

유한요소-전달강성계수법에 의한 이산계 곡선보의 자유진동해석 Free Vibration Analysis of Curved Beams Regarded as Discrete System Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method

최명수* · 여동준**†

Myung-Soo Choi* and Dong-Jun Yeo**†

(Received 31 October 2016, Revised 17 January 2017, Accepted 18 January 2017)

Abstract: A curved beam is one of the basic and important structural elements in structural design. In this paper, the authors formulated the computational algorithm for analyzing the free vibration of curved beams using the finite element-transfer stiffness coefficient method. The concept of the finite element-transfer stiffness coefficient method is the combination of the modeling technique of the finite element method and the transfer technique of the transfer stiffness coefficient method. And, we confirm the effectiveness the finite element-transfer stiffness coefficient method from the free vibration analysis of two numerical models which are a semicircle beam and a quarter circle beam.

Key Words : Free Vibration, Curved Beam, Discrete System, Finite Element Method, Transfer Stiffness Coefficient Method

1. 서 론

곡선보는 직선보와 더불어 구조물의 설계 시에 많이 사용되는 기본적인면서도 중요한 구조요소 중의 하나이다.

곡선보의 진동해석에 관한 연구는 예전부터 국내외의 많은 연구자들에 의해 수행되어 왔고, 연구의 대부분이 특정 곡선보에 대한 미분방정식을 수치해석하거나 유한요소법에 사용하기 위한 다양한 곡선보 요소의 개발에 관한 내용이었다.¹⁻³⁾

저자들은 기존의 유한요소법의 모델링 기법과

전달강성계수법의 전달 기법을 접목한 유한요소-전달강성계수법^{4,5)}을 개발하였고, 이 방법을 직선형 구조물의 정적해석 및 동적해석에 적용하면 효과적으로 해석을 수행할 수 있음을 확인한 바 있다. 그러나 지금까지 유한요소-전달강성계수법은 절점이 직선적으로 나열된 구조물에 국한되었고, 따라서 범용성 있는 해석기법으로서는 한계가 있었다. 따라서 저자들은 이 연구를 통해 곡선보와 같이 절점이 곡선적으로 굽어져 연결된 구조물에 대해서도 유한요소-전달강성계수법으로 효과적인 진동해석이 가능함을 제시하고 이 방법의 유용성을 확인한다.

**† 여동준(교신저자) : 전남대학교 해양기술학부

E-mail : djyeo@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7133

*최명수 : 전남대학교 해양경찰학과

**† Dong-Jun Yeo(corresponding author) : Faculty of Marine Technology, Chonnam National University.

E-mail : djyeo@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7133

*Myung-Soo Choi : Department of Maritime Police Science, Chonnam National University.

2. 자유진동 해석 알고리즘

Fig. 1과 같이 X-Y 평면상에 존재하는 곡선보의 자유진동 해석을 위한 알고리즘을 유한요소-전달강성계수법으로 정식화한다.

2.1 해석 모델

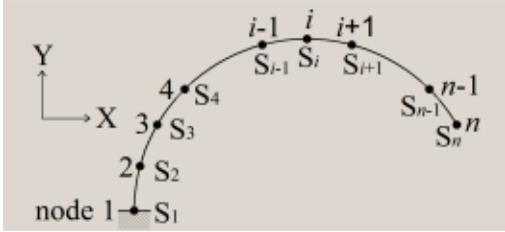


Fig. 1 Analytical model

곡선보는 다수의 일정단면 곡선보 요소로 구성되며, 곡선보 요소는 요소의 좌우측에 각각 하나씩 절점을 갖는다. 따라서 곡선보는 연속적으로 많은 절점들을 갖는데, 좌단에서 우단으로 각 절점들을 순차적으로 절점 1, 절점 2, ..., 절점 n 이라 부른다.

먼저 자유진동 해석을 수행하기 위하여 각 절점의 변위벡터($\mathbf{d}_i = \{u, v, \theta\}_i^T$)는 접선방향, 법선방향, 회전방향의 변위(u, v, θ)로 구성되고, 절점의 힘벡터($\mathbf{f}_i = \{P, Q, M\}_i^T$)도 접선방향 및 법선방향의 힘(P, Q)과 모멘트(M)로 구성된다.

전달강성계수법에서는 임의의 절점 i 에서 힘벡터(\mathbf{f}_i)와 변위벡터(\mathbf{d}_i) 사이의 관계를 다음식과 같이 정의하고,

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{d}_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1)$$

여기서 \mathbf{S}_i 를 절점 i 의 강성계수행렬이라 부른다.

2.2 곡선보 요소의 강성행렬 및 질량행렬

i 번째 곡선보 요소의 동강성행렬(\mathbf{D}_i)은 식 (2)와 같이 i 번째 곡선보 요소의 강성행렬(\mathbf{K}_i)과 질량행렬(\mathbf{M}_i) 그리고 고유각진동수 ω 로부터 유도

할 수 있다. 그리고 크기가 6×6 인 동강성행렬 \mathbf{D}_i 는 크기가 3×3 인 부분행렬 $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i^T, \mathbf{C}_i$ 로 분할될 수 있다.

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{K}_i - \omega^2 \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i^T & \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서

$$\mathbf{K}_i = \int_0^L \mathbf{E}^T \mathbf{R} \mathbf{E} ds$$

$$\mathbf{M}_i = \rho A \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} ds$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{J} \mathbf{H}^{-1}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{G} \mathbf{H}^{-1}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1/R) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ (1/R) & \beta & 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & R & -1 & -s & -s^2 & -s^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2R & 6Rs \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 R 은 곡선보 요소의 곡률 반경, β 는 곡선보 요소의 부채꼴 중심각, L 은 곡선보 요소의 길이로서 R 과 β 의 곱과 같다. E 와 ρ 는 각각 재료의 종탄성계수와 밀도이고, I 와 A 는 각각 보 요소의 단면 2차모멘트와 단면적이고, s 는 곡선보 요소의 로컬 좌표이다.

2.3 진동수 방정식

전달강성계수법을 이용하여 Fig. 1의 곡선보를 대상으로 자유진동 해석을 수행하기 위한 절점 강성계수행렬의 전달 및 진동수 방정식의 유도 과정을 정리하면 다음과 같다.⁴⁾

1) 첫 번째 절점인 절점 1의 강성계수행렬(\mathbf{S}_1)은 식 (4)와 같이 절점 1의 접선방향, 법선방향, 회전방향 기초지지 스프링의 스프링상수(k_u, k_v, k_ϕ)로 구성된 대각 행렬로 정의된다. Fig. 1과 같

이 좌단의 경계조건이 고정인 경우에는 모든 스프링상수의 값에 10^{20} 을 대입하여 계산한다. 만약에 좌단의 경계조건이 자유인 경우에는 모든 스프링상수의 값에 0을 대입하여 계산한다.

$$S_i = \begin{bmatrix} k_u & 0 & 0 \\ 0 & k_v & 0 \\ 0 & 0 & k_\phi \end{bmatrix}_1 \quad (4)$$

2) 곡선보 요소의 좌측 절점(절점 i)의 강성계수행렬(S_i)을 가지고 우측 절점(절점 $i+1$)의 강성계수행렬(S_{i+1})을 구하는 전달식은 식 (5)와 같다. 따라서 식 (5)를 연속적으로 적용하면 최종 절점인 절점 n 의 강성계수행렬 S_n 을 구할 수 있다.

$$S_{i+1} = C_i - B_i^T (S_i + A_i)^{-1} B_i \quad (5)$$

$(i = 1, 2, 3, \dots, n-1)$

3) 마지막 절점인 절점 n 의 강성계수행렬을 구한 후, 진동수방정식인 다음 식으로부터 고유진동수를 구한다.

$$\det S_n = 0 \quad (6)$$

4) 고유모드를 구하기 위해, 마지막 절점의 변위벡터는 식 (7)로 구하고, 나머지 절점의 변위벡터는 식 (8)과 같이 순차적으로 구할 수 있다.

$$S_n d_n = 0 \quad (7)$$

$$d_i = -(S_i + A_i)^{-1} B_i d_{i+1} \quad (8)$$

$(i = n-1, n-2, \dots, 1)$

3. 수치 계산 결과

이 연구에서 정식화한 알고리즘인 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)을 바탕으로 매트랩⁶⁾을 이용하여 전산 프로그램을 개발하였고, 비교를 위해 유한요소법(FEM)⁷⁾을 기반으로 한 자유진동 해석용 전산 프로그램을 추가로 개발하였다. 그리고 2개의 수치 계산 모델을 대상으로 퍼스널 컴퓨터 (Intel Core2 Duo CPU P8700 @2.53GHz, 3.00GB

RAM)에서 자유진동 해석을 수행하였고, 그 결과를 비교하였다.

3.1 계산 모델 1

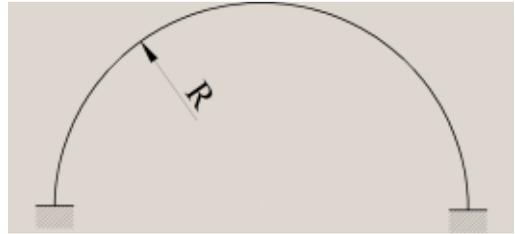


Fig. 2 Computational model I

이 연구에서 제시된 해석 방법(유한요소-전달강성계수법)의 신뢰성을 확인하기 위하여, 선행 연구자⁸⁻⁹⁾에 의해 1차 및 2차 고유진동수가 계산되었던 Fig. 2와 같이 반원형 보를 계산 모델 I로 선정하여 자유진동 해석을 수행하였다. 계산 모델 I은 경계조건이 양단 고정이고, 반경(R)이 0.4 m, 단면의 내경과 외경이 각각 0.008 m와 0.010 m, 종탄성계수가 200 GPa, 밀도가 7850 kg/m^3 이다.

계산 모델 I을 대상으로 곡선보 요소의 개수를 100개, 200개, 400개로 각각 모델링한 후, 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)과 유한요소법(FEM)으로 고유진동수를 계산하였다. 모델링한 곡선보 요소의 개수에 따른 계산 결과를 Table 1에서 Table 3에 나타내었다. 그리고 비교를 위해 선행 연구자들에 의해 발표된 동일 모델에 대한 해석해(analytical solution)인 1차 및 2차 고유진동수를 Table에 포함하였다.

제시된 Table 1~Table 3에서 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법의 계산 결과는 완전히 일치하였다. 그리고 모델링에 사용된 곡선보 요소의 수가 증가할수록 해석 해에 수렴해감을 확인할 수 있었다. 이것은 유한요소 모델링에서 사용된 이산화 모델링의 당연한 결과이다.

Table 4에 전달강성계수법과 유한요소법으로 고유진동수를 구하는데 소요된 계산 시간을 제시하였다. 곡선보 요소의 수가 증가할수록 유한요소-전달강성계수법은 단순히 선형적으로 증가되지

Table 1 Natural frequencies[Hz] of model I with 100 circular beam elements

Order	FE-TSCM	FEM	Analytical
1	77.0	77.0	70.5
2	163.2	163.2	154.8
3	296.6	296.6	—

Table 2 Natural frequencies[Hz] of model I with 200 circular beam elements

Order	FE-TSCM	FEM	Analytical
1	72.1	72.1	70.5
2	157.1	157.1	154.8
3	290.1	290.1	—

Table 3 Natural frequencies[Hz] of model I with 400 circular beam elements

Order	FE-TSCM	FEM	Analytical
1	70.9	70.9	70.5
2	155.5	155.5	154.8
3	288.4	288.4	—

만, 유한요소법은 기하급수적으로 크게 증가한다 것을 확인할 수 있다.

따라서 고정도의 고유진동수를 위해서는 곡선보 요소의 수를 증가시켜야 하고, 이 경우 유한요소법보다는 유한요소-전달강성계수법이 계산시간의 측면에서 효과적임을 확인할 수 있었다.

Table 4 CPU times [sec] for model I

Number of circular beam elements	FE-TSCM	FEM
100	0.511	0.464
200	1.005	4.415
400	1.975	37.7

계산 모델 I에 대하여 고유모드를 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 구한 결과 역시 완전히 잘 일치하였다. Fig. 3은 곡선보 요소의 수

를 400개로 모델링하여 유한요소-전달강성계수법으로 구한 1차 모드이다. 그리고 Fig. 4와 Fig. 5는 각각 2차 모드와 3차 모드이다.

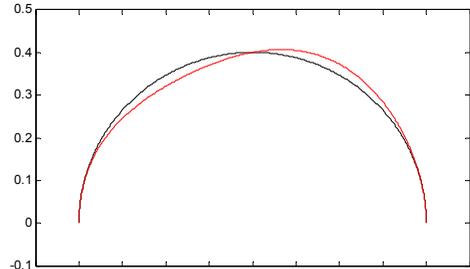


Fig. 3 1st natural mode of model I

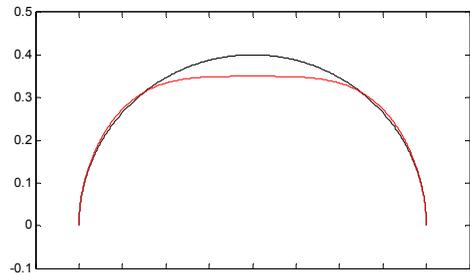


Fig. 4 2nd natural mode of model I

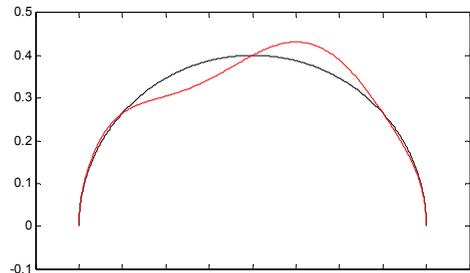


Fig. 5 3rd natural mode of model I

3.2 계산 모델 2

Fig. 6과 같이 열림각(opening angle)이 90°인 1/4 원형보를 계산 모델 II로 선정하여 자유진동 해석을 수행하였다. 계산 모델 II의 경계조건은 고정-자유이고, 반경(R)이 1.0 m, 사각단면의 폭과 높이가 각각 0.02 m와 0.01 m, 종탄성계수가 200 GPa, 밀도가 7800 kg/m³이다.

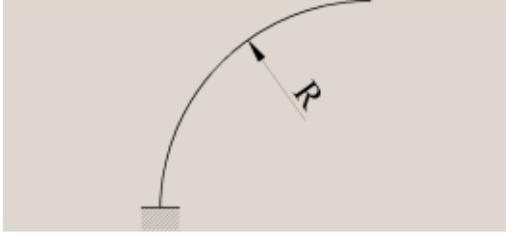


Fig. 6 Computational model II

계산 모델 II를 대상으로 곡선보 요소의 개수를 100개, 200개, 400개로 각각 모델링한 후, 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)과 유한요소법(FEM)으로 고유진동수를 계산하였다. Table 5~Table 7에 나타난 바와 같이, 양 방법의 계산 결과는 완전히 일치하였다. 동일한 곡선보요소를 사용하였으나 고유진동수를 계산하는 방법이 전혀 다름에도 불구하고 동일한 결과가 나왔다는 것은 유한요소-전달강성계수법에서 사용한 전달 계산이 정확함을 알 수 있다.

Table 5 Natural frequencies [Hz] of model II with 100 circular beam elements

Order	FE-TSCM	FEM
1	5.1	5.1
2	20.4	20.4
3	56.7	56.7
4	111.9	111.9
5	186.0	186.0

Table 6 Natural frequencies [Hz] of model II with 200 circular beam elements

Order	FE-TSCM	FEM
1	4.0	4.0
2	17.8	17.8
3	54.0	54.0
4	109.4	109.4
5	183.6	183.6

Table 7 Natural frequencies [Hz] of model II with 400 circular beam elements

Order	FE-TSCM	FEM
1	3.6	3.6
2	17.1	17.1
3	53.3	53.3
4	108.8	108.8
5	183.0	183.0

Table 8 CPU times [sec] for model II

Number of circular beam elements	FE-TSCM	FEM
100	0.815	0.449
200	1.595	4.573
400	3.158	38.914

Table 8에 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 고유진동수를 구하는데 소요된 계산 시간을 제시하였다. 곡선보 요소의 수가 증가할수록 유한요소-전달강성계수법이 계산시간의 측면에서 우수함을 재차 확인할 수 있었다.

계산 모델 II에 대하여 고유모드를 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 구한 결과 역시 완전히 일치하였다. Fig. 7은 곡선보 요소의 수를 400개로 모델링하여 유한요소-전달강성계수법으로 구한 1차 고유모드이다. Fig. 8과 Fig. 9는 각각 2차 및 3차 고유모드이다.

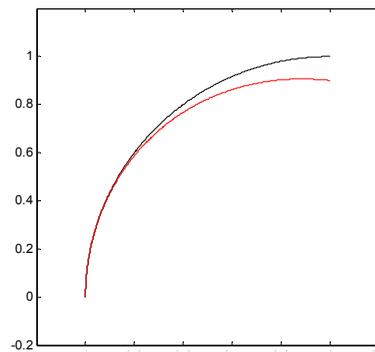


Fig. 7 1st natural mode of model II

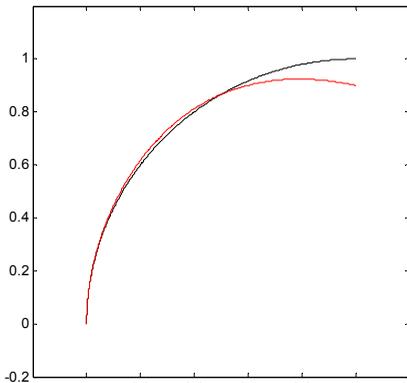


Fig. 8 2nd natural mode of model II

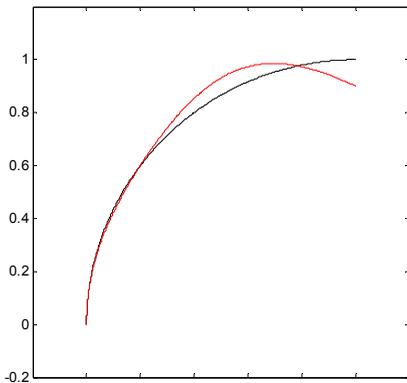


Fig. 9 3rd natural mode of model II

5. 결 론

곡선보는 직선보와 더불어 구조물의 설계 시에 많이 사용되는 기본적인면서도 중요한 구조요소 중의 하나이다.

저자들은 이 논문을 통해 유한요소법의 모델링 기법과 전달강성계수법의 전달 기법을 집목한 유한요소-전달강성계수법으로 곡선보의 자유진동 해석을 위한 전산 알고리즘을 정식화하였다. 그리고 반원형 보와 1/4 원형 보에 대한 자유진동 해석을 수행하여 유한요소-전달강성계수법으로 곡선보와 같이 절점이 곡선적으로 굽어져 연결된 구조물에 대해서도 자유진동 해석을 효과적으로 수행할 수 있음을 수치 계산 결과를 통해 제시하였고, 따라서 이 방법의 유용성을 확인하였다.

References

1. A. B. Sabir and D. G. Ashwell, 1971, "A Comparison of Curved Beam Finite Elements When Used in Vibration Problem", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 18, No. 4, pp. 555-563.
2. B. K. Lee, S. J. Oh and T. E. Lee, 2014, "In-Plane Free Vibrations of Horseshoe Circular Arch", *Journal of The Korean Society of Civil Engineers*, Vol. 34, No. 4, pp. 1043-1052.
3. J. G. Kim, 2006, "In-Plane Flexural Vibration Analysis of Arches Using Three-Noded Hybrid-Mixed Element", *Journal of The Korean Society for Power System Engineering*, Vol. 10, No. 4, pp. 83-89.
4. M. S. Choi, D. J. Yeo, J. H. Byun, J. J. Suh and J. K. Yang, 2007, "In-Plane Vibration Analysis of General Plates", *Journal of The Korean Society for Power System Engineering*, Vol. 11, No. 4, pp. 78-85.
5. M. S. Choi and D. J. Yeo, 2014, "Static Analysis of Axisymmetric Circular Plates under Lateral Loading Using Transfer of Stiffness Coefficient", *Journal of The Korean Society for Power System Engineering*, Vol. 18, No. 6, pp. 64-69.
6. www.mathworks.com.
7. Y. W. Kwon and H. Bang, 2000, "The Finite Element Method Using MATLAB", CRC Press, 2nd Ed, New York.
8. S. H. Lee, W. B. Jeong and Y. S. Seo, 2008, "Finite Element Vibration Analysis of a Curved Pipe Conveying Fluid with Uniform Velocity", *Transactions of The Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 18, No. 10, pp. 1049-1056.
9. R. D. Blevins, 1990, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Van Nostrand Reinhold, New York.