 (2)의 형상 함수는 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{S} = [s_1 \mathbf{I} \quad l_e s_2 \mathbf{I} \quad s_3 \mathbf{I} \quad l_e s_4 \mathbf{I}] \quad (3)$$

여기서 l_e 는 요소의 길이, \mathbf{I} 는 2×2 항등 행렬 (identity matrix)을 의미하며, 형상 함수의 각 성분 $s_i = s_i(\xi)$ ($i=1 \sim 4$) 은 식 (4)와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & s_2 &= \xi - 2\xi^2 + 3\xi^3, \\ s_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, & s_4 &= \xi^3 - \xi^2 \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)에서 $\xi = x/l_e$ 이다. 또한 식 (2)에서 절점 좌표 $\bar{\mathbf{e}}$ 는 식 (5)와 같으며, 식 (5)의 각 성분은 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\mathbf{e}} = [e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6 \quad e_7 \quad e_8]^T \quad (5)$$

$$\begin{aligned} e_1 &= r_1|_{x=0}, & e_2 &= r_2|_{x=0}, \\ e_3 &= \left. \frac{\partial r_1}{\partial x} \right|_{x=0}, & e_4 &= \left. \frac{\partial r_2}{\partial x} \right|_{x=0}, \\ e_5 &= r_1|_{x=l_e}, & e_6 &= r_2|_{x=l_e}, \\ e_7 &= \left. \frac{\partial r_1}{\partial x} \right|_{x=l_e}, & e_8 &= \left. \frac{\partial r_2}{\partial x} \right|_{x=l_e} \end{aligned} \quad (6)$$

이와 같은 관계를 바탕으로 질량행렬, 강성행렬, 그리고 외력항에 의한 차원 운동방정식은 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{e}}} + (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_T)\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{F}}_C \quad (7)$$

여기서 \mathbf{M} 은 질량행렬, \mathbf{K}_L 은 종 강성행렬 (longitudinal stiffness matrix), \mathbf{K}_T 는 횡 강성행렬 (transverse stiffness matrix), $\bar{\mathbf{F}}_C$ 는 보존력 (conservative force)을 의미한다.

차원 운동방정식을 무차원화 하는 과정은 식 (8)에 나타난 바와 같이 시간 차원을 무차원화 하는 변수 T_{ND} 를 활용함으로써 가능하다.⁽²¹⁾

$$t = T_{ND} t^* \quad \left(T_{ND} = L_{ND} \sqrt{\frac{\rho A}{F_{ND}}} \right) \quad (8)$$

여기서 t 는 시간, ρ 는 밀도, 그리고 A 는 단면적을 의미한다. L_{ND} 는 빔의 최대 길이로 길이 차원

을 무차원화 하는데 사용되며, F_{ND} 는 탄성체에 작용하는 임의의 작용력으로 힘 단위와 관계된 항을 무차원화 하는 역할을 한다. 또한 * 는 무차원화된 변수를 의미한다. 식 (8)의 시간에 대한 무차원 변수 T_{ND} 에 의해 해석 시간 대비 실제 나타나는 물리적 시간 (physical time)에서 차이가 있는데, T_{ND} 가 1보다 큰 경우 해석 시간 대비 비해 물리적 시간이 증가하므로 효율성을 가진다는 것을 의미한다. 특히 식 (8)에서 보는 바와 같이 T_{ND} 는 L_{ND} 가 증가할수록 무차원 운동방정식의 해석 효율성이 증가하게 된다.

운동방정식의 무차원화를 위해 길이 차원에 관한 무차원 변수는 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$x = L_{ND} x^*, \quad l_e = L_{ND} l_e^*, \quad \hat{\mathbf{e}} = L_{ND} \hat{\mathbf{e}}^* \quad (9)$$

여기서 기호 ‘ $\hat{\cdot}$ ’은 식 (2)와 다르게 새롭게 정의된 절점 좌표임을 의미한다. 식 (2)의 형상 함수와 절점 좌표는 차원이 혼합되어 있다. 즉 길이에 대한 차원과 무차원이 서로 혼재되어 있으므로 식 (7)의 차원 운동방정식을 무차원화 하는데 있어 다소 복잡한 과정이 요구된다. 따라서 무차원화에 있어 형상 함수 및 절점 좌표 각각의 차원을 통일시켜 줄 필요가 있는데, 본 연구에서는 형상 함수의 차원은 무차원으로 결정하고 절점 좌표의 차원은 길이 차원으로 결정하였다. 따라서 식 (2)의 전역 위치 벡터를 식 (10)과 같이 정의하도록 한다.

$$\bar{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{e}} \quad (10)$$

즉 식 (5)의 위치 벡터 구배에 요소의 길이 l_e 를 곱하면 식 (11)과 같이 절점 좌표가 길이 차원으로 표현된다.

$$\hat{\mathbf{e}} = [e_1 \quad e_2 \quad \hat{e}_3 \quad \hat{e}_4 \quad e_5 \quad e_6 \quad \hat{e}_7 \quad \hat{e}_8]^T \quad (11)$$

식 (11)에 나타난 절점 좌표의 각 성분들은 식 (12)와 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} e_1 &= r_1|_{x=0}, & e_2 &= r_2|_{x=0}, \\ \hat{e}_3 &= l_e \left. \frac{\partial r_1}{\partial x} \right|_{x=0}, & \hat{e}_4 &= l_e \left. \frac{\partial r_2}{\partial x} \right|_{x=0}, \\ e_5 &= r_1|_{x=l_e}, & e_6 &= r_2|_{x=l_e}, \\ \hat{e}_7 &= l_e \left. \frac{\partial r_1}{\partial x} \right|_{x=l_e}, & \hat{e}_8 &= l_e \left. \frac{\partial r_2}{\partial x} \right|_{x=l_e} \end{aligned} \quad (12)$$

또한 형상 함수는 식 (13)과 같이 무차원으로 정의되며, 형상함수의 각 요소는 식 (4)와 동일하다.

$$\hat{\mathbf{S}} = [s_1 \mathbf{I} \quad s_2 \mathbf{I} \quad s_3 \mathbf{I} \quad s_4 \mathbf{I}] \quad (13)$$

다음으로 식 (9)과 식 (10)을 바탕으로 전역 위치 벡터에 대한 무차원 전역 위치 벡터는 식 (14)와 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{r}}^* = \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{e}}^* \quad (14)$$

식 (14)에서 무차원 절점 좌표 $\hat{\mathbf{e}}^*$ 는 식 (15)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\mathbf{e}}^* = [e_1^* \quad e_2^* \quad \hat{e}_3^* \quad \hat{e}_4^* \quad e_5^* \quad e_6^* \quad \hat{e}_7^* \quad \hat{e}_8^*]^T \quad (15)$$

여기서 무차원 절점 좌표의 각 성분들은 식 (16)과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} e_1^* &= r_1^* \Big|_{x^*=0}, & e_2^* &= r_2^* \Big|_{x^*=0}, \\ \hat{e}_3^* &= l_e^* \frac{\partial r_1^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0}, & \hat{e}_4^* &= l_e^* \frac{\partial r_2^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0}, \\ e_5^* &= r_1^* \Big|_{x^*=l_e^*}, & e_6^* &= r_2^* \Big|_{x^*=l_e^*}, \\ \hat{e}_7^* &= l_e^* \frac{\partial r_1^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=l_e^*}, & \hat{e}_8^* &= l_e^* \frac{\partial r_2^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=l_e^*} \end{aligned} \quad (16)$$

또한 새롭게 정의되는 무차원 형상 함수는 식 (17)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\mathbf{S}}^* = [s_1^* \mathbf{I} \quad s_2^* \mathbf{I} \quad s_3^* \mathbf{I} \quad s_4^* \mathbf{I}] \quad (18)$$

식 (18)에서 $s_i^* = s_i^*(\xi)$ ($i=1 \sim 4$) 는 식 (4)와 동일하나, 무차원 변수가 $\xi = x^*/l_e^*$ 로 정의된다.

식 (15) 및 식 (18)과 같이 새롭게 정의된 절점 좌표 및 형상 함수를 활용하여 무차원 질량행렬 \mathbf{M}^* , 무차원 종 강성행렬 \mathbf{K}_L^* , 무차원 횡 강성행렬 \mathbf{K}_T^* 그리고 무차원 외력항 $\bar{\mathbf{F}}_C^*$ 을 식 (19)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{M}^* \left(\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{e}}^*}{\partial t^{*2}} \right) + (\mathbf{K}_L^* + \mathbf{K}_T^*) \hat{\mathbf{e}}^* = \bar{\mathbf{F}}_C^* \quad (19)$$

탄성체를 표현하는 무차원 운동방정식은 상호 구속에 의해 기계적 혹은 다물체 시스템으로 구성

되는데, 구속 방정식과 더불어 라그랑지 승수 (Lagrange multiplier)를 포함한 미분 대수 방정식 (differential algebraic equation)을 뉴마크 암시적 적분법(Newmark implicit integration)을 통해 수치 해 (numerical solution)를 얻었다.^(16, 22-24)

식 (19)로부터 2.1 절에는 무차원 질량행렬, 2.2 절에는 무차원 선형 종 강성행렬, 2.3절에는 무차원 선형 횡 강성행렬 그리고 2.4절에는 무차원 보존력을 유도하는 과정을 제시하였다.

2.1 무차원 질량행렬 \mathbf{M}^*

길이, 시간 및 힘 차원을 무차원화하는 변수를 활용하여 운동 에너지(kinetic energy)를 식 (20)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \rho A \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t} \right)^T \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t} \right) dx \\ &= (L_{ND} F_{ND}) \frac{1}{2} \int_0^{l_e^*} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}^*}{\partial t^*} \right)^T \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}^*}{\partial t^*} \right) dx^* \\ &= (L_{ND} F_{ND}) T^* \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)으로부터 무차원 운동에너지는 식 (21)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{2} \int_0^{l_e^*} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}^*}{\partial t^*} \right)^T \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}^*}{\partial t^*} \right) dx^* \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}^*}{\partial t^*} \right)^T \int_0^{l_e^*} (\hat{\mathbf{S}})^T (\hat{\mathbf{S}}) dx^* \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}^*}{\partial t^*} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

따라서 무차원 질량행렬은 식 (22)와 같이 정의된다.

$$\mathbf{M}^* = \int_0^{l_e^*} (\hat{\mathbf{S}})^T (\hat{\mathbf{S}}) dx^* = l_e^* \int_0^1 (\hat{\mathbf{S}})^T (\hat{\mathbf{S}}) d\xi \quad (22)$$

2.2 무차원 선형 종 강성행렬 \mathbf{K}_L^*

강성행렬은 변형에너지(strain energy)로부터 유도하기로 한다. 변형에너지는 종 변형에너지(longitudinal strain energy)와 횡 변형에너지(transverse strain energy)의 선형 조합으로 식 (23)과 같이 나타낼 수 있다.⁽²⁵⁾

$$U = U_L + U_T = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} [EA \varepsilon_e^2 + EI \kappa_e^2] dx \quad (23)$$

여기서 E 는 탄성 계수, ε_e 는 변형률, I 는 단면 2차 모멘트, 그리고 κ_e 는 곡률(curvature)을 의미한다. 식 (23)으로부터 종 변형에너지는 식 (24)

와 같이 나타낼 수 있고, 식 (24)로부터 무차원 선형 중 강성행렬을 구하기로 한다.

$$U_L = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} EA \varepsilon_e^2 dx \quad (24)$$

무차원 중 강성행렬을 유도하기 위해 먼저 중 변형에너지를 식 (24)로부터 길이 차원을 무차원화 하는 변수 L_{ND} 및 힘 차원을 무차원화 하는 변수 F_{ND} 를 활용하여 식 (25)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} U_L &= \frac{1}{2} \int_0^{l_e} EA \varepsilon_e^2 dx \\ &= \frac{1}{2} F_{ND} \int_0^{l_e} \frac{EA}{F_{ND}} \varepsilon_e^{*2} d(L_{ND} x^*) \\ &= (L_{ND} F_{ND}) \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \frac{EA}{F_{ND}} \varepsilon_e^{*2} dx^* \\ &= (L_{ND} F_{ND}) U_L^* \end{aligned} \quad (25)$$

식 (25)로부터 무차원 중 변형에너지는 식 (26)과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_L^* = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \frac{EA}{F_{ND}} \varepsilon_e^{*2} dx^* \quad (26)$$

식 (25)에 나타나는 무차원 중 변형률(ε_e^*)을 구하기 위해 식 (9)를 이용하여, 식 (27)과 같이 미분 연산자를 정의해야 한다.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L_{ND}} \frac{\partial}{\partial x^*} = \frac{1}{L_{ND}} \frac{1}{l_e^*} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (27)$$

앞서 언급한 바와 같이 x 는 변형 전 상태에 대한 요소의 중립 축을 따르는 임의의 점이고, s 를 변형 후 상태에 대한 요소의 중립 축을 따르는 임의의 점이라면, 미소 호 길이(infinitesimal arc length)는 식 (28)와 같이 나타낼 수 있다.

$$ds = \sqrt{\mathbf{r}'^T \mathbf{r}'} dx \quad (28)$$

식 (28)의 $\sqrt{\mathbf{r}'^T \mathbf{r}'}$ 는 변형 구배(deformation gradient)를 의미한다.⁽²⁵⁾ 이 변형 구배로부터 코쉬-그린 중 변형률(Cauchy-Green longitudinal strain)을 식 (29)와 같이 정의할 수 있다.⁽²⁶⁾

$$\varepsilon_e = \frac{1}{2}(f^2 - 1) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}'^T \mathbf{r}' - 1) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{e} - 1) \quad (29)$$

식 (29)의 중 변형률은 그 자체로 무차원이며, 식 (27)을 식 (29)에 대입하면 무차원 중 변형률(ε_e^*)을 식 (30)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_e^* = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l_e^{*2}} (\hat{\mathbf{S}}_{,\xi} \hat{\mathbf{e}}^*)^T (\hat{\mathbf{S}}_{,\xi} \hat{\mathbf{e}}^*) - 1 \right) \quad (30)$$

여기서 $\hat{\mathbf{S}}_{,\xi} = \partial \hat{\mathbf{S}} / \partial \xi$ 이다. 무차원 중 변형에너지를 무차원 중 탄성력을 얻기 위해 필요한 항은 무차원 중 변형률을 무차원 절점 좌표로 편미분하는 항이며, 이는 식 (31)과 같다.

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_e^*}{\partial \hat{\mathbf{e}}^*} \right)^T = \frac{1}{l_e^{*2}} \hat{\mathbf{S}}_{,\xi}^T \hat{\mathbf{S}}_{,\xi} \hat{\mathbf{e}}^* \quad (31)$$

식 (31)을 활용하면 무차원 중 탄성력은 무차원 중 변형에너지를 무차원 절점 좌표에 대해 편미분함으로써 식 (32)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_L^* &= \left(\frac{\partial U_L^*}{\partial \hat{\mathbf{e}}^*} \right)^T = \int_0^{l_e} \frac{EA}{F_{ND}} \varepsilon_e^* \left(\frac{\partial \varepsilon_e^*}{\partial \hat{\mathbf{e}}^*} \right) dx^* \\ &= \frac{1}{l_e^*} \int_0^1 \frac{EA}{F_{ND}} \varepsilon_e^* \hat{\mathbf{S}}_{,\xi}^T \hat{\mathbf{S}}_{,\xi} \hat{\mathbf{e}}^* d\xi = \mathbf{K}_L^* \hat{\mathbf{e}}^* \end{aligned} \quad (32)$$

따라서 무차원 중 강성행렬은 식 (33)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K}_L^* = \frac{1}{l_e^*} \int_0^1 \frac{EA}{F_{ND}} \varepsilon_e^* \hat{\mathbf{S}}_{,\xi}^T \hat{\mathbf{S}}_{,\xi} d\xi \quad (33)$$

식 (33)에서 무차원 중 변형률(ε_e^*)의 정의에 따라 다양한 무차원 중 강성행렬을 얻을 수 있다. 본 연구에서는 무차원 중 변형률을 식 (34)와 같이 선형으로 가정하여 무차원 선형 중 강성행렬을 유도한다.

$$\bar{\varepsilon}_e^* = \frac{d^* - l_e^*}{l_e^*} \quad (34)$$

식 (34)에서 d^* 는 변형 후 요소 절점 간의 거리를 의미하며 식 (35)와 같이 나타낼 수 있다.

$$d^* = \sqrt{(e_5^* - e_1^*)^2 + (e_6^* - e_2^*)^2} \quad (35)$$

따라서 식 (34)에 의해 식 (33)은 식 (36)과 같이 나타낼 수 있다. 즉 무차원 중 변형률이 상수로

정의됨에 따라 무차원 종 강성행렬은 식 (36)에서와 같이 선형으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K}_L^* = \frac{EA}{F_{ND}} \frac{1}{l_e^*} \hat{\mathbf{e}}_e^* \int_0^1 \hat{\mathbf{S}}_{,\xi}^T \hat{\mathbf{S}}_{,\xi} d\xi \quad (36)$$

2.3 무차원 선형 횡 강성행렬 \mathbf{K}_T^*

식 (23)으로부터 횡 방향 변형에너지는 식 (37)과 같이 나타낼 수 있고, 식 (37)로부터 무차원 선형 횡 강성행렬을 구하기로 한다.

$$U_T = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} EI \kappa_e^2 dx \quad (37)$$

무차원 횡 강성행렬을 유도하기 위해 식 (37)의 횡 변형에너지를 길이 차원을 무차원화 하는 변수 L_{ND} 및 힘 차원을 무차원화 하는 변수 F_{ND} 로부터 식 (38)과 같이 나타낼 필요가 있다.

$$\begin{aligned} U_T &= \frac{1}{2} \int_0^{l_e} EI \kappa_e^2 dx \\ &= \frac{1}{2} F_{ND} L_{ND}^2 \int_0^{l_e} \frac{EI}{F_{ND} L_{ND}^2} \frac{\kappa_e^{*2}}{L_{ND}^2} d(L_{ND} x^*) \\ &= (L_{ND} F_{ND}) \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \frac{EI}{F_{ND} L_{ND}^2} \kappa_e^{*2} dx^* \\ &= (L_{ND} F_{ND}) U_T^* \end{aligned} \quad (38)$$

식 (38)로부터 무차원 횡 변형에너지는 식 (39)와 같이 나타낼 수 있다.

$$U_T^* = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \frac{EI}{F_{ND} L_{ND}^2} \kappa_e^{*2} dx^* \quad (39)$$

프레네-세레 공식(Frenet-Serret formulas)에 의해 나타나는 곡률 κ_e^* 는 무차원화를 통해 식 (40)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\kappa_e^* = \left| \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}^*}{ds^{*2}} \right| \quad (40)$$

식 (40)을 바탕으로 무차원 변형 구배가 단위 값으로 수렴한다는 가정하에 무차원 선형 횡 강성행렬을 유도 한다.

식 (28)로부터 무차원 변형 구배를 식 (41)과 같이 표현할 수 있다.

$$f^* = \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^*}{\partial x^*} \right)^T \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}^*}{\partial x^*} \right)} = \frac{\partial(L_{ND} s^*)}{\partial(L_{ND} x^*)} = \frac{\partial s^*}{\partial x^*} \quad (41)$$

무차원 변형 구배가 단위 값이라면 횡 변형에너지에 대입될 κ_e^{*2} 은 절대절점좌표계에서 식 (42)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\kappa_e^{*2} = \frac{1}{l_e^{*4}} \hat{\mathbf{e}}^{*T} \hat{\mathbf{S}}_{,\xi\xi}^T \hat{\mathbf{S}}_{,\xi\xi} \hat{\mathbf{e}}^* \quad (42)$$

여기서 $\hat{\mathbf{S}}_{,\xi\xi} = \partial^2 \hat{\mathbf{S}} / \partial \xi^2$ 이다. 따라서 식 (42)를 무차원 횡 변형에너지 식 (39)에 대입하면 식 (43)과 같이 무차원 선형 횡 강성행렬을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{K}_T^* = \frac{EI}{F_{ND} L_{ND}^2} \frac{1}{l_e^{*3}} \int_0^1 \left(\hat{\mathbf{S}}_{,\xi\xi}^T \hat{\mathbf{S}}_{,\xi\xi} \right) d\xi \quad (43)$$

2.4 무차원 보존력 $\vec{\mathbf{F}}_C^*$

보존력에 해당하는 집중 하중(concentrated load)은 분포 하중(distributed load)으로 고려하는 것이 타당하며, 힘 차원을 무차원화 하는 변수 F_{ND} 를 활용하면 식 (44)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{\mathbf{F}}_C^* = \frac{\int_{V_e} \rho \vec{\mathbf{G}}^T \mathbf{S} dV_e}{F_{ND}} \quad (44)$$

여기서 $\vec{\mathbf{G}} = [0 \quad -g]^T$ 는 중력 가속도 g 가 포함된 벡터를 의미하며, 중력 방향이 관성 좌표계의 $-X_2$ 축임을 의미한다.

3. 무차원 운동방정식의 검증과 효율성

3장에서는 개발된 무차원 운동방정식을 검증하고 효율성을 제시하고자 한다. 본 연구에서 활용된 PC(personal computer)의 성능은 Table 1에 나타내었다. 또한 시간을 무차원화 하는 변수 T_{ND} 는 식 (8)에서 보는 바와 같이 요소 수에 의해 Table 2와 같이 결정할 수 있다.

3.1 탄성 외팔보

원형 외팔보에 대한 물성치가 Table 3에 나타나 있으며, Fig. 2에서 보는 바와 같이 $-X_2$ 축으로 중력가속도가 작용하는 경우를 가정한다. Table 3의 물성치를 바탕으로 한 외팔보 끝 단의 정점 처짐(static deflection) δ 에 대한 정해(exact solution)는 식 (45)과 같이 계산할 수 있다.

$$\delta = \frac{qL^4}{8EI} \cong -2.038 \text{ mm} \quad (45)$$

Table 1 Put table caption put table caption Put table caption

CPU	Intel® Core™ i7-4930K
Memory capacity	32GB
Commercial software	MATLAB R2013a-64bit

Table 2 Non-dimensional parameter T_{ND} by the number of elements

Unit: [s]	Number of elements			
	1	10	20	30
T_{ND}	0.32 s	1.01 s	1.43 s	1.75 s

Table 3 Properties and data of steel

Density [kg/m ³]	Modulus of elasticity [N/m ²]	Diameter [m]
8030	193E+09	0.02

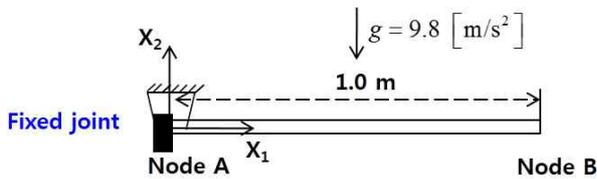


Fig. 2 Cantilever beam

여기서 q 는 분포 하중, L 은 외팔보의 길이, E 는 탄성 계수 그리고 I 는 질량 관성 모멘트이다.

먼저 개발된 무차원 운동방정식의 해와 기존의 차원 운동방정식을 활용한 해가 정해에 수렴하는지 여부를 판단하기 위하여 외팔보 끝 단의 동적 처짐 평균값(mean value)이 Table 4에 나타나 있다. Table 4는 물리적 시간 2초까지에 대한 평균값이며, 본 연구에서는 보의 전단 변형(shear deformation)을 고려하지 않았기 때문에 잠김 현상(locking phenomenon)이 발생하지 않아 요소 수가 1개일 경우에도 정해와 유사한 것을 확인할 수 있다. 즉 외팔보의 변위는 순수 굽힘(pure bending)에 의해서만 발생함을 확인할 수 있다.

요소 수가 증가할수록 해의 정확도는 높아지므로 Fig. 3에는 요소 수 30개에 대한 물리적 시간 1.5~2초 동안의 끝 단의 처짐이 나타나 있다. Fig. 3에서 보는 바와 같이 개발된 무차원 운동방정식을 활용한 경우와 기존의 차원 운동방정식을 활용한 경우 모두 정해에 수렴해 감을 확인할 수 있다. 또한 차원 및 무차원 운동방정식을 활용한 해의 주파수(frequency)가 일정함을 확인할 수 있는데, 이는 기존의 차원 운동방정식이 무차원 운동방정

Table 4 Mean value of deflection by the number of elements

Unit: [mm]	Number of elements			
	1	10	20	30
DIM	-2.040	-2.038	-2.038	-2.038
Non-DIM	-2.043	-2.038	-2.038	-2.038

Table 5 Analysis time by the number of elements in cantilever beam

Unit: [s]	Number of elements			
	1	10	20	30
DIM	1.83	3.96	7.33	11.11
Non-DIM	5.72	3.94	5.20	6.48

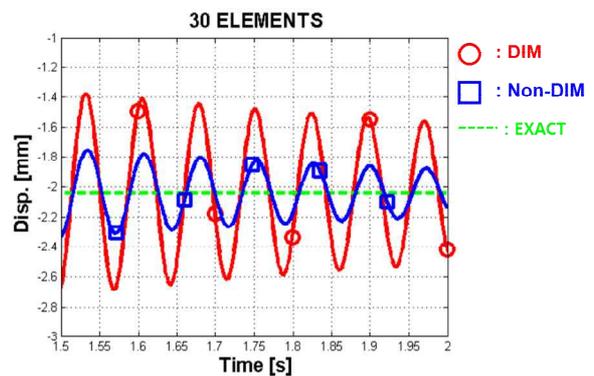


Fig. 3 Static and dynamic deflection at the tip point

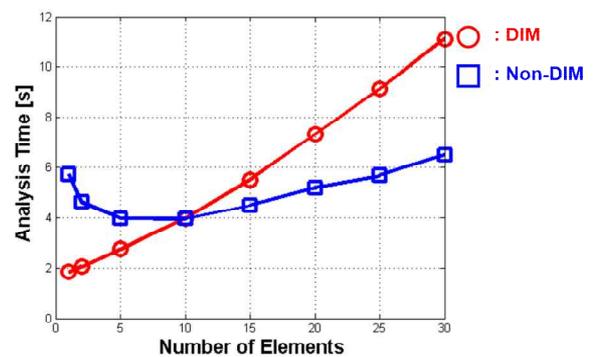


Fig. 4 Analysis time by the number of elements in cantilever beam

식으로 정확히 변환되었음을 의미한다. Fig. 3에서 동적 처짐(dynamic deflection)이 정해에 수렴해 가는 것은 수치 감쇠(numerical damping)에 의해 나타나는 현상이며, 진폭(amplitude)의 차이가 발생하는 것은 동일한 수치 감쇠 계수를 차원 및 무차원 운동방정식에 부여했기 때문이다.

Table 5와 Fig. 4에는 요소 수에 따른 차원 운동방정식과 무차원 운동방정식의 해석 시간이 제시되어 있다. 요소 수가 1인 경우에는 차원 운동방

Table 6 Analysis time by the number of elements in flexible pendulum

Unit: [s]	Number of elements			
	1	10	20	30
DIM	x	4.26	7.77	11.55
Non-DIM	x	4.17	5.76	7.46

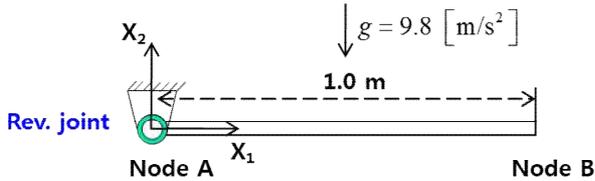


Fig. 5 Flexible pendulum

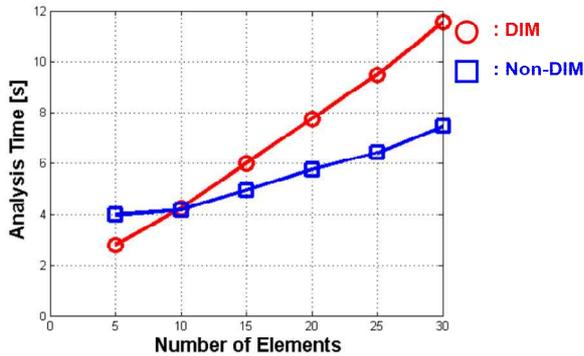


Fig. 6 Analysis time by the number of elements in flexible pendulum

정식이 무차원 운동방정식에 비해 유리한데, 이는 Table 2에서 보는 바와 같이 T_{MD} 에 의해 무차원 운동방정식의 계산 횟수가 증가하기 때문이다. 10개의 요소로 분할한 경우 해석 시간이 거의 동일한 것을 확인할 수 있다. 선형 강성행렬을 활용할 경우 요소 수가 충분치 않으면 변형을 정확히 표현할 수 없고, 탄성체 해석에서 잠김 현상과 같은 비정상적인 해석 결과가 나타날 수 있으므로 요소 수가 증가할수록 해석에 유리한 무차원 운동방정식이 효율적임을 알 수 있다.

3.2 탄성 단진자

3.2절에서는 회전 조인트(revolute joint)에 체결된 탄성 단진자 예제(Fig. 5)를 통해 개발된 무차원 운동방정식의 해석 효율성을 제시하고자 한다. 대변형 뿐만아니라 대회전(large rotation)을 표현할 수 있는 절대절점좌표계의 특징을 확인하기 위하여 탄성계수를 $193E+05 \text{ N/m}^2$ 로 설정하였다.

해석 효율성을 제시하기 위하여 Table 6과 Fig. 6

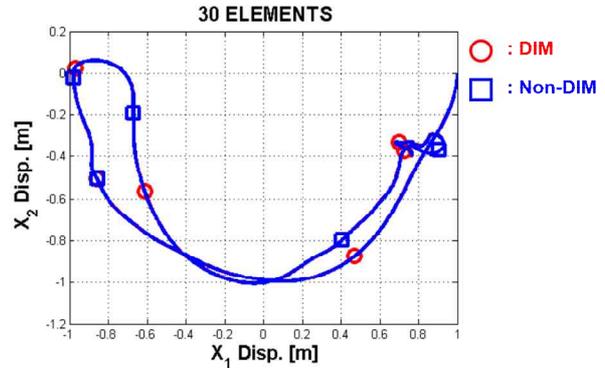


Fig. 7 Motion of flexible pendulum at the tip point

에는 물리적 시간 2초 동안의 해석 시간이 나타나 있다. Table 6을 보면 1개의 요소로 해석을 진행할 경우 발산하는 것을 확인할 수 있다. 이는 탄성계수를 $193E+05 \text{ N/m}^2$ 로 설정함에 따라 1개의 요소로 선형 강성행렬을 구성하면 해석이 가능하지 않음을 의미한다. 즉 선형 강성행렬을 활용하고자 하는 경우에는 더 많은 요소로 분할해야 함을 의미한다. Fig. 6은 Fig. 4와 유사한 경향을 보이고 있으며, 이를 통해 단진자 예제에서 역시 10개 이상의 요소를 활용한다면 개발된 무차원 운동방정식을 활용하는 것이 보다 효율적임을 알 수 있다. Fig. 7에는 X_1 및 X_2 축에 대한 단진자의 거동이 나타나 있으며, 기존의 차원 운동방정식 및 개발된 무차원 운동방정식에 의해 구한 해가 동일함을 확인할 수 있다.

4. 결론

1990년대 중반에 개발된 절대절점좌표는 탄성체 동역학 해석에 활용되고 있다. 운동방정식을 유도하는 과정에서 관심있는 변형을 확인하기 위해 변위장을 이루는 다항식의 차수가 증가하게 되면 필연적으로 자유도가 증가하게 되고, 이는 해석 시간의 증가로 이어진다. 따라서 본 연구에서는 절대절점좌표 차원 운동방정식을 무차원 운동방정식으로 전환함으로써 해석 시간을 단축시키고자 하였다. 본 연구에서 개발된 무차원 운동방정식은 2000년 Berzeri, M. and Shabana, A. A.⁽¹⁹⁾에 의해 개발된 2차원 오일러-베르누이 보⁽²⁰⁾를 기반으로 한 것이며, 본 연구는 무차원 운동방정식의 유도 과정 및 무차원 운동방정식에 관한 효율성을 제시하는 것이 목적이므로 운동방정식은 선형 강성행렬을 활용하여 구성하였다.

위치 벡터를 이루는 형상 함수는 무차원으로, 절점 좌표는 길이 차원으로 정리한 후 시간, 길이

그리고 힘 차원을 무차원화하는 변수 T_{ND} , L_{ND} 및 F_{ND} 를 통해 무차원 질량행렬, 무차원 선형 강성행렬 및 무차원 보존력을 유도하였다. 무차원 운동방정식의 경우 시간에 대한 무차원 변수 T_{ND} 에 의해 해석 시간 대비 실제 나타나는 물리적 시간에서 차이가 나는데, T_{ND} 가 1보다 큰 경우 해석 시간 대비 비해 물리적 시간이 증가하므로 효율성을 가진다는 것을 예측할 수 있었다.

개발된 무차원 운동방정식은 정적 처짐에 대한 정해가 존재하는 외팔보 예제를 활용하여 검증하였다. 개발된 무차원 운동방정식의 동적 처짐의 평균값이 요소 수가 증가함에 따라 정적 처짐의 정해에 수렴하는 것을 확인할 수 있었으며, 요소 수가 증가함에 따라 효율성이 나타남을 확인할 수 있었다. 앞서 언급한 바와 같이 해석 효율성은 요소 수 증가에 의한 무차원 변수 T_{ND} 의 증가에 따른 것이다. 또한 탄성 단진자 예제를 통해 절대절점좌표계의 대변형 및 대회전 특징을 확인하였으며, 외팔보 예제와 마찬가지로 요소 수가 증가함에 따라 무차원 운동방정식이 효율적임을 알 수 있었다. 즉 선형 강성행렬을 활용할 경우 요소 수가 충분치 않으면 변형을 정확히 표현할 수 없어 발산할 가능성이 있었으며, 탄성체 해석에서 잠김 현상과 같은 비정상적인 해석 결과가 나타날 수 있으므로 요소 수가 증가할수록 해석에 유리한 무차원 운동방정식이 효율적임을 알 수 있었다.

본 연구에서는 선형 강성행렬을 활용하여 운동방정식을 구성하였으나, 대변형 및 대회전을 표현하기에는 비선형 강성행렬을 유도하는 것이 바람직하다고 판단된다. 또한 오일러-베르누이 보에 비해 자유도가 높은 티모셴코 보(Timoshenko beam)⁽²⁷⁾의 무차원 운동방정식도 개발 가능하며, 평판⁽⁸⁻¹⁰⁾ 및 박판(shell)⁽²⁸⁾에도 적용 가능한 해석 기법이라 판단된다.

후 기

본 연구는 한국생산기술연구원(KITECH) 기관고유사업 및 국방과학연구소(ADD)의 지원을 받아 연구되었음을 밝히며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

(References)

- (1) Shabana, A. A. and Hussein, H. A., 1996, "An Absolute Nodal Coordination for the Large Rotation and Large Deformation Analysis of Flexible Bodies," *Technical Report*, No.MBS96-1-UIC.
- (2) Shabana, A. A., 1997, "Definition of the Slopes and the Finite Element Absolute Nodal Coordinate Formulation," *Multibody System Dynamics*, Vol. 1, pp. 339~348.
- (3) Shabana, A. A., Hussein, H. A. and Escalona, J. L., 1998, "Application of the Absolute Nodal Coordinate Formulation to Large Rotation and Large Deformation Problems," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 120, No. 2, pp. 188~195.
- (4) Shabana, A. A., 2005, *Dynamics of Multibody Systems*, Cambridge University Press, New York, Third edition.
- (5) Dmitrochenko, O., Yoo, W. S. and Pogorelov, D. Y., 2006, "Helicoseir as Shape of a Rotating String (I): 2D Theory and Simulation Using ANCF," *Multibody System Dynamics*, Vol. 15, pp. 135~158.
- (6) Dmitrochenko, O., Yoo, W. S. and Pogorelov, D. Y., 2006, "Helicoseir as Shape of a Rotating String (II): 3D Theory and Simulation Using ANCF," *Multibody System Dynamics*, Vol. 15, pp. 181~200.
- (7) Yoo, W. S., Dmitrochenko, O. and Park, S. J., 2005, "A New Thin Spatial Beam Element Using the Absolute Nodal Coordinates: Application to Rotating Strip," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 33, pp. 399~422.
- (8) Dmitrochenko, O. and Pogorelov, D. Y., 2003, "Generalization of Plate Finite Elements for Absolute Nodal Coordinate Formulation," *Multibody System Dynamics*, Vol. 10, No. 1, pp. 17~43.
- (9) Mikkola, A. M. and Matikainen, M. K., 2006, "Development of Elastic Forces for a Large Deformation Plate Element Based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation," *Journal of Computational and Non-linear Dynamics*, Vol. 1, No. 2, pp. 283~309.
- (10) Mikkola, A. M. and Shabana, A. A., 2003, "A Non-Incremental Finite Element Procedure for the Analysis of Large Deformations of Plates and Shells in Mechanical System Applications," *Multibody System Dynamics*, Vol. 9, pp. 283~309.
- (11) Kim, K. W., Lee, J. W. and Yoo, W. S., 2012, "The Motion and Deformation Rate of a Flexible hose Connected to a Mother Ship," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 26, No. 3, pp. 703~710.
- (12) Omar, M. A., Shabana, A. A., Mikkola, A. M., Loh, A. K. And Basch, R., 2004, "Multibody System Modeling of Leaf Springs," *Journal of Vibration and Control*, Vol. 10, pp. 1601~1638.
- (13) Sugiyama, H. and Suda, Y., 2009, "Nonlinear Elastic Ring Tire Model Using the Absolute Nodal Coordinate Formulation," *IMEchE Journal of Multi-Body Dynamics*, Vol. 223, pp. 211~219.
- (14) Patel, M., Orzechowski, G., Tian, Q. and Shabana, A. A., 2016, "A New Multibody System Approach for

- Tire Modeling Using ANCF Finite Elements,” *IMEchE Journal of Multi-Body Dynamics*, Vol. 230, pp. 69~84.
- (15) Yamashita, H. and Sugiyama, H., 2015, “High-Fidelity ANCF-LuGre Tire Model Using Continuum Mechanics Based Shear Deformable Laminated Shell Element,” *ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics*.
- (16) Bathe, K. J., 1996, *Finite Element Procedures*, Englewood Cliffs, Prentice Hall.
- (17) Bonet, J. and Wood, R. D., 1997, *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- (18) Omar, M. A. and Shabana, A. A., 2001, "Two-Dimensional Shear Deformable Beam for Large Rotations and Deformation Problems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 243, pp. 565~576.
- (19) Berzeri, M. and Shabana, A. A., 2000, “Development of Simple Models for the Elastic Forces in the Absolute Nodal Coordinate Formulation,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 235, No. 4, pp. 539~565.
- (20) Ugural, A. C. and Fenster, S. K., 1995, *Advanced Strength and Applied Elasticity*, Upper Saddle River, Prentice-Hall, Third edition.
- (21) Kawaguti, K., Terumich, Y., Takehara, S., Kaczmarczyk, S. and Sogabe, K., 2007, “The Study of the Tether Motion with Time-Varying Length Using the Absolute Nodal Coordinate Formulation with Multiple Nonlinear Time Scales,” *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 1, No. 3, pp. 491~500.
- (22) Nikraves, P. E., 1988, *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice-Hall Inc.
- (23) Brenan, K. E., Campbell, S. L. and Petzold, L. R., 1996, *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania.
- (24) Newmark, N. M., 1959, “A Method of Computation for Structural Dynamics,” *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol. 85, pp. 67~94.
- (25) Washizu, K., 1968, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, New York.
- (26) Shabana, A. A., 2008, *Computational Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, New York.
- (27) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1970, *Theory of Elasticity*, New York, McGraw-Hill, Inc., Third Edition.
- (28) Yan, D., Liu, C., Tian, Q., Zhang, K., Liu, X. N. and Hu, G. K., 2013, “A New Curved Gradient Deficient Shell Element of Absolute Nodal Coordinate Formulation for Modeling Thin Shell Structures,” *Nonlinear Dynamics*, Vol. 74, pp. 153~164.