

반 무한 평판에 존재하는 반 무한 균열에서 엄밀 해를 이용한 응력확대계수 계산

안 득 만^{*†}

* 부산대학교 기계공학부

Calculation of Stress Intensity Factor K_I Using the Exact Solution in an Infinitely Deep Crack in a Half-Plane

Deuk Man An^{*†}

* Dept. of Mechanical Engineering, Pusan Nat'l Univ.

(Received June 23, 2016 ; Revised October 18, 2016 ; Accepted October 31, 2016)

Key Words: Stress Intensity Factor(응력확대계수), Infinitely Deep Crack(반 무한 균열), Weight Function (가중 함수)

초록: 본 논문은 등방성 재료로 된 반 무한 평판에 존재하는 반 무한 균열에서 엄밀해를 구성하여 응력 확대계수를 계산하였다. H. Tada, P. Paris, G. Irwin의 “The Stress Analysis of Cracks Handbook”에 수록된 공식과 Bueckner의 공식에 엄밀해로부터 구한 균열 면에 작용하는 표면력을 적용하여 응력확대계수를 계산하였다. Bueckner의 공식은 엄밀해와 일치하였고 Tada의 Handbook에 수록된 공식은 엄밀해와 일치하지 않았다. 따라서 Tada의 공식이 오류임을 알 수 있다.

Abstract: In this study, we develop the exact field of mode I in an infinitely deep crack in a half-plane. Using this field, we obtain the exact stress intensity factor K_I . From the tractions on the crack faces induced by exact field, we calculate the stress intensity factor of this field. We compare the results with the stress intensity factor calculated using Bueckner's weight function formula and that calculated by using Tada's formula listed in “The Stress Analysis of Cracks Handbook” It was found that Bueckner's formula yields accurate results. However, the results obtained using Tada's formula exhibit inaccurate behavior.

- 기호설명 -

u, v	: 각각 x 및 y 방향의 변위
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$: x - y 평면에서의 응력
X_n, Y_n	: 면력
ν	: 푸아송의 비
E	: 영의 계수
$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$: 전단 계수
U	: 응력 함수

1. 서 론

구조물의 안전한 설계를 위하여서는 구조물이 허용하는 하중을 정확히 계산하는 것이 필수적이다. 특히 취성(Brittle)구조물인 경우 급속한 파괴로 인하여 인명과 재산의 피해가 예상되므로 정확한 안전 하중의 계산이 매우 중요하다. 취성 파괴를 예방하기 위해서는 구조물에 존재하는 균열을 찾아내고 외부하중과 균열의 형상에 따른 응력확대계수를 계산한 다음 재료의 파괴 인성 치와 비교하여 구조물이 안전한가를 판단한다. 이와 같은 설계에서 기본이 되는 이론이 파괴역학이다.

파괴 역학을 이용한 설계에서 중요한 것은 균열

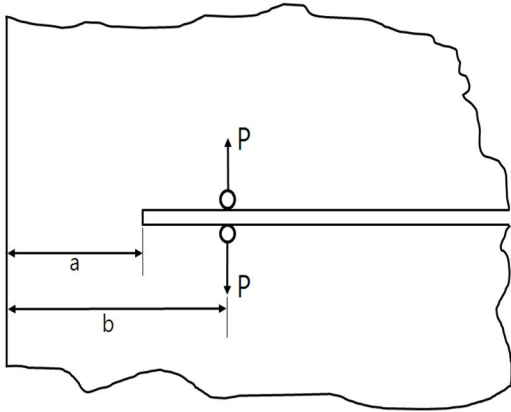


Fig. 1 Nomenclatures for Tada's formula

끝에서의 응력확대계수가 하중과 구조물의 형상에 따라서 어떻게 변화하는가를 표현하는 정확한 식이다. 구조물의 형상이 복잡하고 균열의 형상 또한 복잡하면 응력확대계수를 구하는 것은 거의 수치해석에 의존한다. 수치해석을 수행하기 전에 원하는 응력확대계수가 이미 구해져 있으면 시간과 비용을 줄일 수 있다. 다양한 하중과 균열 현상에 대한 자료는 응력확대계수 Handbook 을 참고하여 찾을 수 있다. 파괴역학 분야의 설계 시 응력확대계수계산에 많이 인용되는 Handbook 은 1973년에 발간된 H. Tada, P. Paris and G. Irwin의 The Stress Analysis of Cracks Handbook^(1,2) (이하, Tada공식)과 1987년에 Y. Murakami가 편집한 Stress Intensity Factor Handbook⁽³⁾이다.

Tada공식의 9.5절에 수록된 Fig. 1과 같은 반 무한 평판에 존재하는 무한 균열에서 균열 면의 윗면과 아랫면에 집중하중 P가 작용할 때 Mode I에서의 응력확대계수는 다음과 같이 주어진다.

$$K_I = \frac{2P}{\sqrt{\pi a}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-(a/b)^2}} F(s) + 3.52 \left(\frac{b}{a} - 0.736 \right) \right] \quad (1)$$

여기서 함수 F(s)는 Tada공식의 9.5절에 그래프로 주어진다. 본 논문에서는 이 식에 오류가 있으며 이 오류를 엄밀 해를 구성하여 증명하고자 한다. 또한 엄밀 해로부터 경계에 작용하는 하중을 구한 다음 Bueckner의 공식을 이용하여 응력확대계수를 구하고 이를 엄밀 해와 비교하고자 한다. 반 무한 평판에 존재하는 반 무한 균열은 다른 형태의 균열 형상에 적용할 수 있는 매우 유용한 자료이므로 정확한 응력확대계수의 값이 요구된다. 따라서 본 연구의 결과는 파괴역학을 이용한 설계에서 매우 중요한 자료로 활용될 것으로 생각된다.

2. Muskhelishvilli의 이론

이 연구에서 다루고자 하는 문제는 선형 등방성 탄성 재료의 구조물에 존재하는 2차원 직선 균열 즉, Griffith균열이므로 Muskhelishvilli의 이론을 사용하여 변위, 응력 등을 2개의 해석함수로 표현한다.⁽⁴⁾ 특히 직선 균열인 경우 Muskhelishvilli의 함수 ϕ, ρ 대신 $\phi, \rho = \phi + z\phi'$ 를 사용하는 것이 직선 균열 표면에서의 경계조건을 표현하는데 있어 편리하다.⁽⁵⁾ 이 함수를 사용하여 $x-y$ 평면에서의 변위 및 응력을 표현하면 다음과 같다.

$$2\mu(u + iv) = \kappa\phi(z) - \overline{\rho(z)} + (\bar{z} - z)\overline{\phi'(z)} \quad (2)$$

$$\sigma_x = \text{Re}[\phi'(z) + 2\overline{\phi'(z)} - \overline{\rho'(z)} + (\bar{z} - z)\overline{\phi''(z)}] \quad (3)$$

$$\sigma_y = \text{Re}[\phi'(z) + \overline{\rho'(z)} - (\bar{z} - z)\overline{\phi''(z)}] \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = -\text{Im}[\phi'(z) - \overline{\rho'(z)} - (\bar{z} - z)\overline{\phi''(z)}] \quad (5)$$

균열 면에 작용하는 면력이 크기는 같고 방향이 반대인 induced 형태이면 $\rho = \phi$ 가 되어 균열 면에 작용하는 압력 $p(x)$ 는 식 (4)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$p(x) = -\frac{d}{dx} 2\text{Re}\phi \quad (6)$$

3. 반 무한 균열을 가진 반 무한 평판에서의 엄밀해의 구성

반 무한 평판에 존재하는 반 무한 균열의 모양은 Fig. 2와 같다. 균열을 포함한 평판이 $x \geq 0$ 에 존재하고 균열은 $x = 1$ 에서 ∞ 까지 있다고 가정하자. 엄밀 해는 대칭의 형상을 이용하여 구성한다. 다음과 같은 2개의 복소함수를 생각하자.

$$R(z) = (1 - z)^{1/2}, \quad S(z) = (1 + z)^{1/2} \quad (7)$$

여기서 위 함수의 가지(branch)는 $z = 0$ 에서 다음과 같은 값을 갖는 함수를 택하였다.

$$R(0) = 1, \quad S(0) = 1$$

함수 $R(z)$ 는 $z \neq \infty$ 와 $1 \leq x \leq \infty$ 를 제외한 복소 평면에서 해석인 함수이고 $S(z)$ 는 $z \neq \infty$ 와 $-\infty < x \leq -1$ 를 제외한 복소 평면에서 해석인 함수이다. $R(z)$ 는 균열 $1 \leq x \leq \infty$ 에서 순수 허수 값

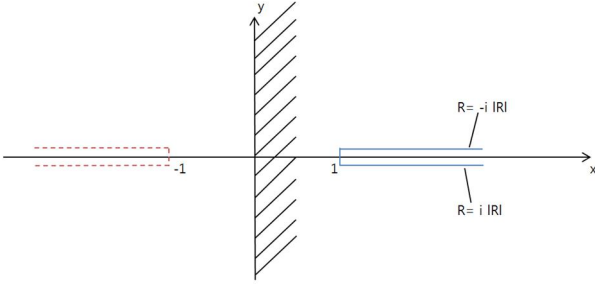


Fig. 2 Configuration of the infinitely deep crack in a right half-plane and image crack

을 가지며 $S(z)$ 는 대칭 균열 $-\infty < x \leq -1$ 에서 순수 허수 값을 가진다. 여기서 함수 $R(z), S(z)$ 는 수직 축 $z = iy$ 를 따라 다음과 같은 거동을 한다. 즉,

$$\overline{R(z)} = S(z), \overline{S(z)} = R(z) \quad (8)$$

이다. 또한 $R(z), S(z)$ 의 미분은 다음과 같이 된다.

$$\frac{dR(z)}{dz} = -\frac{1}{2R(z)}, \frac{dS(z)}{dz} = \frac{1}{2S(z)} \quad (9)$$

이러한 성질 등은 엄밀 해를 구성하는데 있어 경계면 $z = iy$ 에 면력이 작용하지 않게 만드는데 이용할 것이다. 반 무한 평판에서 다음과 같은 함수를 고려하자.

$$\phi(z) = \frac{4-R(z)-3S(z)}{z} + \frac{1}{S(z)} \quad (10)$$

$$\rho(z) = \phi(z) + \frac{8[S(z)-1]}{z} - \frac{4}{S(z)} - \frac{z}{S^3(z)} \quad (11)$$

위 함수에서 분자를 구성하는 함수가 $z = 0$ 에서 0가 되므로 분모에 있는 z 는 $z = 0$ 에서 특이점을 가지지 않는다. 따라서 위 함수는 반 무한 평판에서 균열 면을 제외한 영역에서 해석적이며 $z = \infty$ 에서 다음과 같이 거동한다.

$$\phi(z) = O(|z|^{-\frac{1}{2}}), \rho(z) = O(|z|^{-\frac{1}{2}}) \quad (12)$$

또한 위 함수는 y 축 따라 면력을 발생시키지 않는다. 이에 대한 증명은 다음과 같다. Fig. 3에서 경계를 따라 물체에 작용하는 힘은 다음과 같이 표현된다. 즉,

$$(X_n + iY_n)dS = -id\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right) \quad (13)$$

P 를 다음과 같이 정의하면

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = P \quad (14)$$

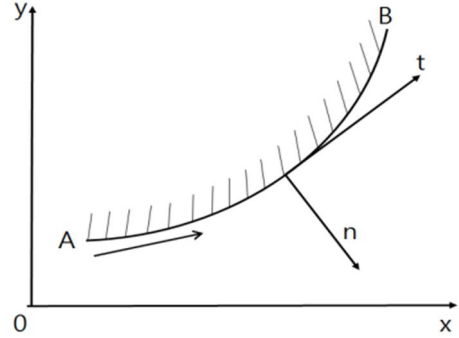


Fig. 3 Sign convention for t and n

P 는 다음과 같이 ϕ, ρ 로 표현된다.

$$P = \phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\rho(z)} = \phi(z) + \overline{\rho(z)} + (z - \bar{z})\overline{\phi'(z)} \quad (15)$$

식 (9)를 이용하여 (10)을 미분하면

$$\phi'(z) = -\frac{4-R-3S}{z^2} + \frac{1}{2zR} - \frac{3}{2zS} - \frac{1}{2S^3} \quad (16)$$

와 같이 된다. 식 (8)로부터 y 에서 $\overline{\phi'(z)}$ 는 다음과 같이 된다.

$$\overline{\phi'(z)} = -\frac{4-R-3S}{z^2} + \frac{1}{R} \quad (17)$$

또한 $\rho(z)$ 는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\rho(z) = \frac{4-R-3S}{z} + \frac{1}{S} + \frac{8(S-1)}{z} - \frac{4}{S} - \frac{z}{S^3} \quad (18)$$

식 (16), (17), 및 (18)을 이용하여 \bar{P} 를 계산하면 $\bar{P} = 0$ 가 된다. 즉, y 축에는 면력이 작용하지 않게 된다. 함수 $\phi(z), \rho(z)$ 에 의한 탄성 장(elastic field)은 구간 $0 \leq x \leq 1$ 에서 두 함수가 실수가 되므로 이 구간에서 전단 응력이 발생하지 않는다. 즉, mode I을 나타낸다. 균열 면에서 $Im\phi = Im\rho = -ImR/x$ 가 되므로 수직 변위 $v(x)$ 는 다음과 같이 된다.

$$v(x) = \frac{\kappa+1}{2\mu} \frac{\sqrt{x-1}}{x} \quad (19)$$

Fig. 4는 균열 면에서의 변위를 보여준다. 균열 면에서의 변위는 항상 양이며 x 가 무한대로 가면 0으로 수렴하게 된다. 균열 면에서의 변위로부터 평면 변형률에서 Mode I의 응력확대계수는 다음과 같이 정의된다.⁽⁶⁾ 즉,

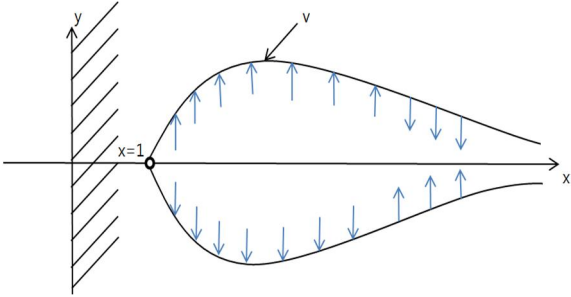


Fig. 4 Crack opening displacement and tractions acting on crack faces

$$v(x) = \frac{4(1-\nu^2)}{E} K_I \frac{\sqrt{r}}{2\pi} \quad (20)$$

여기서 r 은 균열 끝에서 거리를 나타낸다. 식 (19)에서 평면 변형률에서 κ 는 $(3 - 4\nu)$ 이다. 식 (19)과 식 (20)을 비교하면 응력확대계수는 다음과 같이 엄밀한 값으로 주어진다.

$$K_I = \sqrt{2\pi} \quad (21)$$

다음으로 함수 $\phi(z)$, $\rho(z)$ 에 의하여 균열 면에 작용하는 압력 $p(x)$ 를 계산하자. 균열 면에서 압력은 $p(x) = -\sigma_y(x)$ 가 되므로 식 (6)으로부터

$$p(x) = -\frac{d}{dx} \text{Re}(\phi + \rho); 1 \leq x \quad (22)$$

가 된다. 함수 $R(z)$ 는 균열에서 순수 허수를 가지므로 균열 면에 발생하는 압력에 영향을 주지 않는다. 따라서

$$\text{Re}(\phi + \rho) = \frac{2s}{x} - \frac{2}{s} - \frac{x}{s^3} = \frac{2}{xs} - \frac{x}{s^3} \quad (23)$$

가 되므로 압력 $p(x)$ 는 다음과 같이 된다.

$$p(x) = \frac{2s}{x^2} - \frac{1}{xs} - \frac{3x}{2s^5} \quad (24)$$

위 식에서 $x = 1$ 에서 압력은 약 1.8의 양(+)의 값을 가지며 x 가 9.142에서 거의 0이 되고 x 가 이 값을 초과하면 압력의 방향이 바뀐다. x 가 매우 큰 값일 때 압력은 다음과 같은 거동을 하는 음(-)의 값을 가진다.

$$p(x) \sim -\frac{1}{2}x^{-3/2} \quad (25)$$

압력이 균열 면에 작용하는 정성적인 형태는 Fig. 4와 같다.

4. H.Tada, P.Paris, G.Irwin의 The Stress Analysis of Cracks Handbook에 의한 응력확대계수 K_I 계산

외부 하중이 균열 면에 작용하는 압력일 때 균열 끝에서 발생하는 응력확대계수는 균열 면에서의 가중함수 $m(x)$ 를 사용하여 나타내면 다음과 같이 된다.

$$K_I = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_1^\infty m(x)p(x)dx \quad (26)$$

여기서 $m(x)$ 는 반 무한 평판에서의 가중함수(weight function)이다.⁽⁵⁾ 참고문헌⁽²⁾에 주어진 Fig. 5에서의 응력확대계수는 식 (1)로 주어지므로 가중함수는 b 가 무한대로 가면 즉, x 가 무한대로 갈 때

$$\frac{m(x)}{x} \sim 3.52 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (27)$$

와 같은 거동을 하게 된다. 균열 면에서의 압력이 식 (24)와 같아 주어질 때 식 (1)을 식 (26)에 대입하면 우리가 구성한 엄밀 해에 의한 응력확대계수 $K_I = \sqrt{2\pi}$ 가 나와야 한다. 그러나 가중함수가 무한대에서 식 (27)과 같이 거동하면 압력 $p(x)$ 가 식 (25)와 같이 주어질 때 응력확대계수를 구하는 식 (26)의 적분이 존재하지 않게 된다. 따라서 참고문헌⁽²⁾에 수록된 공식이 오류임을 알 수 있다. 특히 단위 집중 하중이 균열 끝에서 무한대인 점에 작용하면 Tada의 가중함수는 식 (27)과 같은 거동을 하므로 식 (26)으로부터 응력확대계수가 무한대로 발산한다.

5. Buenkner의 Edge균열을 이용한 응력확대계수 K_I 계산

Bueckner는 Fig. 5와 같이 반 무한 평판에 존재하는 길이 1인 균열, 즉, Edge 균열에서의 가중함수는 참고문헌⁽⁵⁾에 다음과 같이 계산하였다.

$$m^*(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} [1 + A_1(1-x) + A_2(1-x)^2] \quad (28)$$

여기서 $A_1=0.6147$, $A_2=0.2502$ 이다. 위 식에서 x 대신 $1/x$ 를 대입하면 반 무한 평판에 존재하는 반 무한 균열에서의 가중함수가 구해진다. 즉,

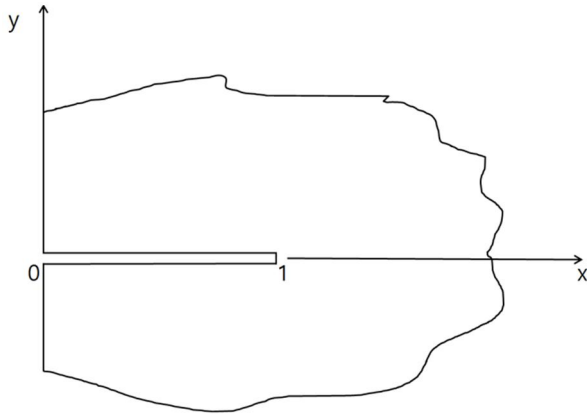


Fig. 5 Edge Crack in a half plane

$$m(x) = m^*\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\left[1 + A_1\left(1 - \frac{1}{x}\right) + A_2\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2\right] \quad (29)$$

식 (26)에 균열 면에 작용하는 압력인 식 (24)와 가중함수 $m(x)$ 를 대입하면 K_I 이 구해진다. 식 (26)에서 적분 변수 x 를 $1/x$ 로 치환하면 다음과 같이 된다.

$$K_I = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 m\left(\frac{1}{x}\right) p\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2} \quad (30)$$

따라서 K_I 는 다음과 같이 된다.

$$K_I = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{1 + A_1(1-x) + A_2(1-x)^2}{\sqrt{1-x}} p\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2} \quad (31)$$

여기서

$$\frac{p\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} \left[1 + 2x - \frac{3}{2(1+x)^2}\right] \quad (32)$$

이다. 위 식에서 양 끝 단에서 특이점을 없애기 위하여 x 를 $\sin^2\theta$ 로 치환하여 심슨(Simpson)의 공식을 사용하여 수치 적분하면 다음과 같은 근사값이 구해진다.

$$(K_I)_{approx} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} 3.1588 \quad (33)$$

이 값과 엄밀 해 $K_I = \sqrt{2\pi}$ 를 비교하면

$$\frac{(K_I)_{approx}}{(K_I)_{exact}} \approx 1.005 \quad (34)$$

된다. 그리고 단위 집중 하중이 균열 끝에서 무한

대인 점에서 작용하면 Bueckner의 가중함수는 식 (29)로부터 1.8649가 되므로 응력확대계수는 식 (26)에서 1.488이 된다.

6. 결론

본 논문에서는 H. Tada, P. Paris, G. Irwin의 *The Stress Analysis of Cracks Handbook*의 9.5절에 기술된 반 무한 평판에 존재하는 반 무한 균열에서의 응력확대계수의 공식이 오류인 것을 엄밀 해를 구성하여 증명하였다. 정확한 응력확대계수는 Bueckner에 의한 엣지 균열에서의 가중 함수를 이용하여 구할 수 있다. 실제로 이렇게 구한 가중함수를 이용하여 엄밀 해에 대한 응력확대계수를 구한 결과 오차는 0.5% 이내였다. Tada의 공식 (27)과 Bueckner의 공식 (29)를 비교하면 집중 하중이 균열 끝에 작용하는 경우 두 식의 가중함수는 같은 결과를 준다. 그러나 단위 집중 하중이 균열 끝에서 무한대인 점에 작용하면 Tada 공식에 의한 응력확대계수는 무한대로 되고 Bueckner의 공식에 의한 응력확대계수는 1.488이 된다.

후 기

이 논문은 부산대학교 기본연구 지원사업(2년)에 의하여 연구되었음.

참고문헌 (References)

- (1) Tada, H., Paris, P. and Irwin, G., 1973, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation.
- (2) Tada, H., Paris, P. and Irwin, G., 2000, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Third Edition, The American Society of Mechanical Engineers, New York.
- (3) Murakami, Y. (Editor-in-Chief), 1987, *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press, Vol. 1 and 2.
- (4) Muskhelishvili, N. I., 1977, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff International Publishing Leigen.
- (5) Bueckner, H. F., 1973, "Field Singularities and Related Integral Representations," in *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Edited by G.C. Sih, Noordhoff International Publishing Leiden, pp. 239~314.
- (6) Broek, D., 1982, *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers, The Hague.