https://doi.org/10.7236/JIIBC.2017.17.1.59
JIIBC 2017-1-8

오일러(Euler)와 샤논(Shannon)의 만남

A Meeting of Euler and Shannon

이문호*

Moon-Ho Lee*

요 약 세상에 꽃고 여자도 아름답지만 오일러 공식과 대칭이 가장 아름답다. 샤논은 무선통신과 정보이론이 뿌리가 되는 샤논 정리를 오일러 정리에 기반해 정보와 통신에 응용했고, 오늘날 Smart Phone의 원리다. 그들의 만난 점은 MIMO(multiple input and multiple output) 다중안테나 다이버시티가 e^{-SNR} 이다. 본 논문에서는 세상에서 가장 아름다운 공식 $e^{\pi i}+1=0$를 발견한 오일러와 무선통신과 정보통신을 탄생시킨 $C=B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$을 발견한 샤논의 공식을 간단히 유도하고 이 두 거장은 샤논 한계(Shannon limit)에서 만남을 증명하고 숨어있는 비밀이 무엇인가를 밝힌다. 또한 대수학코딩이론(Algebraic coding theory)와 삼각함수 속에 숨겨진 비밀은 대칭(symmetric)과 Element-wise Inverse가 됨을 발견한다.

Abstract The flower and woman are beautiful but Euler's theorem and the symmetry are the best. Shannon applied his theorem to information and communication based on Euler's theorem. His theorem is the root of wireless communication and information theory and the principle of today smart phone. Their meeting point is e^{-SNR} of MIMO(multiple input and multiple output) multiple antenna diversity. In this paper, Euler, who discovered the most beautiful formula($e^{\pi i}+1=0$) in the world, briefly guided Shannon's formula ($C=B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$) to discover the origin of wireless communication and information communication, and these two masters prove a meeting at the Shannon limit, It reveals something what this secret. And we find that it is symmetry and element-wise inverse are the hidden secret in algebraic coding theory and triangular function.

Key Words : D Euler, Shannon, Meeting Point at Shannon limit.

Ⅰ. 서 론

1783년 스위스 수학자인 오일러(Euler, 1707~1783) : 학문적으로 방대한 업적을 남긴 만큼 오일러의 인생도 파란만장했다. 그는 20대 초반의 젊은 나이에 병으로 한쪽 눈을 실명하는 불운을 겪기도 했다. 러시아로 돌아간 말년에는 수학문제를 풀기위해서 사흘 밤낮을 꼬박 몰두하다 다른 쪽 시력마저 잃게 된다. 당시 파리아카데미에서는 수여하는 권위 있는 상을 수상하고자 저명한 수학자들도 몇 개월 붙잡는 어려운 문제를 단 사흘 만에 풀었

*정회원, 전북대학교 전자정보공학부(교신저자)
접수일자 : 2016년 11월 10일, 수정완료 : 2016년 12월 10일
게재확정일자 : 2017년 2월 3일

Received: 10 November, 2016 / Revised: 10 December, 2016 / Accepted: 3 February, 2017
*Corresponding Author: moonho@jbnu.ac.kr
Dept: Division of Electronic Engineering, Chonbuk National University, Korea

는데 너무나 집중한 나머지 실명한 것이었다. 양쪽 눈을 모두 잃었지만 오일러는 비서에게 자신의 생각들을 받아 적게 하는 방식으로 계속해서 훌륭한 업적을 남겼다[2,5].

오일러는 스위스 바젤 출신의 수학자로 주로 러시아에서 활동했다. 오일러의 아버지는 목사였는데 수학에 남다른 재능이 있었다. 그는 오일러가 교회에 들어오기를 바랐지만 오일러는 수학에 대한 열정을 버리지 못하고 바젤대학에 입학, 신학을 전공한다. 그곳에서 오일러는 스위스 수학자 베르누이의 관심을 끌기에 충분히 출중한 학생이었다. 베르누이는 오일러의 아버지를 설득해, 오일러의 전공을 신학에서 수학으로 바꾸는데 기여했다.

오일러는 1724년 열일곱의 나이로 수학 석사학위를 받았다. 바젤대학에서 학위를 받은 지 얼마 지나지 않아 오일러는 1727년 러시아 황제로부터 초청을 받고 러시아로 가게 된다. 1730년 성 페테르부르 (레닌그라드의 옛 지명) 고학아카데미에서 물리학 교수로 재직하게 되는데 1733년에는 수학교수로 자리를 굳혔다. 이후 러시아 황제 안나 이바노바가 1740년 숨질 때까지 오일러는 러시아에서 줄곧 연구 활동을 했다.

베를린으로 자리를 옮긴 오일러는 1741년 베를린 과학아카데미의 수학교수자리에 오르기도 했지만 1766년 캐서린 여제의 부름을 받고 다시 성 페테르부르크로 돌아간다. 러시아에서 여생을 보냈을 정도로 고향인 스위스보다는 러시아에서 주로 활동했다. 러시아가 스위스보다 훨씬 학문탐구에 좋은 조건을 갖췄기 때문이었다.

오일러는 수학과 물리학의 천재적 거두(巨頭)였다. 그는 열거하기 어려울 정도로 숱한 업적을 남겼다. 수학에 있어 대수와 확률론의 기초를 다지는데 공헌했고 미적분학과 정수론, 기하학 등 방대한 분야에 걸쳐 손길을 뻗쳤다.

특히 기하분야에 여러 가지 논제를 제기했다. 예를 들어 그리스의 '완성체' (Perfect Bodies)라는 개념에 숨은 수학에 대해 탐구했다. 고대 그리스인들은 완성체가 정다면체 형태로 만들어지다고 믿었다. 정다면체에는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십면체, 정이십면체 등 다섯 개만이 존재한다. 이 개념들은 르네상스 때까지 잊혀졌다가 레오나르도 다빈치와 파치올리에 의해 다시 연구됐다. 케플러는 완성체를 행성궤도와 연결 지으려는 시도까지 했다.

현대 해석기하의 많은 내용들이 오일러에서 기인하고 있다고 해도 과언이 아닐 정도로 그의 업적들은 중요한 위치를 차지하고 있다. 무한수열에 관한 이론도 전개했고 삼각함수론의 기반도 제공했다. 일생동안 5백여 권의 책과 논문들을 출판했는데도 사후에도 4백여 권의 책이 출판됐다. 그 중 '무한소해석입문' (Introductio in Analysin Infinitorum, 1748)은 순수해석학의 기본서로 평가받고 있다.

여기에 1755년 출판된 '미분학' (Institutiones Calculi Differentialis)으로 이어진 해석학 시리즈는 '적분학' (Institutiones Calculi Integralis, 1768~1770) 세 권의 출판으로 완결됐다. 감마함수나 베타함수는 오일러가 만들어낸 유명한 함수로 그 내용이 해석학 시리즈에 담겨있다. 스승인 베르누이가 제기했던 측지선에 관한 오일러의 대략적인 아이디어는 '곡선의 최대최소정리' (Curvarum Maximi Minimive Proprietate, 1744)에 실렸다. 1770년에는 대수분야 책인 '대수입문' (Anleitung zur Algebra)을 출판했다. 이 책에는 디오판토스 대수에 관한 내용이 실려 있다. '페르마의 마지막 정리'중 일부에 대한 해답도 실려 있다.

대부분의 업적이 순수수학과 관련됐음에도 불구하고 오일러는 천문학이나 물리학 등 다른 분야에 지대한 공헌을 했다. 역학의 기초를 다지기도 한 그는 '운동원리' 개념을 소개하고 강체운동을 처음으로 설명해냈다. 행성과 혜성의 운동도 분석했다. 한편 광학에도 흥미를 가졌던 오일러는 1770년에서 1771년사이 '굴절광학' (Dioptrica) 이라는 제목의 세권의 시리즈를 출판한다. 게다가 물리학의 기반업적과 수학 철학의 기본원리에 대해서도 집필했다.

여러 분야에 업적을 남긴 오일러는 과학 분야뿐만 아니라 철학에도 관심을 기울였다. 베를린 시절 철학적 논쟁에 곧잘 관여했던 그는 특히 볼테르와의 논쟁을 즐겼다. 불행하게도 철학적 능력의 한계로 가끔씩 오류를 범해 좌중의 웃음거리가 되기도 했다고 한다. 하지만 러시아로 돌아간 그는 복수의 기회를 갖게 됐다. 캐서린 여제의 궁에 유명한 프랑스 철학자 디드로가 초대됐다. 자신의 통치령을 무신론으로 개종하려 했던 캐서린에 반(反) 디드로의 논쟁에 염증을 느낀 여제가 오일러에게 디드로의 입을 막아버리도록 명했다.

수학적 지식이 희박했던 이 프랑스 철학자에게 하루는 신의 존재를 수학적으로 증명해보라고 누군가가 제의를 했다. 복수의 기회를 놓칠 리 없는 오일러. 그에게 다가가 "$\frac{(a+bn)}{n}=x$이므로 신은 존재합니다. 맞습니까?"

The Journal of The Institute of Internet, Broadcasting and Communication (IIBC)
Vol. 17, No. 1, pp.59-68, Feb. 28, 2017. pISSN 2289-0238, eISSN 2289-0246

라고 말했다. 디드로는 오일러의 말을 도저히 이해할 수 없어 대답을 하지 못하고 쩔쩔맸다. 여기저기서 터져 나온 폭소에 당황한 디드로는 프랑스로 돌아가버렸다고 한다.

1771년에는 집에 불이 나 많은 원고들이 불에 타버렸고 부인과 하인이 가까스로 오일러를 구한적도 있었다. 오일러는 뇌졸중으로 숨을 거뒀는데 수학자답게 짧게 단 한마디의 유언 "나는 죽는다" (I die)를 남겼다고 한다. 오일러는 역사상 가장 다재다능한 과학자로 여겨지고 있다. 많은 역사가들이 그를 아르키메데스나 뉴턴 또는 가우스[3]라 칭하기를 주저하지 않는다.

한편, 샤논(Claude E. Shannon, 1916~1201)은 1916년 미국 미시간주에서 출생하였다. 미시간대학 졸업 후 메사추세츠공과대학(MIT)대학원의 전기공학과에서 수학하고 1940년에 수학박사 학위를 받았다. 이 대학에는 위너 박사가 있었으므로 수학에서 위너로부터 강한 감화를 받았다. 1941년 국가 연구원이 되는 동시에 벨 전화 연구소에 복직해서 통신 공학과 컴퓨터 연구에 몰두했다. 샤논의 위대한 발견은 1948년에 발표한 정보이론이다. 그런데 샤논은 노벨상은 받지 못했다.

그런데, Euler와 Shannon은 어디에서 만날까, Chernoff Bound와 샤논 limit인 -1.59 dB에서 만남을 보인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. Ⅱ장에서는 오일러의 주요 학문적 업적에 대해 서술하고, Ⅲ장에서는 샤논의 주요 학문적 업적에 대해 서술하며, Ⅳ장에서 Chernoff Bound에 대해 다루고 마지막으로 Ⅴ장에서 결론을 맺는다.

II. 오일러의 주요 학문적 업적

1. 0의 역사

흥미롭게도 우리가 흔히 사용하는 '0' (zero)은 1,2,3,……이런 자연수들보다도 훨씬 뒤에 생긴 수이다. 약 1천5백여 년간 부정확한 계산이 이어져오다 B.C.300년경 바빌로니아인들에 의해 0의 개념이 생겨났다. 0의 발견은 수학사에 있어서 획기적인 발견이었다. 하지만 이 시기 0은 정확한 개념이 아니었고 계산에 있어 부가적인 도구였을 뿐이었다. 0은 '음수'의 개념이 정의되고 발전함에 따라 그 개념이 확실시 됐다. 음수와 0이 발견됐을 당시 혁명적인 개념이었음에 틀림없다. 18세기 수학자 오일러는 무한의 개념보다도 음수와 0의 개념이 수학에 있어 훨씬 더 중요한 자리를 차지한다고 역설했다. 18세기에는 음의 해가 버려졌던 것이 상례였으나 오일러는 수학사를 꿰뚫어 보는 혜안을 가졌던 것이다.

2. 오일러 공식

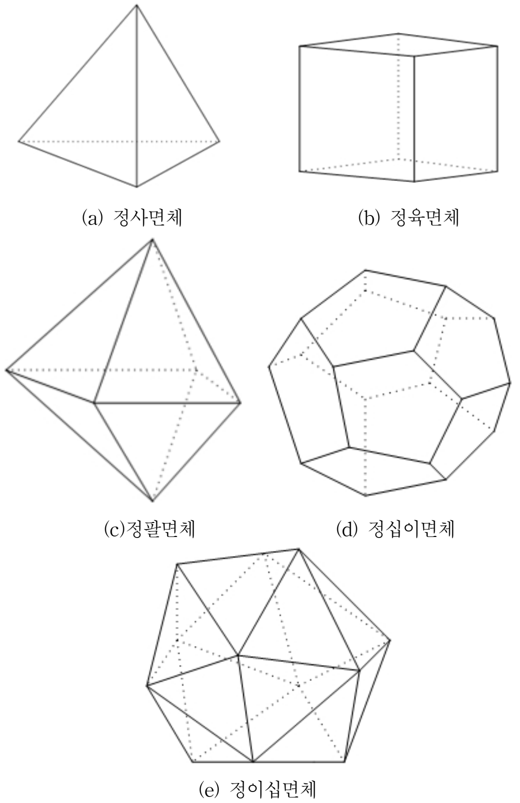
도형(평면도형이나 입체도형)의 면의 수 F, 꼭지점의 수 V, 변의 수 E 사이의 관계식이 오일러공식이다. 오일러공식은 다음과 같다.

$$F+V=E+2 \quad \text{또는} \quad F+V-E=2 \tag{1}$$

예를 들어 오일러가 관심을 가졌던 완성체에 응용해 보면 그림 1과 같다.

예를 들어 정십이면체는 F + V = 20 + 12 = 30 +2

	정사면체	정육면체	정팔면체	정십이면체	정이십면체
F	4	6	8	20	12
V	4	8	6	12	20
E	6	12	12	30	30



(a) 정사면체 (b) 정육면체 (c)정팔면체 (d) 정십이면체 (e) 정이십면체

그림 1. 각종 면체
Fig. 1. Each dodecahedron.

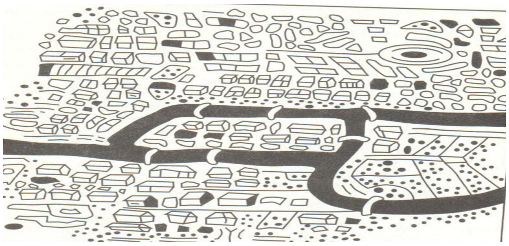


그림 2. 쾨리스 베르그 다리
Fig. 2. The Bridge of Konisberg.

3. 7다리 문제

18세기 초 프러시아의 옛도사 쾨니히베르크의 중심을 흐르는 프레겔강에 7개의 다리(*필자는 2014년 9월 7-13일간 국제학회에 참석하여 그 다리를 직접 찾아가 봤는데 옛 자취만 있었다.)가 놓여있었다. 당시 시민들 사이에 다음과 같은 문제가 제기됐다.

같은 다리를 두 번 이상 지나지 않고 이들 7개의 다리를 꼭 한번씩 모두 건널 수 있을까?

오일러는 같은 다리를 두 번 이상 지나야만 한다는 사실을 그림으로 증명해냈다. 오일러는 다리의 수가 홀수이기 때문에 불가능하다고 밝혔다. 오일러의 해법은 오늘날 '그래프이론' (Graph theory)으로 알려진 수학분야를 여는 역할을 했다. 이 7다리 문제는 실생활에서 얼마나 많은 수학을 찾을 수 있는지를 보여주는 문제다.

4. 오일러는 현대수학의 많은 기호들을 표준화하는 데도 큰 역할을 했다.

파이(π) : 많은 수학자들이 원주율을 계산해내는데 열중했고 이 원주율은 일반대중에게 3.14159…로 잘 알려져 있다. 하지만 이 원주율을 기호화하는 것은 18세기에 들어서야 시작됐다. 오일러는 1736년 쓴 논문집에서 원주율을 p로 나타냈다. 함수를 $f(x)$로 표기하거나 삼각형의 세변의 길이를 소문자 a, b, c로 표현하고 삼각형의 내접원의 반지름을 r, 외접원의 반지름을 R로 표현한 것도 오일러다.

5. 세상에서 가장 아름다운 공식 : $e\pi i + 1 = 0$

자연로그 e, 허수를 표현하는 j와 감마함수도 오일러의 작품이다. 게다가 삼각값을 분수로 나타낸 것도 오일러이다.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

$$=2.71828 \qquad (2)$$

그러면,

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}=2.5, \qquad \frac{1}{3!}=0.1666666\cdots$$

$$\frac{1}{4!}=0.0416666\cdots, \quad \frac{1}{5!}=0.0083333\cdots$$

$$\frac{1}{6!}=0.0013888\cdots, \quad \frac{1}{7!}=0.0001984\cdots$$

$$\frac{1}{8!}=0.0000248\cdots, \quad \frac{1}{9!}=0.0000027\cdots$$

$$\frac{1}{10!}=0.0000002\cdots, \quad \frac{1}{11!}=0.0000000\cdots$$

………………………………………………

$$e = 2.718281$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (3)$$

증명 : 만일 $n \le x \le n+1$ (n is integer)

$$1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}. \qquad (4)$$

그렇다면,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \qquad (5)$$

조건

(i) If $x\to\infty$ and $n\to\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e.1=e \qquad (6)$$

한편,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e \qquad (7)$$

식 (4)로부터

$$e\ge\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\ge e \quad ,$$

그리고 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$ (8)

(ii) $x\to-\infty$, 그리고 $x=-y\ (y>0)$, 그렇다면

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

$$=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right). \qquad (9)$$

따라서

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e \qquad (10)$$

Ⅲ. 샤논의 주요 학문적 업적

정보통신공학 분야에서도 그 이전에는 정보라는 것의 존재가 명료하게 인식되지는 못했고, 주로 통신공학의 목적은 파형의 충실한 전송에 있다고 보았다. 그러나 제2차 대전을 경계로 하여 FM통신과 펄스통신의 급격한 발달로 통신공학의 목적은 파형의 충실한 전송은 물론이고, 보다 본질적인 과제는 파형에 의해 운반되고 있는 정보의 에러없는 전송이라는 것에 눈을 뜨게 되었다. 샤논이 정보량의 개념을 얻기에 이른 것은 이와 같은 배경에 연유한 것이었다.

샤논이 이와 같이 정보 그 자체를 추구하여 드디어 정보이론을 확립하는데 성공하게 된 배경에는 이 연구가 Bell 전화연구소에서 행해졌다는 사실을 간과할 수 없다. Bell 전화연구소는 통신기술을 주된 대상으로 하는 연구소로서 통신공학 분야에 있어 오랜 세월 동안의 성과의 축적이 있었다. 당시의 통신공학에서는 정보 그 자체의 존재가 명확히 인식되어 있지 않았고, 통신공학의 목적은 단지 파형의 충실한 전송에 있다고 보았다. 그러나 이 파형 그 자체는 정보의 하나의 표현수단인데 반해 정보에 대해 명확한 의식은 없었다고 하더라도 그때에 오늘날 정보라 불리는 것이 파형으로 오랜 세월에 걸쳐 취급되어 왔다.

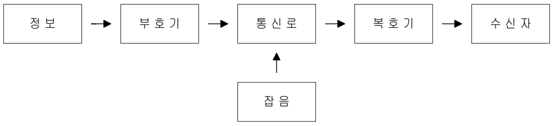


그림 3. 샤논의 통신계 모델
Fig. 3. Communication model of Shannon

그림 3은 샤논의 통신계 모델이다[1].

1948년 C.E. Shannon은 정보에 확률개념을 도입하여 정보를 비트로 표현하고 계산된 정보량 및 정보 전달 속도가 통신로 용량을 넘지 않는 범위 내에서는 오류에 장애됨이 없이 정보전달이 가능하다고 통신로 부호화정리를 제창하였다. 그러나 부호화와 복호에 관한 구체적인 방법은 제시되지 않았다. 이 추상적인 정보이론을 토대로 발전된 부호이론은 통신사에 대혁명을 일으켰으며 이야말로 현대 디지털 데이터통신의 핵심이고 디지털 통신계와 컴퓨터 기억계의 신뢰성 향상에 지대한 공헌을 해왔다 해도 과언이 아니다.

샤논 정리 :

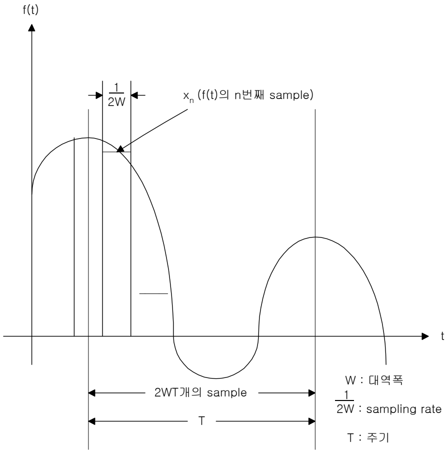


그림 4. 연속파형의 sample
Fig. 4. Serial wave sample.

채널 용량 개념의 중요성은 Shannon의 정보이론정리라 부르는 유명한 정리에서부터 유래되었는데 그 내용은 다음과 같다. C를 이산무기억 채널의 용량, H를 초당 r개의 신호들을 발생하는 이산정보원 엔트로피라 할 때, 만약 $rH \leq C$이면 전원의 출력은 채널상에서 임의의 작은 오차확률을 갖고 전송될 수 있는 코드화 방법(coding scheme)이 존재한다. 이 정리의 역은 $rH > C$이면 오차가 없이 메시지를 전송할 수 없다는 것을 설명한다. 또한 채널 정리는 잡음이 존재할 때 오차가 없이 전송할 수 있음을 나타내나 부호화 방법이 존재함을 설명하였을 뿐이고 그것들을 구성하는 방법을 제시하지는 못하였다.

Shannon으로부터 유래된 또 하나의 중요한 결과는 대역-제한된 백색 가우시안 잡음과 평균전력제안을 갖는 연속(continuous) 채널의 채널 용량을 정의한다.

유한 대역폭을 갖는 continuous signal을 전송하는 channel은

$\frac{1}{2W} \times$ (주기 T 동안의 sample(x_n)의 갯수) = T

$\therefore$ sample의 갯수 = $2WT$이다.

한편, 거리는 유클리디언(Euclidean)

- 1차원 : $d = \sqrt{x_1^2}$
- 2차원 : $d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
- 3차원 : $d = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$

⋮

-n차원 : $d = \sqrt{\sum {x_n}^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}$

- $2WT$차원 : $d = \sqrt{\sum_{k=1}^{2WT} {x_k}^2}$; 주기 T안에서의 sample을 생각해 볼때, sample(xn)은 2WT개 존재. 즉, 2WT개의 X_n이 존재한다.

또한

$$E = \frac{1}{2W} \sum {x_n}^2 \quad \Rightarrow \quad \sum {x_n}^2 = 2WE$$
$$d = \sqrt{\sum {x_n}^2} \quad \Rightarrow \quad d^2 = \sum {x_n}^2 = 2WE = 2PT \tag{11}$$

E : Sample당 에너지 P : Sample당 전력

· 순수 signal의 2WT차원에서의 영역

$\Rightarrow$ radius = $\sqrt{2WPT}$

volume = $k(\sqrt{2\wp T})^{2WT}$

· N 크기의 noise power를 갖는 Noise의 영역

$\Rightarrow$ radius = $\sqrt{2WTN}$

volume = $k(\sqrt{2WTN})^{2WT}$

$\Rightarrow$ 이것이 2WT개 존재

noise가 첨가된 signal의 영역

$\Rightarrow$ radius = $\sqrt{2WT(P+N)}$

$$\text{volume} = k[\sqrt{2WT(P+N)}\, RIGHT]^{2WT} \tag{12}$$

□ Channel Capacity의 Limit

i) noise가 첨가된 M개의 sample을 고려하면 M개의 작은 구(sphere)들이 서로 겹치지 않기 때문에 큰 구는 작은 구의 최소한 M배 이상이 된다. 즉,

$$k[\sqrt{2WT(P+N)} \geq MK(\sqrt{2WTN^{2WT}} \tag{13}$$

$$M \leqq \left(\sqrt{\frac{N+P}{N}}\right)^{2WT} = \left(1 + \frac{P}{N}\right)^{TW} \tag{14}$$

양변에 log를 취하면 $\log M \leqq TW \log\left(1 + \frac{P}{N}\right)$

channel capacity의 upper limit

$$\frac{1}{T}\log M \leqq W \log\left(1 + \frac{P}{N}\right) \tag{15}$$

ii) M개의 구들은 각각 signal의 code 하나하나를 각각 나타낸다.

즉, 구 하나하나는 각 sample들(x_n) 하나하나를 나타낸다.

code의 평균 error확률을 E_{av}라 하면

$$\frac{1}{T}\log M \leqq W \log\left(1 + \frac{P}{N}\right) + \frac{1}{T}\log E_{av} \tag{16}$$

(여기서, $E_{av} < 1$, $\log E_{av} < 0$)

(1) code의 선택에 있어서 error율은 평균 error율만큼 낮아야 한다.

(2) T가 충분히 크면 $\frac{1}{T}\log E_{av}$ 는 충분히 작게 된다.

$$\Rightarrow \text{그러면 } \frac{1}{T}\log M \approx W\log\left(1+\frac{P}{N}\right)$$

$$\text{즉, } lub\left\{\frac{1}{T}\log M\right\} = W\log\left(1+\frac{P}{N}\right) \quad (17)$$

수식에서, lub는 최소 가능값을 의미한다.

식(16)과 식(17)에서

$$\frac{1}{T}logM = W\log\left(1+\frac{P}{N}\right) \quad (18)$$

가 된다. 즉, Shannon의 channel capacity의 limit값이 다음과 같음을 알 수 있다. 즉

샤논의 정리는 다음과 같다.

$$C = W\log\left(1+\frac{P}{N}\right) \quad (19)$$

Ⅳ. Chernoff Bound

단위 계단함수 $u(x)=1,\ x \geq 0$ 와 Random 변수 $X \geq x$ 에서

$$P_r(X \geq x) = \int_x^{\alpha} f_x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u_x(t-x)f_x(\tau)d\tau = E[u(X-x)] \quad (20)$$

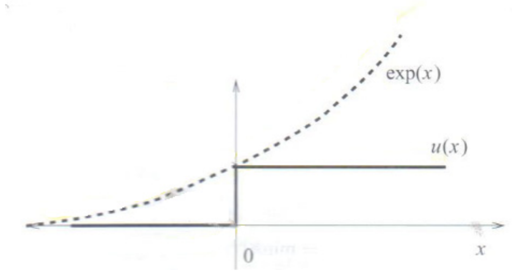


그림 5. 계단함수와 지수함수간이 Upper Bound
Fig. 5. Upper bound between step and exponential function.

여기서 $f_x(\tau)$는 X의 확률밀도함수이다. 예를 들어 $u(x) \leq e^x$ 일 때, $P_r(X \geq x) \leq E\left[e^{(X-x)}\right]$ 보다 일반적인 식은 다음과 같다.

$$P_r(X \geq x) \leq E\left[e^{\lambda(X-x)}\right], \quad \text{여기서 } \lambda \geq 0 \quad (21)$$

(4.2)은 Chernoff Bound이다.

예제. X 가 Gaussian Random Variable이고 평균이 μ, 분산이 σ^2, X의 mgf(Moment Generate Function) 는 다음과 같다[4].

$$E\left[e^{\lambda X}\right] = e^{\lambda M} + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2 \quad (22)$$

이때 Q를 구해보면, Chernoff Bound는

$$P_r(X \geq x) \leq \min e^{-\lambda x} e^{\lambda\mu + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2} = \min_{\lambda \geq 0} e^{\lambda(\mu - x) + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2} \quad (23)$$

최소항

$$\lambda^* = \arg\min e^{\lambda(\mu-x)+\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2} = \max\left\{0, \frac{x-\mu}{\sigma^2}\right\} \quad (24)$$

Chernoff Bound : $P_r(X \geq x) \leq e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$P_{err} \leq e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = e^{-SNR/2} \quad (25)$$

$$\text{따라서 } Q(x) \leq \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \quad (26)$$

Q error 함수와 Cheronff Bound이다.

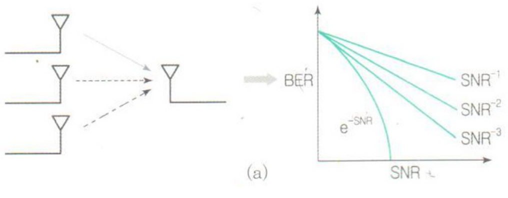


그림 6. 안테나 다이버시티(Diversity)이득
Fig. 6. Antenna diversity gain.

그림 6 는 안테나 다이버시티 전송기법인데 송신단의 여러 안테나가 동일 정보를 내포하는 신호를 전송하고 여로 경로의 독립적인 감쇄를 거쳐 수신단에 도착해서 다중경로 감쇄채널에 의한 성능열화를 극복하는데 max $\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$ => e^{-SNR} 에 접근한다.

Ⅴ. 샤논 Limit : 오일러와 샤논이 만나는 점 –1.59 dB

(2) 식인 e 와 샤논의 정보이론 식 (19)는 어디서 만날까? -1.59 dB에서 만난다.

(19) 식에서 $C = W \log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$ (27)

이때 C는 채널 용량, W는 대역폭, S는 신호전력, N은 잡음전력이고 $N = N_0 W$이다[4].

$$\frac{C}{W} = \log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) \tag{28}$$

이때 $\frac{S}{N_0 C} = \frac{E_b}{N_0}$, E_b는 비트 에너지이고 Rate $R \le C$이다. (29)

윗 식은 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\frac{C}{W} = \log_2\left(1+\frac{E_b}{N_0}\left(\frac{W}{C}\right)\right) \ : \ 2^{C/W} = 1+\frac{E_b}{N_0}\left(\frac{C}{W}\right)$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C}\left(2^{C/W}-1\right) \tag{30}$$

여기서 오일러 e (1) 식을 이용한다.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e \tag{31}$$

$$x = \frac{E_b}{N_0}\left(\frac{C}{W}\right) \tag{32}$$

(30)으로부터

$$\frac{C}{W} = x \log_2(1+x)^{1/x} \tag{33}$$

$$1 = \frac{E_b}{N_0}\log_2(1+x)^{1/x}$$

$\frac{C}{W} \to 0$ 수렴한다면

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{\log_2 e} = 0.693 = -1.59\ dB \tag{34}$$

따라서 오일러 e 와 샤논은 샤논 limit인 -1.59 dB에서 만남을 보였다.

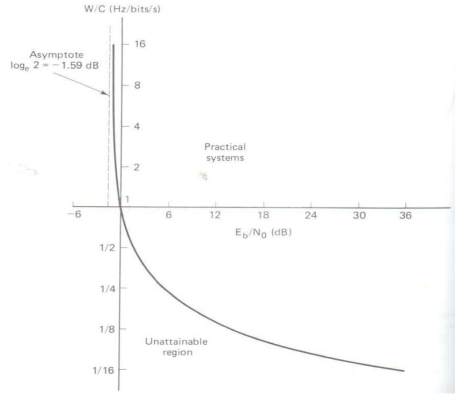


그림 7. 정규 채널 대역폭 대 채널 E_b/N_0
Fig. 7. Regular channel bandwidth vs channel E_b/N_0.

그림 7은 채널 대역폭 대 채널 E_b/N_0를 그림 6는 안테나 다이버시티 이득과 BER, SNR을 보였다. 여기에 숨겨진 비밀은 무엇인가?

$$e \cdot e^{-1} = 1 \tag{35}$$

이다. 즉 e 함수는 symmetric하고 그의 inverse는 $\frac{1}{e}$이므로 그 곱은 1 이다.

Chernoff Bound :
Q함수도

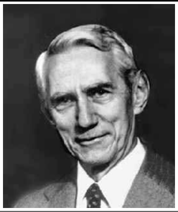
$$Q(x) \le \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \text{ 도 } e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} = 1$$

표 1은 오일러와 샤논 공식의 비교표이다.

Ⅵ. 결 론

세상에 꽃고 여자도 아름답지만 오일러 공식과 대칭이 가장 아름답다[5]. 즉 $e^{\pi i}+1=0$이 간단한 식에 무리수 e와 π, 허수 i, 자연수 1과 0은 덧셈이 항등원, 1은 곱셈이 항등원, 그리고 + 더하기, × 곱하기, ÷ 나누기, = 은 연산자 등을 무두 포함하기 때문이다. 얼마나 명쾌한 수인가. 나아가 0과 1은 산술을 i는 대수학을, e는 대수학을 나타내기도 한다.

표 1. 오일러와 샤논 비교
Table. 1. Comparison of Euler and Shannon.

	오일러(1783)		샤논(1948)
일반식	$e^{\pi i}+1=0$, 세상에서 가장 아름다운 식	C=Blog2(1+$\frac{S}{N}$)	
공통점	① 수학수의 융합 $e^{\pi i}+1=0$ π : 무리수 i : 허수, 1과 0 : 자연수 + : 덧셈, 곱셈, = : 등호	① 이기종융합(Heterogenous Fusion) = 열역학(Thermodynamics) +확률(Probablity) ② 一定 = Channel Capacity ③ 대역폭과 $\frac{S}{N}$ Trade-off : 상대적(Relative)	
연구 배경 및 통합 이론	지수와 삼각함수 연결 정다면체 정리 발견 F + V = E + 2 숨겨진 비밀은 정다면체 꼭지각에서 내접하는 삼각형과의 대칭. 그리고 삼각함수로 전개하여 그 Inverse는 Element -wise Inverse. 저자 Idea $e^{\pi i}\underbrace{\frac{1}{e^{\pi i}}}_{\text{symmetric}}=(-1)\times\underbrace{\frac{1}{(-1)}}_{\text{Element Inverse}}=1$	① A.H. Reeves(1902-1972,영국) : 1937년, Pulse code modulation ② H. Nyquist(1889-1975,미국) : 표본화 정리 $T=\frac{1}{2f_m}$ ③ J.R. Carson(1886-1940,미국) : 1922년, FM 대역 폭 $(2(m_f+1)w_m \simeq 2w_m)$과 잡음 관계 ④ 샤논(1948) : Entropy 정의와 Euclidean distance, Fourier(1822) Transform, Markov(1856-1922,러시아), Gauss (1777-1855,독일) 분포	

샤논은 무선통신과 정보이론이 뿌리가 되는 샤논정리를 오일러 정리에 기반해 정보와 통신에 응용했고, 오늘날 Smart Phone의 원리다. 우리 모두 샤논과 오일러의 손바닥 안에 있다. 그 만난 점을 MIMO 다중안테나 다이버시티가 e^{-SNR} 이다. Chernoff Bound에 기반한 샤논 Limit 로 구하며 이 두 거장은 -1.59 dB에서 만남을 확인 했고 대수학코딩이론(Algebraic coding theory)와 삼각함수 속에 숨겨진 비밀은 대칭(symmetric)과 Element-wise Inverse가 됨을 발견했다.

References

[1] Moon Ho Lee, "Over the Shannon," "KICS Vol.28 No.11, No.28. No. 11 2011. 11."

[2] Moon Ho Lee, "Zuckerberg's Face and Euler's 2 eyes", KIEE Vol.39. No.7. 2012

[3] Bernad Sklar, Digital Communication : Functions and Applications, Prenice Hall., 1988. Prentice Hall

[4] Jinho Choi, Optimal Combining and Detection, Cambridge 2010.

[5] Elimaor, e : The story of a Number Kyung Moon Sa, 2000

[6] Sung Kook Lee, Ju Yong Park and Moon Ho Lee, "A Double Helix DNA Strucure Based on the Block Circulant Matrix (Ⅰ)," The Journal of the Institute of Internet, Broadcasting and Communication(JIIBC), Vol. 16, No. 3, June 2016. DOI: https://doi.org/10.7236/JIIBC.2016.16.3.203.

[7] Ju Yong Park, Jeong Su Kim and Moon Ho Lee , "A Double Helix DNA Structure Based on Block Circulant Matrix(II)," The Journal of The Institute of Internet, Broadcasting and Communication (IIBC) Vol.16, no.5, pp.229-233, Oct. 2016. DOI: https://doi.org/10.7236/JIIBC.2016.16.5.229.

저자 소개

이 문 호(정회원)

- 1984년 : 전남대학교 전기공학과 박사, 통신기술사
- 1985년 ~ 1986년 : 미국 미네소타 대학 전기과 포스트닥터
- 1990년 : 일본동경대학 정보통신공학과박사
- 1970년 ~ 1980년 : 남양MBC 송신소장
- 1980년 10월 ~ 2010년 2월 : 전북대학교 전자공학부 교수
- 2010년 2월 ~ 2013년 : WCU-2 연구책임교수
- 2015년 : 국가연구개발 우수성과 100선
- 현재 : 전북대학교 전자공학부 초빙교수

<주관심분야 : 무선이동통신>

※This work was supported by MEST, 2015R1A2A1A05000977, NRF, BK, Korea.