East Asian Math. J.
Vol. 33 (2017), No. 2, pp. 149-175
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2017.013

# 각뿔의 부피 구하기에 대한 수학사적 고찰

## Historical Considerations of Finding the Volume of a Pyramid

정 영 우 · 김 부 윤*

**ABSTRACT.** The effort to find the volume of pyramids has been done by mathematicians for a long time, and many trial-and-error calculations and proofs give various perspectives and educational material. In the early days, finding the volume of pyramids was mainly studied by calculating the volume of triangular pyramids or quadrangular pyramids by cutting and the relationship between pyramids. Thereafter, methods based on infinite, infinitesimal, limit, etc. appeared, but the research topic was still about them.
The purpose of this study is to examine the four themes appearing the mathematics history in terms of methodology, and to think about its implications from the viewpoint of improving the professionalism of the teachers.

## I. 연구의 필요성 및 의의

이미 기원전 3세기 경 그리스인들은 밑넓이가 $A$이고 높이가 $h$인 뿔의 부피 $V$는 $\frac{1}{3}Ah$임을 알고 있었다(The Inter-IREM Commission, 1997)고 한다. 하지만 이 식의 증명은 많은 수학자들의 노력에도 불구하고 오랫동안 완료되지 못했다. 이것이 수학적으로 완료된 것은 정적분의 개념이 갖춰지고 나서의 일이다. 그러나 그 긴 세월 동안

* 교신저자
Received January 11, 2017; Accepted February 19, 2017.
2010 Mathematics Subject Classification: 97C70
Keywords: Finding the volume of a pyramid, Professionalism, Triangular pyramids, Quadrangular pyramids
이 논문은 부산대학교 기본연구지원사업(2년)에 의하여 연구되었음.

©2017 The Youngnam Mathematical Society
(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

의 수학자들의 노력과 시행착오의 결과들은 수학적 발전을 가져왔으며, 특히 증명을 위한 새로운 아이디어들은 수학적 관점을 풍부하게 하였다.

역사적으로 뿔의 부피에 관한 문제는 삼각뿔 또는 사각뿔의 부피를 구하는 것이 주된 관심사였다. 특히, 초기 수학자들의 노력은 '삼각뿔이나 사각뿔의 부피 공식의 증명'과 '한 각뿔을 다른 각뿔로 부피를 보존하면서 바꿀 수 있는가?'에 맞추어져있었다. 이후 힐베르트(D. Hilbert)는 1900년 제2회 세계수학자대회(ICM)에서 수학 분야에서 연구되어야 할 문제를 제기하였는데, 그 중 하나가 '밑면과 높이가 같은 두 정사면체의 동등에 관한 것'이었다. 이것은 한 정사면체를 다른 정사면체로 재조립될 수 있도록 유한한 몇 개의 조각으로 자르는 것이 가능한가에 관한 것인데, 이 문제는 그의 제자 덴(M. Dehn)이 한 정사면체를 다른 정사면체로 재조립될 수 있도록 유한한 몇 개의 조각으로 자르는 것이 불가능함을 밝힘으로써 해결되었다. 이로써 절단에 의한 부피 구하기는 한계가 드러났으며, 이를 벗어난 새로운 관점의 방법이 나타나게 된다. 그러나 이 방법은 사람들의 보수적 경향에 의해 회피의 대상이 되었고, 이로 인해 더 새로운 방법을 추구하거나 극복의 노력을 하게 된다. 즉, 각뿔의 부피 구하기는 절단 방법에 대한 저항을 통해 무한과 무한소로 나아가는 과정이며, 정적분에 이르게 되는 도정이었다. 그리고 이러한 과정은 다양한 관점과 수학화의 소재를 유산으로 남기게 된다.

이처럼 각뿔의 부피 구하기는 많은 다양한 사고와 시도를 역사적으로 가지고 있어 수학적 경험과 창의적 문제해결의 소재로 활용될 수 있다. 그러나 교과서에서는 이러한 내용을 결과론적이고 단편적으로 제시하고 있어 본질적· 과정적 의의에 대한 지도는 교사의 몫으로 주어져 있다.

본 연구에서는 각뿔의 부피 구하기와 관련한 문제해결 노력을 수학사적으로 고찰하고, 그 주제를 다루는 과정에서 나타난 방법들의 교수학적 의의에 대해 생각해 봄으로써 교사의 교과전문성 신장과 지도에의 시사점을 모색해 본다.

## Ⅱ. 각뿔의 부피 구하기에 관한 수학사적 고찰[2)]

역사적으로 각뿔의 부피 구하기와 관련한 노력은 다음의 네 가지 주제에 관한 것이었다.

주제 1. 각뿔들 사이의 환원 가능성에 대한 문제.

---

2) 이 절은 주로 The Inter-IREM Commission(1997)의 내용을 기초로 재구성하고 필요한 것을 수정、보완、엄밀화 한 것이다. 제시된 그림 중 출처를 밝히지 않은 것은 내용을 구체화하기 위해 연구자가 그린 것이며, 계산 및 증명 역시 출처를 밝히지 않은 것은 연구자가 현재수학의 관점에서 보완하거나 증명한 결과이다. 연구자의 증명에 그림만을 인용한 것은 그림에 출처를 제시하였다. 특히 역사적 순서로 기술된 책의 내용을, 문제를 해결하는 사고와 방법에 초점을 두고 연구자가 독창적으로 순서 및 내용을 재구성하였음을 밝혀 둔다.

주제 2. '각뿔의 부피는 $\frac{1}{3}$×밑넓이×높이이다'는 부피 공식의 유도와 증명.

주제 3. '두 각뿔 사이의 관계 즉, 밑넓이가 같고 높이가 같은 두 각뿔은 부피가 같다. 또는 높이가 같은 두 각뿔은 밑넓이에 비례하여 부피가 같은 비를 가진다'에 관한 증명.

주제 4. '삼각기둥은 세 개의 삼각뿔로 세분되거나 정육면체는 세 개의 사각뿔로 세분된다[3]'에 대한 증명.

본 절에서는 이에 관한 수학자들의 노력을 수학사에 기초하여 방법적 측면에서 살펴보기로 한다.

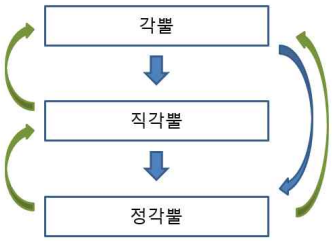
## 1. 절단에 의한 방법

분할에 의한 조각의 재구성으로 두 각뿔을 환원하여 부피를 구하는 방법이다. 이것은 조각을 재배열해도 넓이나 부피는 바뀌지 않는다는 원리에 기초한 것이다.

### (1) 유한 절단에 의한 방법

#### 가. 그리스의 방법

그리스의 방법은 각뿔의 부피를 구함에 있어 한 각뿔을 유한개의 조각으로 잘라 다른 각뿔로 재조립하는 방법으로, '기본적인 방법' 또는 '유클리드의 방법'이라 불린다(The Inter-IREM Commission, 1997). 이때, 주어진 각뿔을 직각뿔로 재조립할 수만 있으면 두 각뿔의 부피는 같으므로 직각뿔의 부피를 구하는 것으로 각뿔의 부피를 구할 수 있게 된다. 또한 직각뿔을 유한개의 조각으로 잘라 정각뿔[4]로 재조립할 수 있다면 정각뿔의 부피를 구함으로써 직각뿔의 부피를 구할 수 있다. 물론 각뿔에서 바로 정각뿔로 환원할 수 있는 경우에도 같은 논의가 가능하다.



[그림 1] 환원 관계

그리스인들은 평면도형의 넓이를 구하는 것은 주어진 도형과 같은 넓이를 가지는 정사각형을 그리는 것이며, 입체도형의 부피를 구하는 것은 주어진 입체와 같은 부피를 가지는 정육면체를 찾는 것으로 생각하였다(The Inter-IREM Commission, 1997). 유클리드는 이를 기초로 '넓이를 구하는 방법'과 '부피를 구하는 방법'을 제시하였는데, 정사각형 대신 평행사변형을 구성하였다.

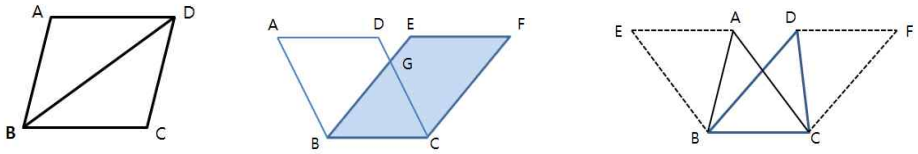
---

3) 이것은 '각뿔의 부피는 같은 밑면과 같은 높이를 갖는 각기둥 부피의 $\frac{1}{3}$이다'라는 관계에 관한 것이다.

4) 본 연구에서는 정각뿔을 밑면이 다각형인 직각뿔로 본다.

<넓이를 구하는 방법>

**정의.** 두 삼각형이 ① 같은 넓이를 가지고, ② 포개어질 수 있으면 두 삼각형은 '같다'라고 한다. 그리고 같은 넓이를 가지는 두 도형을 '동치'라고 한다. 즉, [그림 2]-(1)에서 삼각형 $ABD$와 삼각형 $CDB$는 동치이며 동시에 같다.




(1) (2) (3)

[그림 2] 넓이를 구하는 방법 (The Inter-IREM Commission, 1997)

**명제 1.** 같은 밑변과 같은 높이를 가지는 두 평행사변형은 동치이다.

**증명.** 같은 밑변과 높이를 가지는 두 평행사변형은 [그림 2]-(2)와 같이 둘 수 있다. 여기서 삼각형 $ABE$와 삼각형 $FCD$는 $\overline{AD}=\overline{EF}$, $\overline{DE}$ : 공통, $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{EB}=\overline{FC}$이므로 포개어질 수 있고 같은 넓이를 가진다. 따라서 삼각형 $ABE$와 삼각형 $FCD$는 같다. 이제 두 삼각형에서 $DGE$를 잘라내고, 평행사변형 $ABCD$의 삼각형 $BCG$를 삼각형 $FCD$에 붙여 생각한다. 그러면 평행사변형 $ABCD$는 평행사변형 $FCBE$와 포개어질 수 있고 넓이가 같다. 따라서 같은 밑변과 같은 높이를 가지는 두 평행사변형은 같다. 그러므로 동치이다.

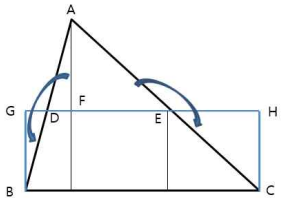
**명제 2.** 같은 밑변과 같은 높이를 가지는 두 삼각형은 동치이다.

**증명.** [그림 2]-(3)에서와 같이 같은 밑변과 같은 높이를 가지는 두 평행사변형 $AEBC$와 $DFCB$는 명제 1에 의해 같다. 그리고 삼각형 $ABC$는 평행사변형 $AEBC$의 반이고, 삼각형 $DCB$는 평행사변형 $DFCB$의 반이다. 그러므로 삼각형 $ABC$와 삼각형 $DCB$는 동치이다.

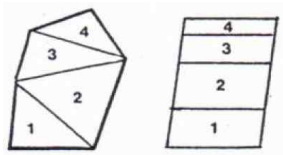
**명제 3.** 주어진 삼각형과 동치인 평행사변형을 그릴 수 있다. 나아가 어떤 주어진 다각형과 동치인 평행사변형을 그릴 수 있다.

**증명.** [그림 3]과 같이 변 $AB$와 변 $AC$의 중점 $D$와 $E$를 지나는 직선을 그린다. 그 직선에 점 $A$, $B$, $C$에서 수선을 내리고, 교점을 $F$, $G$, $H$라 하자. 그러면 주어진 삼각형과 같은 평행사변형을 그릴 수 있다. 왜냐하면 삼각형 $AFD$와 삼각형 $BGD$가, 삼각형 $AFE$와 삼각형 $CHE$가 합동이기 때문이다.

한편 임의의 주어진 다각형은 삼각형으로 분할할 수 있으므로 각 삼각형에 대한 평행사변형을 [그림 4]와 같이 그릴 수 있으며, 따라서 주어진 다각형과 같은 평행사변형을 그릴 수 있다.




[그림 3] 삼각형의 평행사변형 환원




[그림 4] 다각형의 평행사변형 환원
(The Inter-IREM Commission, 1997)

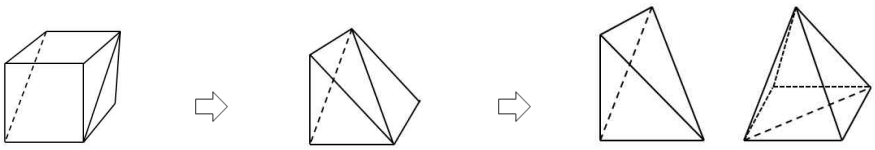
이러한 사실들을 종합하면 다음을 말할 수 있다.

| |
|---|
| 모양이 같은 유한개의 조각이나 넓이가 같은 유한개의 조각으로 세분될 수 있는 두 도형은 동치인 도형이다. 즉, 만약 두 도형 $F$와 $F'$가 한 쪽에서 얻어진 조각들을 사용하여 다른 쪽을 채울 수 있다면 $F$와 $F'$는 동치이다(The Inter-IREM Commission, 1997). |

<부피를 구하는 방법>

부피를 구하는 방법은 넓이를 구하는 방법을 입체로 확장하고, '원론'의 비례론을 사용하여 보일 수 있다.

**명제 4.** 삼각기둥은 평행육면체의 반이고, 삼각기둥은 세 개의 삼각뿔이다[5].



[그림 5] 삼각기둥의 절단

**명제 5.** 밑면이 같고 높이가 같은 두 평행육면체는 같은 크기를 가진 조각들로 분해될 수 있으며, 따라서 이들은 동치이다.

### 나. 중국의 방법

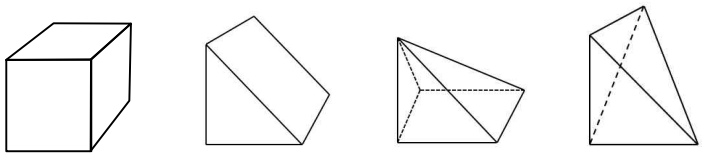
① 이분할 방법

중국의 「구장산술」 제5권 상공(차종천, 2000)에는 기둥과 뿔의 부피를 구하는 문제들이 다루어지고 있는데, 그 내용을 종합하면 다음과 같다.

정육면체는 [그림 6]과 같이 분할이 가능하다. 이들 입체는 차례로 입방(立方), 참도(塹堵), 양마(陽馬), 별노(鼈臑)와 같이 명명한다. 입방의 반이 참도가 되고, 참

5) 「원론」 제11권 공간기하 법칙 28과 제12권 입체의 부피 법칙 7을 참고하라.

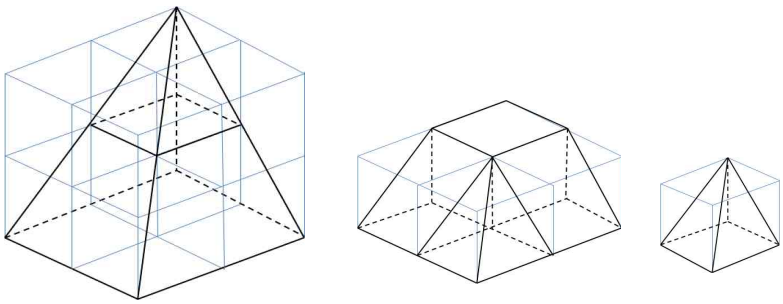
도의 $\frac{2}{3}$가 양마가 되며, $\frac{1}{3}$이 별노(삼각뿔)가 된다. 그러므로 별노는 입방의 $\frac{1}{6}$이다. 그러므로 양마의 부피는 그 입방의 $\frac{1}{3}$이다.




[그림 6] 정육면체 절단에 의한 네 가지 입체

② 균등분할 방법

양마에 대해 다음과 같은 방법도 생각할 수 있다([20]). 단위 정육면체 8개를 쌓은 공간(용적 8) 가운데에, 입방, 참도, 양마, 별노를 필요한 만큼 사용해서 사각뿔을 만든다. 그러면 상단은 1개의 작은 사각뿔이 있게 된다.



[그림 7] 중국의 방법

단위 정육면체에 있는 꼭대기의 사각뿔을 $A$라 할 때, 하단에는 $A$가 1개 포함되어 있다. 그 외에 단위 정육면체 1개와 삼각기둥 2개가 포함되어 있다. 따라서 큰 사각뿔은 작은 사각뿔 2개와 단위 정육면체 2개의 모임이라 할 수 있다. 또한 이것은 8개의 $A$이기도 하다. 그러므로 정육면체 1개는 사각뿔 3개이다. 즉,

$$\frac{1}{3}\text{정육면체 부피}=\text{사각뿔의 부피}$$

이다.

기원 3세기 유휘(劉徽)는 기원전 1세기경의 책인 「구장산술」의 해설에서 '도형들이 이상한 모양이더라도 도형의 넓이나 부피를 측정한 수는 여전히 같다'고 했다(The Inter-IREM Commission, 1997). 이처럼 구장산술에는 다각형의 넓이는 직사각형으로의 세분과 재조립으로, 부피는 표준적인 모양과 크기의 나무 블록을 사

용하여 구하고 있다.

**다. 동치인 도형의 균등분할**

같은 조각에 의해 분할(균등분할)될 수 있는 두 평면도형은 물론 넓이가 같다. 19세기에 수학자들은 정반대의 문제를 제기하였다.

"만약 두 다각형이 넓이가 같다면 항상 유한한 개수의 같은 다각형 조각들로 세분될 수 있을까?"

이것이 가능하다는 증명은 1832년 볼리아이(F. W. Bolyai)에 의해 이루어졌고, 또한 독립적으로 1833년 게르위엔(P. Gerwien)에 의해서도 이루어졌다. 이들은 '세분할들이 서로 직선에 대해 대칭이라면 방향에 상관없이 서로 동치가 되도록 분할할 수 있는가'에 대해 생각하였고, 1950년 스위스의 수학자 하트비거(Hadwiger)는 '같은 넓이의 두 도형을 다른 방향의 조각들을 사용하지 않고 이동시켜 완벽하게 겹칠 수 있는 조각들로 세분할 수 있음'을 증명하였다(The Inter-IREM Commission, 1997).

이것은 '두 다면체가 부피가 같다면 같은 유한개의 다면체 조각을 사용하여 두 다면체를 세분하는 것이 가능한가?'라는 힐베르트의 문제와 유사하다. 힐베르트의 문제에 대해 덴은 '정사면체는 부피가 같은 정육면체나 직각이등변삼각형을 밑면으로 하는 부피가 같은 사면체로 균등분할 될 수 없다'는 것과 '균등분할 되지 않는 무한히 많은 사면체들의 쌍들이 존재한다'는 것을 보였다. 즉, 평면도형과는 달리 부피의 같음은 균등분할이라는 조건으로는 충분하지 않다. 덴은 두 다면체의 균등분할의 필요조건은 그들의 이면각 사이에 모듈 $\pi$의 선형관계의 존재성에 있다는 것을 발견하였다. 이 관계에서 정수 계수는 두 다면체의 변의 길이에 의존한다. 그런데 이 조건은 삼각기둥이 세 개의 각뿔로 세분되어 얻어지는 각뿔에서는 일반적으로 확인되지 않는다. 덴의 조건은 같은 부피를 가지는 두 입체도형의 균등분할에 대한 충분조건이었는데, 이것은 1965년 시드러(Sydler)에 의해 규명되었다(The Inter-IREM Commission, 1997).

유한 절단의 사고에 대한 실패는 무한 절단과 무한소의 개념을 필요로 하게 되었으나 이러한 새로운 방법은 쉽사리 받아들여지지 않았으며, 다른 대안적 방법들을 내 놓게 된다.

**(2) 무한 절단에 의한 방법**

무한 절단의 대표적인 방법은 소진법인데, 이 방법은 각뿔의 부피에 관한 직접적인 접근이 아닌 두 각뿔 사이의 부피 관계를 밝히는데 주로 사용되었다.

소진법은 양의 무한가분성을 가정한 후 어떤 양으로부터 절반 이상의 부분을 빼내고 다시 나머지 부분으로부터 절반 이상의 부분을 빼내는 과정을 계속할 경우

결국 어떤 정해진 양보다도 작은 양만 남을 수 있다는 것이다(김권욱 외, 1998). 즉, 임의의 각뿔에 대해 전형적인 입체도형을 모양이 같게 반복적으로 사용하여 본래 각뿔의 부피에 근접해 가는 방법이다.

소진법의 일반적인 절차는 미지의 양에 대한 상한과 하한을 설정하고, 이를 체계적으로 개선하는 방법을 제시하는 것으로 이루어진다(정연준 외, 2008).

소진법의 아이디어는 안티폰(Antiphon)을 필두로 에우독소스(Eudoxus), 중국의 유휘로 이어진다. 또한 아르키메데스(Archimedes)는 불가분량과 소진법을 결합하여 위대한 성과를 이루었다(위키백과, 2016). 유클리드는 「원론」에서 여섯 개의 명제를 증명하는데 소거법을 사용하였는데, 각뿔의 부피와 관련하여서도 이 방법을 사용하고 있다. 하지만 그는 소진법을 사용하고는 있으나 무한을 피하기 위해 귀류법을 사용하여 증명을 완성하고 있다.

이처럼 그리스 수학자들은 차이를 원하는 만큼 줄일 수 있다는 것은 인식하였지만 이 과정이 무한 단계 동안 실행되어 완료된다고는 생각하지 못했다(정연준 외, 2008). 소진법은 무한을 함의하고 있어 각뿔의 부피 구하기에 직접적인 해법은 아니었지만 증명의 아이디어로 사용되고 있으며, 이후의 발전적이고 새로운 방법의 기초적 사고가 된다.

## 2. 무한의 사고를 피하기 위한 방법

기원전 5세기의 크기를 무한히 많은 보이지 않는 것들의 모임으로 생각하는 경향을 가진 원자이론은 엘레아학파, 특히 파르메니데스(Parmenides)와 그의 제자 제논(Zeno)에 의해 신랄한 비판을 받았다. 제논의 역설에 대한 그리스의 철학과 심지어 2천년 동안의 서양사상을 지배한 아리스토텔레스(Aristotle)의 답변은 상식에 좌우되었다. 아리스토텔레스는 물리적으로 생각될 수 없는 것을 거부했고, 수학에서 무한대와 무한히 작은 것에 대한 생각을 거부하였고, 이러한 형이상학에 대한 개념을 격하시켰다. 그래서 그리스 수학자들은 수적으로 유한하게 남겨지는 성공적인 분할을 통하여 기하적인 크기에 접근하는 방법을 발달시켰다(The Inter-IREM Commission, 1997).

### (1) 유클리드의 방법

유클리드는 「원론」 제12권(이무현, 1997b)에서 소거법을 사용하여 주제 3에 대해 증명하고 있다. 그는 먼저 법칙 3과 법칙 4를 보였다.

**법칙 3.** 밑면이 삼각형인 각뿔이 있다고 하자. 이 각뿔은 두 개의 각뿔과 두 개의 각기둥으로 쪼갤 수 있다. 두 각뿔은 밑면이 삼각형이고, 서로 닮은꼴이며 부피가 같고, 전체 각뿔과 닮은꼴이다. 두 각기둥은 부피가 같으며, 두 각기둥을 더하면 전체 각뿔의 절반보다 더 크다.

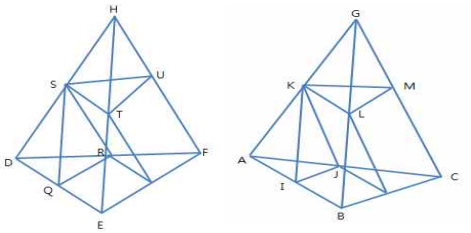
**법칙 4.** 밑면이 삼각형이며 높이가 같은 두 각뿔이 있다고 하자. 이들 각각을 두 개의 각뿔과 두 개의 각기둥으로 쪼개되, 두 각뿔은 부피가 같으며 전체 각뿔과 닮은꼴이고, 두 각기둥도 부피가 같도록 한다. 그러면 한 각뿔의 밑면과 다른 각뿔의 밑면의 넓이 비율은, 한 각뿔에서 나온 모든 각기둥들을 더한 것과 다른 각뿔에서 나온 그와 같은 개수의 각기둥들을 모두 더한 것과의 부피 비율과 같다.

그리고 이들 결과를 활용하여 법칙 5를 다음과 같이 증명하였다.

**법칙 5.** 밑면이 삼각형이며 높이가 같은 두 각뿔의 부피 비율은 밑면의 넓이 비율과 같다.

**증명.** 높이가 같은 두 각뿔의 밑면이 삼각형 $ABC$, $DEF$이고 점 $G$, $H$가 각 각뿔의 꼭짓점이라 하자. 그러면 밑면 $ABC$와 밑면 $DEF$의 넓이 비율이 각뿔 $GABC$와 각뿔 $HDEF$의 부피 비율과 같음을 보이면 된다.

만약 각뿔 $GABC$와 각뿔 $HDEF$의 부피 비율이 밑면 $ABC$와 밑면 $DEF$의 넓이 비율과 다르다면, 밑면 $ABC$와 밑면 $DEF$의 비율과 같은 비율이 되기 위해 각뿔 $GABC$는 각뿔 $HDEF$보다 더 크거나 또는 더 작은 부피의 비율을 가져야 한다.



[그림 8] 절단

우선, 각뿔 $GABC$가 각뿔 $HDEF$보다 더 작은 $HDEF$에 내접하는 입체 $W$와 같은 부피 비율을 가진다고 생각하자. 이제 각뿔 $HDEF$를 두 각뿔과 두 각기둥으로 자르되, 두 각뿔은 부피가 같으며 전체 각뿔과 닮음꼴이고, 두 각기둥도 부피가 같다고 하자. 그러면 ① 두 각기둥을 더한 것은 전체 각뿔의 절반보다 더 크다.

이제 이때 생긴 각뿔들을 마찬가지 방법으로 또 자르자. ② 이 과정을 계속 되풀이하여서 남은 각뿔들을 다 더한 것의 부피가 각뿔 $HDEF$의 부피에서 입체 $W$의 부피를 뺀 것보다 더 작아지도록 하자. 즉, 각뿔 $HDEF$의 부피$-$각뿔 $GABC$의 부피$<$각뿔 $HDEF$의 부피$-W$의 부피가 되도록 하자. 생각하기 편하도록 이때 남은 각뿔들을 $SDQR$, $HSTU$라 하자. 그러면 ①과 ②에 의해 각뿔 $HDEF$에서 생긴 각기둥들을 다 더한 것은 입체 $W$보다 부피가 더 크다.

각뿔 $HDEF$를 자른 것과 똑같은 방법으로, 똑같은 횟수만큼 각뿔 $GABC$를 자르자. 그러면 ③ 밑면 $ABC$와 밑면 $DEF$의 넓이 비율은 각뿔 $GABC$에서 나온 각기둥들을 더한 것과 각뿔 $HDEF$에서 나온 각기둥들을 더한 것의 부피 비율과 같다. 그런데 ④ 밑면 $ABC$와 밑면 $DEF$의 넓이 비율은 각뿔 $GABC$와 입체 $W$의 부피 비율과 같다. 따라서 ③, ④에 의해 각뿔 $GABC$와 입체 $W$의 부피 비율은 각뿔 $GABC$에서 나온 각기둥들을 더한 것과 각뿔 $HDEF$에서 나온 각기둥들을 더한 것의 부피 비율과 같다. 그러므로 ⑤ 각뿔 $GABC$와 거기에서 나온 각

기둥들을 더한 것의 부피 비율은 입체 $W$와 각뿔 $HDEF$에서 나온 각기둥들을 더한 것의 부피 비율과 같다.

그런데 각뿔 $GABC$는 거기에서 나온 각기둥들을 더한 것보다 부피가 더 크다. 그러므로 입체 $W$도 각뿔 $HDEF$에서 나온 각기둥들을 더한 것보다 부피가 더 크다. 그러나 입체 $W$는 이것보다 부피가 더 작다. 그러므로 이것은 모순이다. 따라서 각뿔 $GABC$가 각뿔 $HDEF$보다 더 작은 입체와 같은 부피 비율을 가진다면 그 비율이 밑면 $DEF$와 밑면 $ABC$의 넓이 비율과 같아질 수 없다.

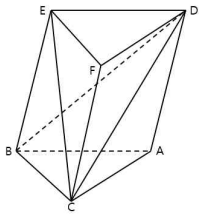
다음으로 각뿔 $GABC$가 각뿔 $HDEF$보다 더 큰 입체 $W$와 같은 비율을 가진다면, 그 비율이 밑면 $ABC$와 밑면 $DEF$의 넓이 비율과 같을 수 없음을 보이자.

만약 그렇다고 하면, 밑면 $DEF$와 밑면 $ABC$의 넓이 비율은 입체 $W$와 각뿔 $GABC$의 부피 비율과 같으며, 각뿔 $HDEF$는 각뿔 $GABC$보다 더 작은 어떤 입체 $W'$와 부피 비율이 같다. 그러므로 밑면 $DEF$와 밑면 $ABC$의 넓이 비율은 각뿔 $HDEF$와 각뿔 $GABC$보다 더 작은 어떤 입체 $W'$와의 부피 비율과 같다. 그러나 이것이 불가능함은 앞에서 보였다. 그러므로 밑면 $ABC$와 밑면 $DEF$의 넓이 비율은 각뿔 $GABC$와 각뿔 $HDEF$의 부피 비율과 같다.

그리고 법칙 6에서 이 결과를 밑면이 다각형인 경우로 확장한다. 그리고 다음을 보였다.

**법칙 7.** 밑면이 삼각형인 어떤 각기둥이라도 서로 같은 세 개의 삼각뿔로 분할된다.

**증명.** [그림 9]의 각뿔 $CABD$와 각뿔 $CEDB$는 높이(점 $C$로부터 면 $ABED$까지의 거리)가 같고 그들의 밑면은 각각 평행사변형 $ABED$의 반이다. 밑면이 평행사변형 $BEFC$의 반인 $DCBE$와 $DECF$에 대해서도 마찬가지이다. 즉, 삼각기둥은 세 개의 삼각뿔로 등분할 된다.



[그림 9] The Inter-IREM Commission(1997)

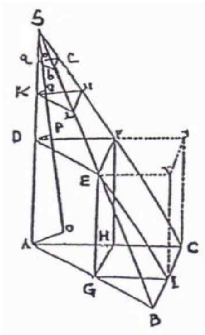
이것으로부터 어떠한 각뿔도 그것과 밑면이 같고 같은 높이인 각기둥의 $\frac{1}{3}$이라는 것을 분명히 하였다. 이 증명의 중요한 점은 시작되면 무한히 계속될 것 같은 절단 대신에 높이가 같은 두 개의 각뿔이 밑면의 비에 따른다는 것을 증명하는데 있다. 유클리드는 두 각뿔의 '같음'(부피의 관점에서)을 보인 것이 아니라 높이가 같은 두 각뿔의 비는 그들의 밑면의 비와 같다는 것을 보였다. 유사한 방법으로, 방법의 일반적인 아이디어를 주기 위해 밑면과 높이가 같은 두 각뿔은 부피가 같다는 것도 보였다.

유클리드의 방법은 각뿔을 거의 완전히 채울 정도로 충분히 많은 과정이 아니라

유한번의 과정으로 쌓아올린 유한개의 조각을 고려하는 것으로 이루어져 있다. 남은 것은 모순을 이끄는 방법으로 조작된다. 귀류법에 의한 이 추론은 무한한 것과의 어떠한 관련도 피하고 있다(The Inter-IREM Commission, 1997).

**(2) 르장드르의 산술화를 통한 무한 피하기**

르장드르(M. Legendre)는 각뿔의 부피를 계산하기 위해 분할할 수 없는 것의 방법에 의존하지도 미적분에 의존하지도 않는 증명을 제안하였고, 또한 유클리드처럼 무한소의 사용이나 무한에 의지하는 것도 피하였다. 그는 유클리드가 사용했던 각기둥과 더 작은 각뿔로의 절단을 사용하였지만 고전적인 접근은 아니었다. 그는 각뿔을 분할하는 방법을 사용하지 않았으며, 밑면과 높이가 같은 각뿔의 부피를 비교하지도 않았다. 그는 절단에 의해 만들어지는 작은 피라미드들이 일정한 비율 $\frac{1}{4}$로 기하급수의 부피를 가지는 것을 보였다. 그러므로 각뿔들은 원하는 만큼 작게 만들 수 있다. 그리고 각뿔의 부피는 밑면과 높이의 곱의 반보다 작다는 것도 보였다. 르장드르는 이것을 기초로 소진법에 의한 추론과 비슷한 추론을 사용하여 각뿔의 부피는 같은 밑넓이를 가지는 기둥의 $\frac{1}{3}$보다 크지도 작지도 않음을 보였다(The Inter-IREM Commission, 1997).



[그림 10] The Inter-IREM Commission(1997)

**르장드르의 방법**. $SABC$를 밑면이 $ABC$이고 높이가 $SO$인 삼각뿔이라고 하자. 각뿔 $SABC$의 부피는 면 $ABC$와 높이 $SO$의 곱의 $\frac{1}{3}$, 즉 $SABC = \frac{1}{3}ABC \times SO$ 일 것이다. 만일 이 등식이 성립하지 않는다면, $SABC$의 부피는 $\frac{1}{3}ABC \times SO$보다 크거나 작으며, 따라서 적어도 $\frac{1}{3}ABC$와 $SO$의 어느 하나보다 크거나 작은 양의 곱이 될 것이다. 만일 $SABC$를 $\frac{1}{3}ABC \times SO$보다 큰 양이라 하고, $SABC$는 부피가 같은 두 개의 동치인 각기둥 $AGHFDE, EGICFH$와 두 개의 동치인 각뿔 $SDEF, EGBI$로 세분된다 하자. 그러면 각기둥 $AGHFDE$는 $DEF \times PO$이고, 두 개의 각기둥의 부피는 $2 \times (DFE \times PO) = DFE \times 2 \times PO = DFE \times SO$가 될 것이다. 그리고 전체의 각뿔 $SABC$에서 두 각기둥($DFE \times SO$)을 빼면 남는 것은 각뿔 $SDEF$의 두 배이다. 즉, $SABC - (DFE \times SO) = 2$삼각뿔이고,

$$SABC - (DFE \times SO) > \frac{1}{2}ABC \times SO - (DFE \times SO)$$

이므로 2삼각뿔 $> (\frac{1}{3}ABC - DFE) \times SO$이다. 따라서 어떤 면 $M$에 대해

$$2SDEF = SO \times \left(\frac{1}{3}ABC + M - DEF\right)$$

이고, $SA$가 $SD$의 두 배이므로, 면 $ABC$는 $DFE$의 네 배이다. 따라서

$$\frac{1}{3}ABC - DFE = \frac{4}{3}DFE - DFE = \frac{1}{3}DFE$$

이다. 그래서

$$2SDEF = SO \times \left(\frac{1}{3}DEF + M\right)$$

$$SDEF = SP \times \left(\frac{1}{3}DEF + M\right)$$

이다. 그리고 만약 $SD$가 $K$에서 이등분되고 $K$를 지나서 $DEF$에 평행한 평면 $KLM$이 구성된다면, $Q$에서 수선 $SP$와 만나고, 같은 방법으로 각뿔 $SKLM$은 $SQ \times \left(\frac{1}{3}KLM + M\right)$과 같다. 따라서 같은 방법을 계속해 나가면 변이 두 배의 비율로 감소하고 밑면이 네 배의 비율로 감소하는 각뿔의 수열을 만들 수 있고, 결국 밑면이 $6M$보다 작은 각뿔 $Sabc$에 이르게 된다. $Sp$를 마지막 각뿔의 높이라고 하면 각뿔의 부피는 이전의 각뿔로부터 연역되어 다음과 같이 된다.

각뿔 $Sabc$는 $Sp \times \left(\frac{1}{3}abc + M\right)$이 될 것이고, $M > \frac{1}{6}abc$이기 때문에 $\frac{1}{3}abc + M > \frac{1}{2}abc$가 된다. 그런데 이것은 각뿔 $Sabc$의 부피가 $Sp \times \frac{1}{2}abc$보다 크다는 것을 의미한다. 그런데 각뿔의 부피는 밑면과 높이의 곱의 반보다 항상 작으므로 이것은 불가능하다. 그리고 르장드르는 $SABC$의 부피가 $\frac{1}{3}ABC \times SO$보다 작다를 '각뿔의 부피는 밑면과 높이의 곱의 $\frac{1}{4}$보다 크다'에 모순이라는 것을 보이면서 증명을 완성하였다.

르장드르는 '무한대로 가져가는 것'을 허용하지 않으면서 엄밀함에 대한 필요성을 강조하였다. 그는 비교하고자 하는 밑면과 높이가 같은 두 각뿔의 내부에 적절하게 선택될 수 있는 두께 $k$인 각기둥을 쌓았다. 그러나 각기둥의 축적이 각뿔과 거의 같아지도록 하는 것을 생각하는 대신 비교될 두 각뿔 사이의 차이가 $0$이 아닌 다른 것이 될 수 없다는 것을 증명하기 위해 귀류법을 사용하였다(The Inter-IREM Commission, 1997). 각기둥을 '계단'식으로 쌓는 이 방법은 곡선 아래의 넓이가 직사각형에 의해 근사되는 '리만합(Riemann summation)'으로 이어

진다. 그리고 볼자노(Bolzano)와 바이어스트라스(Weierstrass)가 무한을 계산하는 과정에서 사용하기 시작한 극한개념의 형식화에 대한 아이디어, 간결함과 단순명료함으로 좋은 예가 되는 아다마르(Hadamard)의 증명 등에 활용되었다. 게다가 아다마르는 극한이라는 말을 사용했다(The Inter-IREM Commission, 1997).

## 3. 불가분량에 의한 방법과 반대파의 방법

불가분량에 의한 방법은 축을 등분할하고 분할 수를 무한히 늘여서 차이가 무한히 작아지게 하는 방법이다. 16세기 부피 구하기 문제를 해결할 새로운 시도로 구적법과 입체구적법이 사용되었는데, 이 새로운 절차는 극도로 작은 것과 무한집합, 불가분량의 사용을 전제로 하고 있다.

불가분량은 기원전 5세기 후반에 데모크리토스(Democritus)에 의해 최초로 등장하는데, 이는 물리적인 원자론을 기하학에 적용한 결과였다. 데모크리토스는 불가분량의 아이디어를 이용하여 원뿔의 부피가 원기둥의 $\frac{1}{3}$이 된다는 것을 보였다. 그러나 불가분량의 아이디어는 제논(Zeno)의 공격으로 공식적인 수학의 영역에서 제거되었다(정연준 외, 2008).

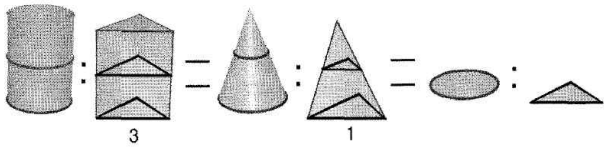
### (1) 카발리에리의 사고와 의의

이 새로운 아이디어와 관련된 수학자는 1635년「연속적인 극소량의 새로운 기하학 발전을 위한 방법」을 발간한 카발리에리(B. Cavalieri)였다. 그의 방법을 따르기 위해서는 '선은 무한개의 점으로, 면은 무한개의 선으로, 입체는 무한개의 면으로 이루어진다'는 상상을 해야 한다. 하지만 그는 연속체가 불가분량들로 구성되어 있다는 것을 제안하는 데까지는 가지 못했다. 그는 불가분량은 도형을 '구성'된 것이 아니라 오히려 엄격한 '규칙'에 따라 도형을 '절단'한 결과로 보았다(The Inter-IREM Commission, 1997).

평면에서 두 개의 평행한 직선이 도형에 놓여있고, 그 직선들 중 하나가 다른 직선에 평행한 채로 그 직선을 향하여 이동한다고 하자. 두 도형을 비교하는 카발리에리의 방법은 지나가는 선에 의해 잘린 도형의 각 선분들이 항상 특정한 비율 $k:1$을 이룬다면 도형의 넓이도 $k:1$의 비를 이룰 것이라는 원리를 사용한다. 유사한 과정이 평행한 평면으로 잘린 부분들을 고려하면서 두 입체를 비교하는 데에도 사용되었다. 카발리에리는 이러한 두 도형에 대해 '대등하게 유사한(equally analogue)' 것들이라 했는데, 이 조건을 갖춘 두 도형의 넓이가 같음을 포갬 아이디어를 통해 보이려 하였다. 또한 '대등하게 유사한' 평면도형의 대응 선분들이 일정한 비를 유지하면 두 평면도형의 비도 마찬가지이며, '대등하게 유사한' 입체도형의 대응 면들이 일정한 비율을 유지하면 두 입체도형의 비도 일정하다는 것을

보였다(박선용, 2011).

이전의 유클리드처럼 카발리에리는 각기둥을 밑면의 넓이와 높이가 같은 세 개의 각뿔로 자르는 아이디어를 사용했다. 카발리에리에 따르면, 원기둥, 원뿔, 삼각기둥, 삼각뿔의 높이가 모두 같고 원뿔과 원기둥의 밑면인 원과 삼각기둥과 삼각뿔의 밑면인 삼각형이 각각 같을 때, 원기둥과 삼각기둥 사이의 비와 원뿔과 삼각뿔 사이의 비는 모두 그 원과 삼각형 사이의 비와 같게 되므로, 유클리드「원론」제12권의 '각뿔은 같은 밑면과 높이를 가진 각기둥의 $\frac{1}{3}$이다'에 의해 원뿔과 원기둥의 사이의 비도 $1:3$이 된다(박선용, 2011).




[그림 11] 박선용(2011)

카발리에리의 방법의 독창성은 밑면의 넓이와 높이가 같은 각뿔의 부피가 같음을 보이는 그의 방법에 있다. 카발리에리는 '높이가 같은 원뿔들은 서로 밑면의 비에 따른다'라 하고, 이를 증명하였다. 그러나 실제로 증명에 사용된 것은 원뿔과 삼각뿔이었다.

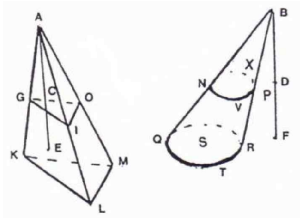
**카발리에리의 방법**(The Inter-IREM Commission, 1997). $C$와 $D$에서 입체의 높이 $AE$와 높이 $BF$를 자르고 평면 $GIO$와 $XNVP$를 만들어내는 어떤 평면을 고려했다. 그래서

$$\frac{LM}{IO}=\frac{AM}{AO}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BD}=\frac{QR}{NP}$$

이고, 닮은 도형의 넓이 비는 대응변의 제곱의 비와 같기 때문에

$$\frac{KLM}{GIO}=\left(\frac{LM}{IO}\right)^2=\left(\frac{QR}{NP}\right)^2=\frac{SQTR}{XNVP}$$

이다. 식을 변형하면 $\frac{KLM}{SQTR}=\frac{GIO}{XNVP}$이므로, 밑면에 평행한 어떠한 평면에 의해서 잘리더라도 도형 $GIO$와 $XNVP$의 비는 일정하다.




[그림 12] The Inter-IREM Commission(1997)

이러한 카발리에리의 불가분량의 아이디어는 토리첼리(E. Torricelli)를 통해 유럽의 수학자들에게 전파되었는데, 이 전파 과정에서 카발리에리의 불가분량의 아이디어는 두께를 지니고 있고, 주어진 도형보다 한 차원 아래의 것이 아니라, 주어진 도형의 무한히 작은 부분, 즉 면의 불가분량은 한 변이 무한히 작은 직사각형이고,

입체의 불가분량은 두께가 한없이 작은 기둥으로 생각하였으며, 이를 카발리에리의 불가분량과 구분하여 무한소라 불렀다(박선용, 2011). 그의 방법은 넓이와 부피를 구하는 도구로 널리 사용되었으나 불가분량에 대한 모호한 개념과 점, 선, 면과 같이 차원이 다른 개념을 혼용하여 사용한 것에 의해 많은 논란을 야기하였다(박선용, 2011).

카발리에리의 불가분량의 기하학은 라미(F. Lamy)에 의해 알려지게 된다(The Inter-IREM Commission, 1997). 라미는 가설로

① 입체는 '느낄 수 없는 두께를 가진 무한개의 평면'으로 구성되어 있고, 이 평면들은 평행하게 놓여지고 다른 하나 위에 하나가 쌓아올려진다.

② 높이가 같은 두 입체가 두께가 같은 평면으로 잘려지면 같은 개수의 평면을 가진다. 단, 무한개의 평면은 많은 개수를 의미한다.

③ 밑면에 평행한 평면에 의해 만들어진 각뿔의 단면은 두 밑면 $B$ 그리고 $B'$와 같은 비율로 닮았다.

④ 만약 높이가 같은 두 각뿔이 밑면에 평행한 평면에 의해 잘렸다면 평행한 평면들 사이에서 어떤 경우라도 한 각뿔의 단면은 높이가 같은 다른 각뿔의 단면에 대해서 밑면의 비와 같은 비를 따른다.

를 설정하였다. 그 후 그는 다음의 정리를 진술한다.

**라미의 방법.** 높이가 같은 각뿔은 밑면의 비에 따른다.

**증명.** ①에 의해 두 각뿔은 평행한 평면들이 쌓여서 구성되어진 것으로 생각할 수 있다. 그리고 ②에 의해 높이가 같은 두 각뿔은 같은 개수의 평행한 평면을 가진다. 이제 이 두 각뿔을 이루고 있으면서 같은 높이에 있는 모든 평면들이 두 각뿔의 밑면의 비와 같은 비를 이루고 있음을 보이면 된다. 이것은 ④에 의해 밑면이 같다면 두 각뿔에서 같은 높이에 있는 평면이 같기 때문에 두 각뿔은 같다. 만약 한 각뿔의 밑면이 다른 각뿔의 밑면의 $\frac{1}{3}$이라면 한 각뿔의 각각의 평면이 다른 각뿔에서 같은 높이에 있는 평면들의 $\frac{1}{3}$이 될 것이므로 그 각뿔은 다른 각뿔의 $\frac{1}{3}$이 될 것이다. 따라서 높이가 같은 각뿔은 밑면의 비에 따른다.

카발리에리의 원리가 채택되면서 이 새롭고 설득력 있는 방법은 실용화되었으며, 증명은 정밀하고 간단한 형식으로 확립되어졌다.

**(2) 로베르발의 불가분량의 합계**

1630년대에 카발리에리와는 독립적으로 로베르발(G. Roberval)은 불가분량들을

다루는 방법을 발달시켰다. 카발리에리와 다른 그의 접근은 1693년 저자의 사후에 출판된 「불가분량 개론」에 처음 소개되었다. 로베르발은 '모든 직선 또는 곡선은 무한개의 부분 또는 서로 길이가 같은 짧은 선으로 분할될 수 있거나 임의적으로 정사각형을 정사각형으로, 정육면체를 정육면체로, 사각형으로 나뉜 정사각형은 사각형으로 나뉜 정사각형과 같은 급수(수열)로 만들어질 수 있다. [⋯] 입체는 무한개의 작은 입체로 나누어질 수 있다'고 하였다. 그는 선분을 구성하는 작은 선들을 점으로 나타내고 계산하였다. 또한 그는 면을 구성하는 작은 면적들의 무한성을 선으로 나타내고 작은 면적들의 합이 되는 면은 이 작은 면적들을 나타내는 작은 선들의 합으로 간주한다. 그러면 각각의 선과 관련되는 수들의 합이 넓이가 된다. 전체 입체를 만드는 작은 입체들은 작은 넓이들의 무한성에 의해 설명되고 이들의 합은 전체 입체와 관련될 수 있다(The Inter-IREM Commission, 1997).

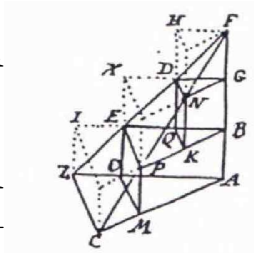
**로베르발의 방법**(The Inter-IREM Commission, 1997). 정사각뿔은 첫 번째 정사각형의 합에 의해 나타내어질 수 있고, 마찬가지로 각뿔을 구성하는 다른 작은 입체들은 넓이 $1^2$, $2^2$, $3^2$, $4^2$, ⋯인 작은 정사각형 면들로 나타내어진다. 그러므로 각뿔의 부피는 $1^2+2^2+3^2+4^2+\ \cdots\ +n^2$이 될 것이며, 이 합은 $\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$이다. 이 식에서 그는 다른 차수의 크기를 비교하는 것을 생각했는데[6], $n^3$은 부피이고, $n^2$은 넓이, $n$은 길이이므로 부피 계산에서 $\frac{n^2}{2}$과 $\frac{n}{6}$의 항을 무시했다. 왜냐하면 정육면체에는 무한히 많은 정사각형이 있기 때문에 정사각형 하나가 더해지거나 빠지더라도 아무런 영향을 주지 않기 때문이다. 마찬가지로 정사각형을 나타내는 선이 더해지거나 빠지더라도 아무런 영향을 주지 않는다고 생각했다. 그리고 $\frac{n^3}{3}$은 정육면체의 부피의 $\frac{1}{3}$이 정사면체의 부피임을 의미한다. 그러므로 각뿔의 비와 기둥의 비는 $1:3$이 된다.

로베르발은 마치 도형들이 무한개의 기초적인 불가분량들로 구성되는 것처럼 도형의 계산을 수행했다. 그의 방법은 두 도형을 단순히 비교한 카발리에리의 방법보다 더 많이 사용되었다. 그는 도형을 구성하는 무한개의 작은 부분의 합을 구함으로써 직접적으로 구할 수 있는 방법인 도형의 구적법 또는 입체구적법의 방법을 제안하였다. 나아가 그는 크기를 가지는 것들과 같은 방법으로 극히 작은 양을 다룸으로서 그들 사이를 비교하는 방법을 제시하였다.

6) 그리스에서는 차원의 사고가 있어 다른 차원들끼리의 합은 무의미하다고 생각하였다(김부윤 외, 2011).

**(3) 반대파의 방법**

유한한 양의 분할과 관련되지만, 무한개의 작은 조각으로부터 유한한 것을 구성한다는 불가분량의 역설은 많은 이들의 비판을 받게 된다. 예수회 수사 굴딘(P. Guldin)은 그의 저서에서 불가분량의 기하학을 비판하였다. 기하도형의 무한분할은 연속성에 대한 로마 카톨릭에 위반되며 일반 상식에 어긋난다는 것이었다. 예수회 교사 타게트(A. Tacquet) 역시 불가분량에 대해 부정하며, 거부를 지지하는 연구를 하여 받아들일 수 있는 유일한 증명 방법은 수정한 소거법이라 주장하였다. 그가 제안한 것은 유클리드 방법으로 다소 돌아간 것이었다. 하지만 불가분량법의 슬라이스의 사용에 영향을 받았다(The Inter-IREM Commission, 1997).



[그림 13] The Inter-IREM Commission(1997)

**타게트의 방법**(The Inter-IREM Commission, 1997). 그는 높이가 같은 두 삼각뿔의 부피가 그들의 밑면의 비에 따른다는 것을 보이기 위해 삼각뿔을 높이가 같은 각기둥들로 내접과 외접을 시켰다. 그는 외접한 각기둥들의 합과 내접한 각기둥들의 합의 차이가 가장 아래에 있는 각기둥과 같다는 것에 주목하였다.

각기둥의 개수를 무한대로 가져가면 각기둥의 공통 높이는 주어진 어떤 양보다도 작다. 그러므로 각뿔과 내부의 각기둥의 합의 차이는 어떤 주어진 양보다도 작아질 것이다. 따라서 내접한 각기둥과 외접한 각기둥의 차이인 각기둥의 부피는 주어진 어떤 양보다도 작다. 내접한 각기둥들은 결국에는 각뿔이다.

이렇게 해서 높이가 같은 두 각뿔을 비교하기 위해 그 둘의 내부에 각기둥을 구성하고 그들의 부피의 비는 그들의 밑면의 비에 따른다는 것을 보였다. 결국 두 각뿔의 부피 사이의 비는 내부의 각기둥들 사이의 비와 같을 것이고, 두 각뿔의 부피와 각각의 내부에 구성되는 각기둥들의 합 사이의 차이는 원하는 만큼 작게 만들 수 있기 때문에 밑면의 비와 같다고 주장했다.

그는 각기둥을 무한개로 늘려 가면 그것들이 극도로 작아질 것이라는 생각을 거부했지만, 내접한 각기둥들은 무한개로 늘려 가면 각뿔에 가까워진다고 생각했다.

## 4. 무한소에 의존한 방법

이 방법은 각뿔의 부피를 구하기 위해서 무수히 많은 절단이 필요하다고 하는 것이다. 즉, 입체도형을 무한소의 합으로 보는 것이다.

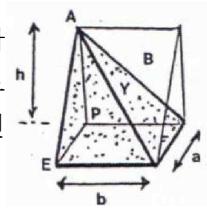
**(1) 유휘의 방법**

고대 그리스와는 대조적으로 중국의 수학자들은 주로 구체적인 문제에 관심이 있었고 그것을 풀기 위한 실용적인 방법을 개발하였다. 구장산술을 해석하는 책을 쓴 유휘는 구장산술의 방법에 대해 '극히' 작은 양을 사용하는 것을 피하기 위한 시도를 하지 않고 각뿔의 부피를 구하는 방법을 사용하였으나 거기에 또한 유클리드적인 접근의 흔적이 있다(The Inter-IREM Commission, 1997).

양마는 밑면이 정사각형이고 한 모서리가 밑면에 수직인 각뿔이다. 유휘는 이것의 부피를 다음과 같이 계산하고 있다.

**유휘의 방법**(The Inter-IREM Commission, 1997). 각뿔 양마의 부피 $A$를 구하기 위해 별노 $B$를 붙여 참도를 구성한다. 참도의 부피 $C$는 이미 알려져 있다. 참도의 모서리를 $a$, $b$, $h$라 하면 $A$, $B$, $C$의 관계에 의해 다음을 얻는다.

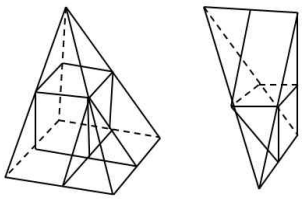
$$A = 2B = \frac{2C}{3} = \frac{2}{3}(\frac{ab}{2}h) = \frac{1}{3}abh$$



[그림 14] The Inter-IREM Commission(1997)

여기서 유휘는 $A = 2B$를 증명하기 위해 다음과 같은 방법을 사용한다.

(유클리드처럼) 모서리의 중심을 사용하여 양마와 별노를 절단한다. 양마는 직사각평행육면체 $M$, 두 개의 각기둥 $N$, 그리고 두 개의 직사각뿔 $L$로 나누어지는 직사각뿔이다. 별노는 두 개의 각기둥 $X$와 두 개의 삼각뿔 $Y$로 세분된다. 그러면 $2N = 2X = M$이다.


[그림 15] The Inter-IREM Commission(1997)

이제 남겨진 양마의 두 각뿔과 별노의 두 각뿔을 보면 크기는 작지만 각각 그것들이 잘려 나온 원래의 각뿔과 같은 모양임을 알 수 있다. 다시 이들 각뿔을 같은 방법으로 자른다. 이것을 남겨진 부피가 '모든 형체가 없어질 정도로 아주 작게' 될 때까지 계속한다. 그러면 극단적으로 형체가 없는 극도로 세밀한 상태에 이르게 된다. 결과적으로 두 입체도형의 비는 유지된다.

중국의 방법은 각기둥의 합보다 큰 각뿔의 부피의 작은 초과량을 무시한 방법이다. 이것은 초과량을 다루려고 시도한 그리스의 방법과 다른 것으로 실용적인 방법이다.

### (2) 17세기의 무한소 논쟁

17세기에 구적법과 입체구적법의 방법이 꽃을 피웠지만, 결과를 구하기 위해 극

소량을 사용하는 것이 받아들여질 수 있는지와 증명에서의 극소량의 역할에 대해서 의견이 분분했다. 이러한 생각의 반영은 미적분 계산을 창시한 사람들에 의해 혁신적인 기류로 옮겨졌다. 큰 이점을 가져다 준 새로운 결과는 구적법의 문제와 접선을 구하는 문제가 서로 역관계에 있다는 것을 인식한 것이었다. 이것은 오늘날 미적분학의 기본정리라 불린다(The Inter-IREM Commission, 1997). 무한소 개념은 뉴튼(S. I. Newton)과 라이프니츠(G. W. Leibnitz)가 각각 미분을 창안할 때 기여하였으며, 이후 적분, 역학, 물리학의 발전에 기여하였다.

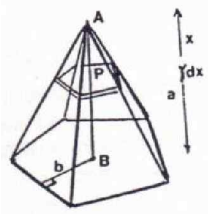
뉴튼은 모멘트라 부르는 극히 작은 양에 대해 연산을 수행했다. 모멘트는 하나의 변량이 시간이 0인 무한히 작은 구간에서 증가하는 양을 이르는 것으로, 지금의 개념으로는 순간변화율이자 미분계수에 대응된다(김남희 외, 2011). 그는 곡선 아래의 넓이를 구하기 위해 그 이전의 수학자들이 그랬던 것처럼 더 이상 무한소의 넓이를 더하지 않고, 다만 곡선의 특정한 점에서 가로축으로의 모멘트에 대한 넓이의 모멘트 비율을 고려했다. 부정적분에 대한 아이디어의 기원은 여기에 있다. 그의 저서 「유율법」과 1687년에 출판된 「프린키피아」에서 미분계수의 아이디어를 즉각적인 변량을 측정하는 것으로 정의하고 있다(The Inter-IREM Commission, 1997).

라이프니츠는 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 무한소를 이용하여 구할 수 있다고 하였다. 그는 선을 1차원의 넓이가 없는 선이 아니라 아주 작은 폭을 가지는 사각형으로 생각했으며, 넓이를 무한소량의 넓이를 가지는 직사각형의 합으로 이해했다. 라이프니츠에 있어 무한소의 기초적인 개념은 차(또는 미분)이다. 변량의 차이는 양의 극히 작은 증가에 대응된다. 라이프니츠와 그의 제자들은 무한소의 원소들의 합으로서의 넓이와 부피를 생각했다. 라이프니츠는 무한소의 합을 묘사하는 라틴어 summa의 첫 글자로부터 유래된 $S$에 따라 현재의 적분기호 $\int$를 처음 사용하였으며, $\int f(x)dx$를 무한소량과 함숫값의 곱의 합으로 생각하였다(최정현, 2011 재인용). 이와 같이 정적분 기호는 형식적인 극한의 정의에 기반 한 현대의 정적분의 정의와 달리 무한소에 대한 직관적 통찰을 바탕으로 탄생하였다. 즉, 극한의 형식적 정의와 실수 체계의 엄밀화 작업이 이루어지기 전까지의 정적분의 개념은 직관적 통찰에 바탕을 둔 무한소와 밀접한 관계가 있었으며, 정적분 기호 자체에도 수학자의 그러한 아이디어가 숨어있음을 알 수 있다. 실수 체계의 엄밀화 작업에 의한 미적분학의 산술화가 이루어지고 난 후 현대의 정적분의 형식적 정의가 탄생하였다(최정현, 2011).

18세기, 기하학 연구에서 각뿔의 부피는 불가분량의 사용에 의해 영감을 받은 방법으로 나타내어진다. 이들은 각뿔의 밑면은 동치일지라도 각뿔의 옆면의 경사도는 서로 다른 각뿔대를 평행한 평면으로 잘려진 '슬라이스'를 통해 비교했다.

루이스 카레(L. Carre)는 각뿔의 부피를 다루었는데, 실제로는 정각뿔에 대해 계산한 것이었다. 또한 꼭짓점이 밑면의 축에 있지 않는 경우는 제외하였다. 그의 방법은 다음과 같다(The Inter-IREM Commission, 1997).

**루이스 카레의 방법.** 각뿔의 밑면의 둘레가 $c$이고, 중심 $B$에서 밑면의 변에 이르는 거리를 $b$라 하면 넓이는 $\frac{bc}{2}$이다[7]. 밑면에 평행한 평면은 $AP=x$이고, $AB=a$인 $AB$ 위의 점 $P$를 지난다. 단면은 밑면과 닮은 다각형이고, 그들 면 사이의 비는 길이 $x$와 $a$ 사이의 비의 제곱과 같다. 따라서 밑면의 넓이 : 단면의 넓이= $a^2 : x^2$이고, 그러므로



[그림 16] The Inter-IREM Commission(1997)

단면의 넓이는 $\frac{bcx^2}{2a^2}$이다. 그리하여 각뿔의 미분은 $\frac{bcx^2}{2a^2}dx$이고, 이것의 적분은 $\frac{bcx^3}{6a^2}$이며, 이것은 높이가 $AP$인 각뿔의 부피이다. 따라서 전체 각뿔의 값은 $\frac{abc}{6}$이다. 즉, 전체 각뿔의 부피는 $\int_0^a \frac{bcx^2}{2a^2}dx = \left[\frac{bcx^3}{6a^2}\right]_0^a = \frac{abc}{6} = \frac{1}{3}(\frac{bc}{2})a$이다.

각뿔의 밑면이 정다각형이 아니라도 추론은 거의 같다. 즉, 닮은 다각형의 비는 그들의 대응변의 비의 제곱과 같다. 아니면 미분이나 각뿔의 원소가 그들의 높이의 비의 제곱으로 다소 감소한다. 이러한 적분계산은 부피를 구하는데 있어 선구자들의 것보다 훨씬 유용하지만 무한소의 사용에 의지하는 방법이다.

## 5. 극한에 의한 통합적 방법

소진법, 불가분량, 미분, 무한소의 방법에 기초한 이론들은 반대에 부딪히기도 하였고 지지를 받기도 하였다. 무한소의 방법은 논란의 여지가 없는 가장 빠르고 직접적인 방법이지만, 18세기 후반 그리고 19세기에는 엄밀한 기초가 부족한 것에 불만족스러워 하는 수학자들이 나타났다. 카르노(L. Carnot)는 1797년 그의 저서에서 동치가 될 수 있는 모든 방법을 고려하였으며, 오류를 보충하기 위한 원리는 계산 결과의 정확함임을 확인시켰다. 반면 달랑베르(d'Alembert)는 극한의 개념을 '계산의 형이상학'으로 처음 확언하였지만, 각뿔의 부피를 계산할 때 그 아이디어를 사용하지는 않았다. 그의 아이디어는 라플라스(Laplace)에 의해 지지되었다. 그리고 코시(Cauchy)가 연속함수, 도함수, 구간에서 연속함수의 적분의 아이디어를 극한이라는 용어를 통해 정의하였고, 이 용어는 유클리드 이후부터 사용되었던 각

7) 다각형을 삼각형으로 분할하면, 각 삼각형의 밑면은 다각형의 각 변이고 높이는 모두 $b$이기 때문이다.

뿔의 부피를 구하는 모든 방법을 통합한다(The Inter-IREM Commission, 1997). 비로소 비교되는 두 각뿔 각각은 유클리드의 반복적인 절단에 의해서 정의되는, 또는 타게트와 라그랑쥬에 의해 정의되는 각기둥에 의해 각기둥들의 부피의 수열의 극한을 부피로 가진다. 각뿔의 부피, 함수의 적분은 각뿔의 높이 $x$와 관련이 있고, 그 함수의 리만합의 극한이다. 비교되는 두 각뿔의 분할할 수 없는 단면의 넓이는 '부피함수'의 도함수이다. 두 각뿔의 부피함수는 같은 도함수와 같은 초깃값($x=0$일 때 $0$)을 가지므로 같다(The Inter-IREM Commission, 1997). 로베르발의 방법 또한 극한이라는 용어로 번역될 수 있는데, 정의된 수열은 각뿔 안에 내접한, 두께가 같은 각기둥들의 부피의 합으로 간주될 수 있다. 즉, 이 극한이 각뿔의 부피이다.

곡선 도형의 넓이에 대한 불가분량 또는 무한소 해석은 18세기 이후 형식적인 극한 개념이 정의되면서 해결되었다. Grabiner(2005)에 따르면, Cauchy는 형식화된 극한 개념을 바탕으로 정적분을 불가분량의 합이나 무한소 곱의 합이 아니라 합의 극한으로 정의하였다. 코시는 연속함수 $f(x)$에 대하여 주어진 구간 $[a, b]$를 $n$등분하여 얻은 값 $x_1-a$, $x_2-x_1$, $\cdots$, $b-x_{n-1}$을 통해 만들어진 $S=(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(b-x_{n-1})f(x_{n-1})$는 분할의 횟수 $n$이 충분히 크면 유일한 극한값을 가지게 됨을 증명하였으며, 이를 정적분 $\int_a^b f(x)dx$로 표기하였다. Cavalcante & Tocorov(2008)는 정적분의 개념 정의에 사용된 $S$는 분할 횟수 $n$에 대한 수열이기 때문에 정적분은 일종의 수열의 극한이라고 설명하기도 하였다. 그러므로 리만합의 극한이라는 정적분의 개념 정의는 불가분량과 무한소 해석을 형식적인 극한 개념에 기반하여 극복한 결과를 추상화한 수열의 극한으로 볼 수 있다(신보미, 2009 재인용). 이처럼 정적분 개념은 극한의 도달 가능성, 불가분량과 무한소 개념과 맞물려 발달하였다(신보미, 2009).

이렇게 해서 각뿔의 부피는 정적분에 의해 구명되게 되었다. 하지만 정적분의 개념은 이제까지의 각뿔의 부피에 관한 노력의 종합적 산물인 것이다.

## Ⅲ. 교수학적 의의와 시사점

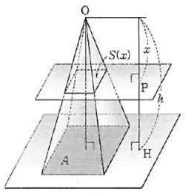
뿔의 부피 구하기에 대해서는 중학교에서 처음 다루는데, 초등학교에서 배운 기둥의 부피를 구하는 방법과 기둥과 뿔의 부피 관계를 직관적인 방법으로 지도하고, 이를 활용하여 뿔의 부피를 구하고 있다. 이후 고등학교에서 구적법과 정적분으로 입체의 부피를 구하는 내용이 다루어지고 있으며, 불가분량에 관한 내용도 소개되고 있다.

위의 실험을 통해 밑면이 합동이고 높이가 같은 사각뿔과 사각기둥에서 사각뿔의 부피는 사각기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$임을 알 수 있다.

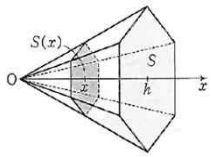
실제로 각뿔의 부피는 밑면이 합동이고 높이가 같은 각기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$과 같음이 알려져 있다. 따라서 각뿔의 부피는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(\text{각뿔의 부피})=\frac{1}{3}\times(\text{각기둥의 부피})=\frac{1}{3}\times(\text{밑넓이})\times(\text{높이})$$

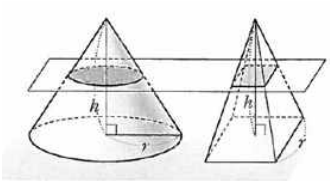
[그림 17] 중학교 수학(신준국 외, 2012)



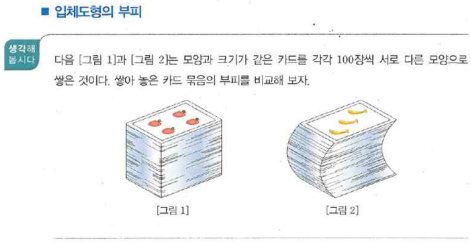

[그림 18] 수학Ⅱ(조태근 외, 2009)




[그림 19] 적분과 통계(계승혁 외, 2010)




[그림 20] 적분과 통계(이강섭 외, 2015)




[그림 21] 미적분Ⅱ(우정호 외, 2015)

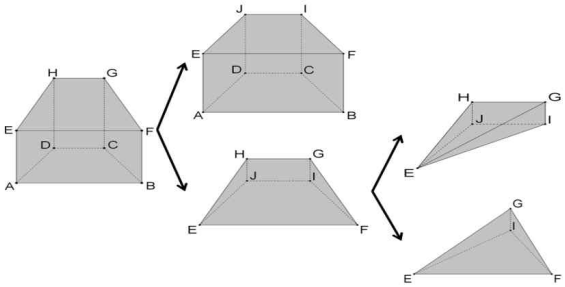
각뿔의 부피 구하기에 관한 학교수학의 내용은 다음과 같이 정리된다.

① 중학교에서는 기둥과 뿔의 부피 관계, 뿔의 부피 공식을 직관에 의존하여 지도하고 있다.
② 고등학교에서는 각뿔의 부피 구하기를 구적법과 정적분 방법으로 구하는데, 절단면이 밑면과 닮음임을 전제로 하고 있다.
③ 전형적인 예인 직각뿔이나 정각뿔을 주로 다루고 있다.
④ 카발리에리 방법을 이론적으로만 소개하는 내용이 많다.

각뿔의 부피 구하기는 직관적으로 확인이 가능한 일견 쉬운 문제인 것 같지만 이 문제에 관한 논의는 수 천 년에 걸쳐 이루어져 왔으며, 다양한 방법들이 모색되어 왔다.

유한 절단에 의한 방법은 다루어지지 않고 있지만 수학사에 나타난 첫 방법이었으며, 비록 수학적으로 일반성을 보장 받지 못하지만 높이가 다른 다각기둥의 부피

를 다양한 방법으로 구하게 한 학생들의 활동[8]에서 가장 먼저 보여 질만큼 자연스러운 사고이기도 하다.




[그림 22] 변형 입체도형의 부피 구하기에 관한 학생 산물

한편 교과서에서는 전형적인 예인 직각뿔이나 정각뿔을 주로 다루고 있다. 하지만 이것만으로는 일반적인 경우로 확장할 수 없으며, 이것은 카발리에리의 개념에 의해 설명될 수 있다. 역사적으로 불가분량은 왜 우리가 정각뿔 등의 전형적인 입체도형에 관해 부피 계산을 하는 것만으로도 일반적인 입체도형으로 논의를 확장할 수 있는가에 대한 답을 주지만, 그 부분이 학교수학에서는 충분히 다루어지지 않고 있다. 더욱이 불가분량에 의한 방법은 같은 방향으로의 환원가능성을 전제하며, 이것을 위해 닮음이라는 조건이 함의되어 있지만 이러한 사실이 간과되고 있다. 카발리에리의 원리를 소개하는 교과서는 갑작스럽게 너무 일반적인 사례로 가거나 원리의 이론적인 설명만을 소개하고 있어 그 간격을 메우는 것은 교사의 몫으로 남아있다. 따라서 교사는 각뿔의 부피 구하기와 관련한 개념과 방법들에 대한 개연성 있는 이해가 필요하다.

각뿔의 부피 요소는 밑넓이와 높이인데, 임의의 각뿔은 밑넓이의 대상인 밑면의 모양과 높이의 자유도가 높다. 자유도가 높다는 것은 상황을 통제하기가 어렵다는 것이다. 따라서 임의의 각뿔을 임의의 다각뿔로, 임의의 다각뿔을 밑면의 모양이 같은 직각뿔로 환원할 수 있으면 자유도가 비교적 낮아지게 된다. 또한 직각뿔은 구적법이나 정적분의 개념을 사용할 때 그 중요도가 더 높아지는데, 높이에 대한 직접적인 정보를 주며 해석기하적으로 접근할 때도 축과 평행이므로 통제하기가 수월하다. 나아가 정각뿔은 밑면의 모양과 높이의 자유도가 훨씬 낮아진다. 따라서 환원가능성에서는 삼각뿔이나 사각뿔이, 부피공식을 구할 때는 정삼각뿔이나 정사각뿔이 주요 대상이 된다. 한편, 넓이는 삼각형보다 사각형이 더 쉬우므로 밑면이 정사각형인 직각뿔이 주된 대상이 된다. 그래서 그리스 시대에는 삼각형을 사각형으로 환원하는 방법이 연구되기도 하였다. 따라서 각뿔 부피 구하기의 핵심은 환원

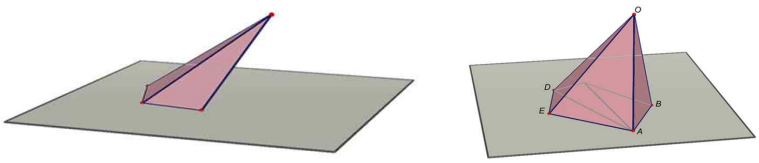
8) '변형 입체도형의 부피 구하기' 연구에서 학생들이 활동한 내용의 일부이다.

가능성과 전형적인 각뿔의 부피 공식이 된다.

그러나 유한 절단에 의한 환원가능성은 모든 도형에 보장되는 성질이 아님이 밝혀지게 된다. 따라서 새로운 방법을 모색하게 되며, 그것이 수학적 개념의 발전으로 이어지게 된다. 유한 절단에 의한 환원가능성은 부피가 같은 두 각뿔에 관한 것으로 그렇지 않은 경우의 각뿔들의 부피 비교는 불가능하다. 이 경우 부피 요소인 밑넓이와 높이 중 높이를 고정함으로써 밑넓이의 비로 부피 관계를 밝히려 하였다. 이 주제는 유클리드로부터 시작해 많은 수학자들이 연구한 주제였으며, 카발리에리의 불가분량에 의해 밑면의 모양과 무관하게 '기둥이나 뿔이기만 하면 성립하는 관계'로 일반화 되게 된다. 즉, 단면이 밑면과 닮음이 보장되면 밑면의 넓이 비로 부피 비를 구할 수 있으므로 어떤 형태의 기둥이나 뿔의 부피라도 구할 수 있게 된다. 또한 다각형의 경우 그 넓이는 언제나 구할 수 있으므로 기둥과의 관계가 파악되면 기둥의 부피를 구해 각뿔의 부피를 계산할 수 있다. 따라서 주제 4는 환원가능성에 대한 고전적 필요를 없애는데 기여한다. 하지만 밑면이 원이나 다각형이 아닌 경우는 해석기하학적 방법이나 카발리에리의 방법에 의한 논의가 다시 필요해진다.

이처럼 네 주제들은 나름의 배경과 관련성을 가지고 있으며, 여러 방법의 증명에서 환원가능성, 다루는 각뿔의 모양과 수, 기둥과 각뿔의 관계가 중요하게 된다.

그러므로 학교수학의 지도에 있어 각뿔의 모델을 다양하게 제시하여야 하며, 이때 전형적인 예를 통해 공식을 이해하게 하고, 변형 예를 제시하여 카발리에리의 의의까지 경험시키는 것이 중요하다. 이렇게 변형 예[9]에 노출시킴으로써 역사에서 나타난 사고와 관점으로의 이동 및 의의를 경험하게 할 수 있다. 이때 Cabri와 같은 공학적 도구를 사용하면 문제해결 방법 탐구에 도움이 될 것이다.




[그림 23] 전형적이지 않은 각뿔의 예

각뿔의 부피를 구하려는 사고는 기하학적 관점에서 해석적 관점(무한의 개념)으로 그리고 해석기하학적 관점으로 진행한다. 따라서 유한 절단을 포함한 역사적인 사고과정을 경험하게 하여, 각 방법의 장· 단점을 인식하게 하고 극복의 과정을 인지하게 하여 자연스러운 사고 속에서 문제해결의 사고를 이해하게 할 필요가 있

9) 변형 예의 경우, 다양한 관점의 경험을 위해 주제 4를 사용하지 않고 주제 2의 관점에서 접근할 필요가 있다. 이 활동에 의해 카발리에리 원리의 적용에 있어 중요한 요소를 인지하게 된다.

다. 그러기 위해 교사는 각뿔의 부피 구하기에 대한 역사적 발전 과정과 주제 및 방법의 본질적 의미를 이해하여 수업에 이러한 사고와 관점이 반영되게 할 필요가 있다.

그러므로 수업은 먼저 전형적인 각뿔의 부피를 다양한 방법으로 구하는 창의적 활동을 한 후, 비전형적인 각뿔의 부피 구하기에 대한 탐구 활동을 한다. 이 과정에서 각 주제와 방법들에 자연스럽게 노출되게 할 필요가 있다. 나아가 카발리에리의 방법을 적용해야 하는 상황을 제시하여 각뿔의 부피 구하기에 관한 수학적 개념들의 개연성과 엄밀성을 경험하도록 구성하여야 할 것이다.

## Ⅳ. 결론

2015 개정 교육과정(2015)에서는 창의· 융합형 인재 양성을 교육목표로, 자기관리 역량, 지식정보처리 역량, 창의적 사고 역량, 심미적 감성 역량, 의사소통 역량, 공동체 역량을 그러한 인재가 갖추어야 할 역량으로 제시하였다. 또한 이러한 내용을 교과역량으로 더욱 구체화하였는데, 수학 교과 역량의 의미를 “수학교육을 통해 학습자가 길러야 할 기본적이고 필수적인 능력 또는 특성”으로 규정하고, (1) 문제해결, (2) 추론, (3) 창의· 융합, (4) 의사소통, (5) 정보처리, (6) 태도 및 실천의 여섯 가지를 수학 교과 학습을 통해 길러야 할 수학 교과 역량으로 선정하였다. 따라서 이러한 수학적 역량을 갖춘 창의· 융합형 인간의 양성을 위한 교육적 소재 및 프로그램의 개발이 필요하며, 이를 뒷받침하기 위한 교사의 전문성이 요구된다. 특히 가르칠 지식의 이해와 수학화를 위한 교과전문성이 필요하다.

각뿔의 부피 구하기 문제는 많은 다양한 사고와 시도를 역사적으로 가지고 있다. 각뿔의 부피 구하기는 유한 절단에 의한 방법, 무한 절단의 사고이지만 무한을 피하고자 했던 유클리드와 르장드르의 방법, 불가분량에 의한 카발리에리와 라미의 방법, 무한과 무한소의 개념을 받아들인 구적법, 그리고 이들 개념들을 종합한 극한에 의한 정적분에 이르기까지 서로의 한계와 장점을 공유하면서 발전되어 왔다.

한편, 방법의 발전적인 흐름과는 달리 초기 연구부터 주제들은 환원가능성과 부피 공식, 두 각뿔 사이의 관계(특히 밑넓이와 부피의 관계), 기둥과 뿔 사이의 관계에 관한 것이 일관되게 추구되어 왔다. 하지만 역사적 과정에서 알 수 있듯이 사용되는 개념이 같더라도 각 방법에서 다루는 주제에는 차이가 있었다. 그리고 방법의 발전과 함께 주제의 중요도는 달라지고 있다. 주제 1은 유한 절단이 일반적 해결방법이 아님이 밝혀지면서 소멸되었으며, 주제 4는 주제 2가 해결되면 해석 또는 관계맺음에 지나지 않으므로 결국 각뿔의 부피 구하기는 주제 2와 주제 3의 문제로 귀결된다. 즉, 각뿔의 부피 구하기는 주제 2와 주제 3이 카발리에리의 방법, 구적법, 정적분에 의해 서로 관계맺음으로써 임의의 각뿔로 대상 도형의 범주를 넓

히게 된다. 그러나 방법적으로는 주제 4의 결과와 정적분의 방법이 중요하게 된다. 이것은 학교수학에서 다루는 소재와 수학적 개념에 고스란히 드러나고 있다. 주제 2와 주제 4는 중학교의 직관적 지도에서, 주제 1과 주제 3은 구적법, 정적분과 카발리에리의 원리에서 다루고 있다. 그러나 학교수학에서는 단편적이고 결과론적으로 접근하고 있어 일반 각뿔로의 확장 및 일반화되는 과정의 본질적 의미나 개연성이 부족하다. 따라서 각뿔의 부피 구하기 지도는 전형적인 각뿔의 부피 구하는 공식의 유도와 증명, 변형 각뿔의 부피 구하는 방법, 일반화와 관련하여 환원가능성을 다루는 카발리에리의 원리, 다루는 각뿔의 모양과 수, 기둥과 각뿔 사이의 관계 등이 탐구되어야 하며, 최종적으로 불가분량과 정적분의 의의가 충분히 인식되도록 하여야 한다.

이와 같이 각뿔의 부피 구하기 문제는 수학적 역량, 특히 문제해결 능력, 추론 능력, 창의· 융합 능력, 의사소통 능력 등을 신장하기 위한 좋은 소재가 될 수 있다. 수학적 개념은 역사를 통해 형성되어 왔으며, 그 결과물인 수학적 개념은 교육과정과 교과서에 녹아있다. 그러므로 교육 내용의 구성과 이해는 수학적 문제의 해결과정에 대한 경험을 수학화하여 교육과정과 교과서가 담아내지 못하는 본질적 의미를 파악하는 것이어야 하며, 교사는 이를 수업에 충분히 반영할 수 있어야 할 것이다.

## 참고문헌

[1] 계승혁· 김홍종· 하길찬· 박복현· 장성욱· 박장순(2010). 고등학교 적분과 통계. 성지출판(주): 서울.

[2] 김권욱· 김성미(1998). 적분론의 역사적 발전 과정에 대한 연구. 순천대학교 과학교육연구소 <과학과 교육>, 제6권, 159-192.

[3] 김남희· 나귀수· 박경미· 이경화· 정영옥· 홍진곤(2011). 예비교사와 현직 교사를 위한 수학교육과정과 교재연구 개정판, 경문사: 서울.

[4] 김부윤· 정영우 역(2011), 수학사를 활용한 교재연구. 경문사: 서울.

[5] 박선용(2011). 카발리에리 원리의 생성과정의 특성에 관한 고찰. 한국수학사학회지, 제24권 제2호, 17-30.

[6] 신보미(2009). 고등학생들의 정적분 개념 이해. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 제11권 제1호, 93-110.

[7] 신준국 외 12인(2012). 중학교 수학 1. 두 배의 느낌: 서울.

[8] 우정호 외 24인(2015). 고등학교 미적분Ⅱ. 동아출판(주): 서울.

[9] 유클리드 씀. 이무현 옮김(1997a). 기하학원론 - 평면기하. 교우사: 서울.

[10] 유클리드 씀. 이무현 옮김(1997b). 기하학원론 - 입체기하. 교우사: 서울.
[11] 이강섭· 황규채· 송교식· 양인웅(2015). 고등학교 적분과 통계. (주) 지학사: 서울.
[12] 장혜원(2008). 구의 부피에 대한 수학사적 고찰 및 교수학적 함의. 한국수학사학회지, 제21권 제2호, 19-38.
[13] 정연준· 강현영(2008). 정적분의 무한소 해석에 대한 고찰. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 제10권 제3호, 375-399.
[14] 조태근· 임성모· 정상권· 이재학· 홍진곤(2009). 고등학교 수학Ⅱ. (주)금성출판사: 서울.
[15] 차종천(2000). 구장산술· 주비산경. 범양사출판부: 서울.
[16] 최정현(2011). 정적분 기호 이해의 특징과 교수학적 전략. 한국수학사학회지, 제24권 제3호, 77-94.
[17] The Inter-IREM Commission(1997). History of Mathematics Histories of Problems. Paris: Ellipses.
[18] http://dic.daum.net/word/view.do?wordid=kkw000242843&supid=kku000310901. 다음. 2016.
[19] http://ncic.re.kr/mobile.kri.org4.inventoryList.do;jsessionid=1EAA5122285A1C53736C12F691946745. 국가교육과정정보센터. 2016.
[20] http://www3.synapse.ne.jp/kintaro/content226.htm. 2016.
[21] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_problems#The_24th_problem. 위키백과. 2016.

Kim, Boo Yoon†
Pusan National University
Busan, 46241, Republic of Korea
e-mail : kimby@pusan.ac.kr

Chung, Young Woo
Kyungsung University
Busan, 48434, Republic of Korea
e-mail : young38woo@daum.net

† Corresponding author