한국초등수학교육학회지 *21*(4) 643-662. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea* *21*(4) 643-662.
2017. 11. 30 *November 30. 2017.*

초등학교 수학에서 연산의 성질과 등호의 사용에 대한 고찰[1]

백대현[2]

초등학교 수학에서 등식은 덧셈식에서 등호를 기호와 말로 나타낼 때 용어에 대한 정의 없이 처음 제시된다. 대부분의 초등학교 학생들은 등식에서 나타나는 등호의 의미를 연산적으로 이해한다. 또한 교과서에서 연산의 성질이 암묵적으로 사용되어 학생들이 연산의 성질을 명확하게 이해할 수 있는 기회가 제한된다. 따라서 교과서에 특정한 수로 나타난 연산의 성질을 명시적으로 도입하는 것과 등호의 의미를 관계적으로 이해할 수 있는 다양한 맥락의 등식이 필요하다는 주장이 꾸준히 제기되어 왔다. 이에 본 연구에서는 초등학교 수학 교과서에 제시된 계산식을 등식으로 나타내어 암묵적으로 사용된 연산의 성질과 등호의 관계적 의미를 이해할 수 있는 방안을 학습자의 이해 수준에서 논의하고자 한다. 이와 더불어, 연산의 성질과 등호의 관계적 의미를 적용하여 효율적인 계산을 할 수 있는 구체적인 사례를 제시한다.

주제어: 등식, 등호의 관계적 의미, 결합법칙, 교환법칙, 분배법칙, 초등학교 수학 교과서

Ⅰ. 서 론

초등학교 수학에서는 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하기에 앞서 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하는 것을 강조한다. 이런 관점에서 사칙 계산의 원리를 모형, 모눈종이 등의 조작 활동을 통하여 이해하고, 이를 바탕으로 세로 형식의 계산에 익숙하도록 지도한다(교육부, 2017e). 초등학교에서 이러한 수학적 원리의 지도는 직관적으로 혹은 단순화하여 진행할 수밖에 없다(정연준, 조영미, 2012). 예를 들어, 1-2 교과서에서는 24와 13을 각각 10개씩 묶음과 낱개 모형으로 나타내어 덧셈의 원리를 설명한다. 그러나 24에서의 낱개와 13에서의 10개 묶음이 바꾸어지는 과정을 교환법칙으로 설명하는 과정은 생략하고 $24+13$을 형식화된 세로 형식으로 계산한다. 교과서에서는 세로 형식의 계산 원리인 연산의 성질을 명시적으로 다루지 않는다. 예를 들어, 두 자리수의 덧셈 $24+13$의 세로 형식의 계산은 같은 자리 수끼리 더하는 것이다. 이 계산 과정을 등식으로 나타내면

$$24+13=(20+4)+(10+3)=20+(4+10)+3=20+(10+4)+3=(20+10)+(4+3)$$

와 같이 덧셈의 결합법칙과 교환법칙이 필요하다. 그러나 괄호가 있는 식의 계산 순서는

1) 이 논문은 2017년도 부산교육대학교 교내 연구과제로 지원을 받아 수행된 연구임.
2) 부산교육대학교

4-1 교과서에서 처음 제시되기 때문에 위의 등식은 학습자의 이해 범주를 벗어난다. 따라서 이 등식을 괄호를 사용하지 않고

$$24+13=20+4+10+3=20+10+4+3=30+7$$

로 나타내면 등식에서 결합법칙은 명확하게 드러나지 않지만 교환법칙을 이해할 수 있는 기회를 제공한다. 이와 더불어, 연산의 성질을 이해하면 효율적인 계산을 하는데 도움이 된다. 예를 들어, 덧셈의 교환법칙을 사용하여 $27+16+3$을 $27+3+16=30+16$으로 계산하고, 덧셈의 결합법칙을 사용하여 $7+6+4$를 $7+10$으로 계산할 수 있다. 또한 National Council of Teachers of Mathematics(2000)에서 언급하였듯이 분배법칙을 사용하여 18×14를 18×10과 18×4의 합으로 계산할 수 있다. 이러한 관점에서 교과서에 암묵적으로 제시된 연산의 성질을 초등학교 수학에서 명시적으로 다루기 위한 논의가 이전부터 꾸준히 제기되어 왔다(변희현, 2011; 최지연, 방정숙, 2011b; 임재훈, 2013; 장혜원, 2017; 김미환, 이수은, 김수미, 2017).

연산의 성질은 등식으로 나타내면 그 의미가 명확하게 전달되기 때문에 등식의 개념에 대한 이해가 필요하다. 등식은 2007 개정 교육과정에 따른 6-2 교과서(교육과학기술부, 2011)의 '방정식' 단원에 용어로 제시되었지만 2009 개정 및 2015 개정 교육과정에서는 더 이상 명시적으로 다루지 않는다. 중학교 1학년 수학에서 등식은 '등호를 사용하여 수나 식이 서로 같음을 나타낸 식' 또는 '등호를 사용하여 나타낸 식'으로 정의된다(김원경 외, 2013; 황선욱 외, 2013). 따라서 등식을 이해하려면 등식에서 필수적으로 사용되는 등호에 대한 이해가 필요하다. 등호를 이해하기 위해서는 등호의 의미와 등호가 사용된 다양한 맥락을 파악해야 한다(김정원, 방정숙, 최지영, 2016). 등식의 양변의 수나 식이 같다는 관계적 기호로 이해할 수 있는 등호는 연산적 의미와 관계적 의미로 구분된다. 등호의 연산적 의미는 $3+1=4$와 같이 연산의 결과로 4가 된다고 이해하는 것이고, 등호의 관계적 의미는 등호 양변에 있는 두 식 사이의 관계를 파악하는 것으로 두 식의 상등 관계로 이해하는 것이다(기정순, 정영옥, 2008). 이 후부터 본 연구에서 '등호'는 특별한 언급이 없는 한 '등호의 관계적 의미'로 한정하여 사용한다. 따라서 '등호를 이해하는' 것은 '등호의 관계적 의미를 이해하는' 것으로 해석한다. 한편, '등호'가 '등호의 관계적 의미'와 '등호의 연산적 의미'를 포함한 '같다'는 기호 자체의 포괄적인 의미를 나타내는 경우는 용어를 '등호(=)'로 구분하여 사용한다.

대부분의 초등학교 학생들은 등호(=)를 연산적인 의미로 받아들여 결과를 나타내는 기호로 인식한다(Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Carpenter, Levi, Franke, & Zeringue, 2005; 기정순, 정영옥, 2008; 임재훈, 2013). 대수에서 다루는 방정식의 조작은 등호의 이해를 바탕으로 하기 때문에 등호를 이해하지 못하면 이후 대수 학습에 장애가 된다(Carpenter et al., 2003). 초등학교 학생들이 등호를 이해하기 위한 방안으로 기정순, 정영옥(2008)은 등호(=) 양쪽에 연산이 있는 다양한 문맥의 적용을 제시하였고, 임재훈(2013)은 덧셈의 교환법칙을 $5+2=2+5$와 같은 등식으로 나타내고 '5 더하기 2의 합은 2 더하기 5의 합과 같습니다'로 읽는 것을 제안하였다. 이러한 관점을 고려하면 본 연구에서 계산식을 등식으로 나타내는 것은 등호(=) 양쪽에 연산이 있는 문맥을 경험할 수 있는 기회를 제공하고, 이를 적용하여 효율적인 계산을 할 수 있게 한다. 예를 들어, $24-17$을 계산하는 대신 $24-17=14-7$을 이해하여 $14-7$을 계산하는 것이다.

요약하면, 선행 연구에서는 초등학교 수학에서 특정한 수로 나타난 연산의 성질을 명시적으로 다루고 등호를 이해해야 하는 필요성과 이에 따른 몇 가지 예시적인 방안을 논의하였다. 이를 바탕으로 본 연구에서는 계산식을 등식으로 나타내어 암묵적으로 사용된 연산의 성질과 등호를 이해할 수 있는 방안을 논의하고자 한다. 이와 더불어, 연산의 성질과

등호를 적용하여 효율적인 계산을 할 수 있는 구체적인 사례를 제시하고자 한다. 이는 수학적 개념과 원리를 이해하는 교육 과정의 목표에도 부합된다.

Ⅱ. 연산의 성질과 등호

초등학교 수학에서 산술 개념과 기능들을 대수 학습에 필요한 개념과 기능으로 전환하고 연결하는 것은 매우 중요하다(이화영, 장경윤, 2010). 이런 관점에서 연산의 성질과 등호를 이해하는 것은 산술 학습에서 대수적 추론을 경험하는 기회를 제공한다.

1. 연산의 성질

연산의 성질은 중학교 수학에서 문자를 사용하여 명시적으로 다룬다. 초등학교 수학에서 특정한 수로 나타난 연산의 성질을 경험하는 것이 중등학교 학습에서 요구되는 대수적 추론을 위한 준비 단계가 된다. NCTM(2000)은 2학년까지 특정한 수를 사용하여 교환법칙과 같은 연산의 일반적인 원리와 성질을 나타내고, 3-5학년에서는 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙과 같은 성질을 알고 이를 범자연수의 계산에 사용하도록 권고한다. Carpenter et al.(2003)은 초등학교 수학의 중심 내용으로 산술이 강조되어야 하지만 대수와의 인위적인 분리는 학생들이 저학년 때부터 효과적으로 수학적 사고를 할 수 있는 기회를 박탈하며, 학년이 올라간 이후에도 대수적인 사고를 하기 어렵다고 지적하였다. 초등학교 수학에서 $40+50$을 $40+50=4\times10+5\times10=(4+5)\times10=9\times10$와 같이 4개의 10과 5개의 10을 더하는 방식으로 계산하는 것은 $4x+5x$를 $4x+5x=(4+5)x=9x$로 계산하는 대수적 원리에 기초한 것이다(Carpenter et al., 2005). 따라서 학생들이 교과서에서 암묵적으로 사용되는 연산의 성질을 구체적인 상황 속에서 다양하게 경험하는 것이 중학교 수학에서 일반적인 연산의 성질을 이해하는데 필요하다는 주장(변희현, 2011; 최지연, 방정숙, 2011b; 임재훈, 2013; 장혜원, 2017)은 타당한 근거를 가진다.

최지영, 방정숙(2011a)은 교과서에서 연산의 성질이 암묵적으로 사용되어 학생들이 자신들의 사고를 명확하게 할 기회를 갖지 못하기 때문에 문제 상황에 포함된 연산의 성질을 파악하고, 이를 적용하여 문제를 해결하는데 어려움을 겪는다고 지적하였다. 장혜원(2017)은 연산의 성질이 산술 학습과 융통성 있는 계산 전략을 위한 필수 요소라는 점에서 명시적으로 다룰 필요가 있지만, 교과서에서는 학생들이 연산의 성질을 이해할 수 있는 기회가 제한되었다고 언급하였다. 이러한 논의는 초등학교 수학에서 특정한 수로 나타난 연산의 성질을 명시적으로 다룰 필요가 있다는 것을 시사한다.

또한, 최지영, 방정숙(2011b)은 초등학교 4학년 학생들이 △, □, ○와 같은 기호를 사용하여 곱셈의 교환법칙을 일반화할 수 있지만, $(a\times b)\times c$의 값과 $a\times(b\times c)$의 값이 같다는 경험에서 $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$에 대한 이해를 곧바로 이끌어내지 못하는 경향이 있다고 언급하였다. 이런 관점에서 초등학교 수학에서 문자로 나타난 연산의 성질에 대한 지도 방안을 논의하는 것은 중학교 수학과의 연계성을 고려하면 교육적으로 의미가 있는 일이다. 최지영, 방정숙(2011b)의 연구에서 알 수 있듯이 학생들이 단순히 두 계산식의 결과가 같다는 사실에서 연산의 성질을 유추할 수 있다고 기대하기는 어렵다. 따라서, 예를 들어, 다음과 같이 교과서에서 연산의 성질이 비형식적으로 제시된 계산식을 등식으로 나타낼 필요가 있다.

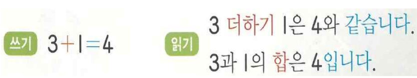
- $5+2$의 합과 $2+5$의 합이 같다(2009 개정 교육과정의 1-1 교과서, p. 103).
- $2+6+4$에서 $2+6$을 먼저 계산하고 4를 더한 합과 $6+4$를 먼저 계산하고 2를 더한 합이 같다(2015 개정 교육과정의 1-1 교과서, p. 88).
- 5×7의 곱과 7×5의 곱이 같다(2015 개정 교육과정의 2-2 교과서, p. 51).
- $1\frac{1}{5}\times3$의 값과 $(1\times3)+(\frac{1}{5}\times3)$의 값이 같다(2009 개정 교육과정의 5-1 교과서, p. 181).

한편, 연산의 성질 중에서 분배법칙은 효율적인 계산을 하는데 도움이 된다. 변희현(2011)은 교과서의 자연수와 대분수의 곱셈에서 분배법칙을 사용하지만 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 하나의 계산 규칙으로서 주목하지 않음을 지적하고, 수학의 구체적인 사례에서 나타나는 분배법칙을 다양하게 다루어 일반화된 분배법칙의 개념에 대한 이해가 필요하다고 주장하였다. 또한 김미환 외(2017)는 예를 들어 9.7×3을 $(10-0.3)\times3$으로 나타내면 분배법칙으로 효율적인 계산을 할 수 있고, 분배법칙이 덧셈에서 뺄셈으로 확장되는 경험을 하게 되어 이후 분배법칙의 일반화에도 도움이 된다는 점을 강조하였다.

이와 같이 초등학교 수학 학습에서 연산의 성질에 대한 이해가 필요하다는 선행 연구의 논의에도 불구하고 교육과정에 따른 연산의 성질의 특징과 지도시기를 분석하면 3차 교육과정을 정점으로 2009 개정 교육과정까지 연산의 성질이 약화되어 왔고, 이를 적극 활용하지 않는 경향이 나타난다(장혜원, 2017). 더욱이 2015 개정 교육과정에서는 연산의 성질에 관련된 내용을 찾아볼 수 없다. 한편, 지도서(교육부, 2017f)는, 예를 들어, $2+6+4$를 계산할 때 결합법칙의 비형식적인 이해를 강조하고 있기 때문에 교과서에서 암묵적으로 사용되는 연산의 성질을 어떻게 지도해야 하는지에 대한 기준은 명확하지 않다.

2. 등호

교과서에서 등식은 대부분 $2+3=5$와 같이 제시되어 등호(=)의 관계적인 의미를 이해하기 어렵다. 또한 5-1 교과서의 대분수의 덧셈에서 계산 과정이 $1\frac{1}{5}+2\frac{1}{5}=(1+2)+(\frac{1}{5}+\frac{2}{5})=3+\frac{3}{5}=3\frac{3}{5}$와 같이 등식으로 제시되더라도 등호는 강조되지 않는다. 교과서에서 등호(=)는 [그림 1]과 같이 덧셈식을 쓰고 읽는 방법을 서술할 때 도입되며, '같다'와 '이다'의 두 가지 문맥 상황으로 읽는다. 이와 관련하여 임재훈(2013)은 등호(=)를 '이다'보다 '같다'로 읽어야 등호가 명확하게 나타난다고 지적하였다.



[그림 1] 덧셈식(교육부, 2017a, p. 64)

교과서에서 등호(=) 문맥은 [그림 1]의 덧셈식과 같이 주로 등호(=)의 왼쪽에 연산이 있는 상황으로 제시되기 때문에 대부분의 학생들은 등호(=)를 결과로 인식하는 오류를 가진다(기정순, 정영옥, 2008). 따라서 교과서에서 다양한 등호(=) 문맥을 제공하는 방법을 모색하는 것이 필요하다(임재훈, 2013). 예를 들어, 학생들이 $4=3+1$, $3+1=4+0$와 같이 다양한 등식을 접하면 등호(=)를 연산의 결과로 인식하는 오류를 예방하고 등호를 이해하는데 도움이 된다. Falkner, Levi, & Carpenter(1999)가 초등학교 학생 752명에게 $8+4=\square$

+5를 제시한 결과 □를 7로 대답한 비율이 10%를 넘지 않았다는 사실은 학생들의 등호(=)에 대한 오개념을 단적으로 보여준다. 등호를 이해하면 5와 4의 관계에서 □와 8의 관계를 파악하여 □가 7이라는 것을 추론할 수 있다. 사실 67+84=□+65에서 등호를 이해하여 □를 구하는 것은 의미 있는 대수적 추론을 하는 것이다. 이와 더불어 Falkner et al.(1999)가 등호를 지도한 후 학생들의 88%정도(16명을 기준으로 14명)가 □을 바르게 구했다는 사실은 초등학교 학생들이 학습을 통해 등호를 이해할 수 있다는 시사점을 제공한다. 이러한 관점에서 교과서에서 암묵적으로 사용된 연산의 성질을 등식으로 나타내는 것은 연산의 성질뿐만 아니라 등호를 이해하는데 도움이 된다. 그러므로 본 연구의 목적은 교과서에서 계산식을 등식으로 나타내어 암묵적으로 사용된 연산의 성질과 등호를 이해할 수 있는 방안을 학습자의 이해 수준에서 논의하고, 이를 적용하여 효율적인 계산을 할 수 있는 구체적인 사례를 제시하는 것이다.

Ⅲ. 분석 방법

본 연구에서 계산식을 등식으로 나타내어 암묵적으로 사용된 연산의 성질과 등호를 이해할 수 있는 방안은 2015 개정 교육과정에 따른 교과서 '수와 연산' 영역의 내용을 중심으로 논의한다. 이를 위한 분석 대상이 되는 교과서와 지도서 및 비교 대상이 되는 외국 교과서는 2015 개정 교육과정에 따른 1, 2 학년 교과서 및 지도서, 2009 개정 교육과정에 따른 3, 4, 5, 6학년 교과서와 5, 6학년 지도서, Altieri et al. (2009a, 2009b, 2009c)가 서술한 1, 3, 4학년 교과서 등이다.

교과서에는 연산의 성질이 암묵적으로 사용되었지만 지도서는 연산의 성질의 비형식적인 이해를 강조하고 있기 때문에 교과서와 지도서의 서술 내용을 비교 분석할 필요가 있다. 또한 Altieri et al.(2009a, 2009b, 2009c)는 연산의 성질과 이를 계산에 사용하는 것을 언급한 NCTM(2000)의 권고를 반영하여 학습자의 이해 수준에 따라 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 명시적으로 언급하고, 연산의 성질이 계산 과정에 어떻게 사용되는지를 등식으로 명확하게 나타내었다. 따라서 교과서와 지도서에서 다루는 암묵적인 연산의 성질을 논의하는데 도움이 되는 Altieri et al.(2009a, 2009b, 2009c)의 서술 방식을 일부 참고하였다.

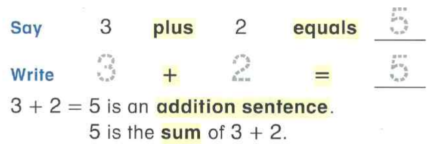
본 연구에서 암묵적으로 사용된 연산의 성질은 등식으로 명확하게 나타내지 않고 (수)모형, 선분, 꺾인 화살표, 굽은 화살표, 모눈종이 등을 사용하여 비형식적으로 제시된 것을 의미한다. 또한, $1\frac{1}{5}+2\frac{1}{5}=(1+2)+(\frac{1}{5}+\frac{2}{5})=3+\frac{3}{5}=3\frac{3}{5}$와 같이 계산 과정이 등식으로 나타났더라도 연산의 성질을 이해할 수 있는 단계가 생략된 것을 의미한다. 또한, 최지영, 방정숙(2011b)가 지적했듯이 학생들이 두 계산식의 결과가 같다는 사실에서 연산의 성질을 곧바로 유추하기 어렵기 때문에 2×1.2와 1.2×2, $1\frac{1}{5}\times3$과 $(1\times3)+(\frac{1}{5}\times3)$의 값을 비교하는 활동도 연산의 성질이 암묵적으로 사용되었다고 판단하였다. 이런 관점에서 계산식을 등식으로 나타내어 계산 과정에 암묵적으로 사용된 연산의 성질과 등호를 이해하고, 이를 바탕으로 효율적인 계산을 할 수 있는 사례를 제시하기 위한 분석 단계는 다음과 같다.

- 계산식을 등식으로 나타내어 계산 과정에 암묵적인 연산의 성질이 어떻게 적용되었는지 분석한다.
- 계산식을 등식으로 나타내어 연산의 성질과 등호를 어떻게 이해할 수 있는지 논의한다.
- 연산의 성질과 등호를 적용하여 효율적인 계산을 할 수 있는 구체적인 사례를 제시한다.

Ⅰ장에서 이미 언급하였지만 본 연구에서 ‘등호’는 특별한 언급이 없는 한 ‘등호의 관계적 의미’로 한정하여 사용한다. 본 연구 과정을 요약하면 다음과 같다. 먼저, 교과서에서 수와 연산 영역의 내용을 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈으로 나누어 계산 과정에 암묵적으로 사용된 연산의 성질을 등식으로 나타내어 분석한다. 다음으로 계산식을 등식으로 나타내어 연산의 성질과 등호를 이해할 수 있는 방안을 논의한다. 마지막으로 연산의 성질과 등호를 적용하여 효율적인 계산을 할 수 있는 구체적인 사례를 제시한다.

Ⅳ. 분석 결과

먼저 계산식에 사용되는 등호(=)를 살펴보자. 등식에서 필수적으로 사용되는 등호(=)는 1-1 교과서의 [그림 1]에서 ‘등호(=)’, ‘같습니다’, ‘입니다’는 모두 파란색으로 강조되어 ‘같다’와 ‘이다’를 같은 맥락으로 이해하게 한다. 그러나 수학에서 ‘같다’와 ‘이다’의 사용은 구분되어야 한다. 이런 관점에서 Altieri et al. (2009a)가 제시한 [그림 2]의 서술 방식은 등호(=)를 ‘같다’로 읽어 ‘이다’로 읽게 되는 여지가 많지 않다. 또한 ‘합’을 설명하기 위하여 ‘5는 3+2의 합이다’를 추가로 서술하였기 때문에 등호(=)의 의미가 ‘같다’로 명확하게 전달된다. 따라서 [그림 1]을 [그림 2]와 같은 방식으로 서술하는 것도 필요해 보인다. 이와 더불어 3+1=4를 ‘3 더하기 1은 4와 같다’로 읽는 것 외에 ‘3 더하기 1과 4는 같다’로 읽는 것을 추가로 서술하고, ‘합’의 의미를 설명하는 문장도 ‘4는 3과 1의 합과 같다’와 같이 추가로 서술하면 등호(=)의 ‘같다’의 의미가 강조될 수 있다.

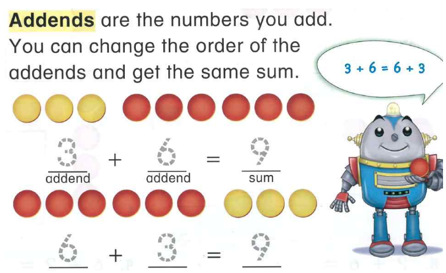


[그림 2] 덧셈식(Altieri et al., 2009a, p. 55)

다음으로 교과서에 제시된 계산식을 살펴보자.

1. 덧셈

먼저 2009 개정 교육과정의 1-1 교과서에서 덧셈의 교환법칙이 비형식적으로 제시된 사례를 살펴보자.



[그림 3] 바꾸어 더하기(교육부, 2016a, p. 103) [그림 4] 교환법칙(Altieri et al., 2009a, p. 155)

[그림 3]은 ‘두 수를 바꾸어 더할 수 있어요.’ 차시의 마무리 활동이다. 두 수를 바꾸어 더해도 합이 같다는 것에 대한 이해가 학습 목표이다. $5+2=7$과 $2+5=7$을 등식

$$5+2=2+5$$

로 나타내면 덧셈의 교환법칙과 등호를 이해할 수 있다. 덧셈의 교환법칙은 등호가 드러나는 소재지만(임재훈, 2013), 2015 개정 교육과정의 1-1 교과서에는 [그림 3]의 내용이 삭제되었다. 반면, 지도서(교육부, 2017f)는 여전히 덧셈 지도의 유의 사항으로 두 수를 바꾸어 더해도 그 합이 같다는 것을 학생들이 스스로 발견하는 것을 강조한다. 특히, 이어 세기를 통해 $3+8$보다 $8+3$의 계산이 효율적이라고 강조한다. 따라서 두 계산식을 등식

$$3+8=8+3$$

로 나타내면 덧셈의 교환법칙과 등호를 이해하고, 이어 세는 계산의 효율성도 경험할 수 있다. 이에 반해, Altieri et al.(2009a)은 1학년 교과서에서 덧셈의 교환법칙을 명시적으로 나타내지 않았지만 [그림 4]와 같이 두 수를 더하는 순서를 바꾸어도 합이 같다고 서술하고, 이것을 등식으로

$$3+6=6+3$$

와 같이 나타내었다. 또한 3과 6에 해당하는 반구체물을 각각 다른 색으로 표시하여 교환법칙을 직관적으로 이해할 수 있게 한다. 덧셈의 교환법칙이란 용어는 이후 3학년 교과서(Altieri et al., 2009b)에서 명시적으로 다룬다.

이제 두 자리수의 덧셈에서 연산의 성질이 암묵적으로 사용된 사례를 살펴보자.

[그림 5] 두 자리수의 덧셈(교육부, 2017b, p. 41) [그림 6] 두 자리수의 덧셈(교육부, 2017c, p. 66)

[그림 5]에서 형식화된 세로 형식의 계산 과정을 등식으로 나타내면 다음과 같이 결합법칙과 교환법칙이 사용된다.

$$22+12=(20+2)+(10+2)=20+(2+10)+2=20+(10+2)+2=(20+10)+(2+2).$$

괄호가 있는 식의 계산 순서는 4-1 교과서에서 명시적으로 다루기 때문에 괄호를 사용하지 않고 등식

$$22+12=20+2+10+2=20+10+2+2$$

로 나타내면 교환법칙과 등호를 이해할 수 있다. 또한 등식으로

$$22+12=20+2+12=20+14,$$

$$22+12=22+8+4=30+4$$

와 같이 나타내면 결합법칙과 등호를 이해할 수 있다.

다음으로 받아 올리는[3] 두 자리수의 덧셈에서 연산의 성질이 암묵적으로 사용된 사례를 살펴보자. [그림 6]에서 첫째 방법을 등식으로

$$29+13=29+(10+3)=(29+10)+3$$

와 같이 나타내면 결합법칙이 사용되었다. 이 등식을 괄호를 사용하지 않고

$$29+13=29+10+3=39+3$$

로 나타내면 결합법칙과 등호를 이해할 수 있다. 둘째 방법을 등식

$$29+13=(30-1)+13=13+(30-1)=13+30-1=30+13-1$$

로 나타내면 교환법칙이 필요하다. 교사들에[4] 의하면 학생들은 이런 계산 방법을 어려워 한다. 따라서 이 등식을 괄호를 사용하지 않고

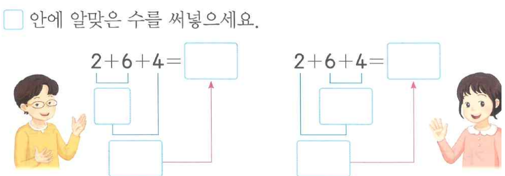
$$29+13=30+13-1$$

로 나타내면 교환법칙은 명확하게 드러나지 않더라도 등호를 이해할 수 있다. 한편, 교사들은 등식

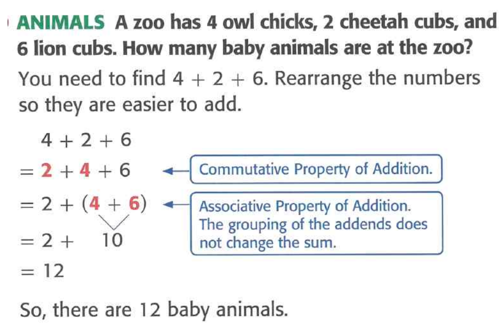
$$29+13=29+1+12=30+12$$

로 나타내면 학생들이 쉽게 이해하고 계산한다고 지적한다. 참고로 이 등식은 지도서(교육부, 2017g)에 제시된 여러 가지 계산 방법 중의 하나이다. 따라서 이 등식에서 결합법칙과 등호를 이해하고, 계산의 효율성도 경험할 수 있다.

[그림 7]은 1-2 교과서에서 덧셈의 결합법칙이 비형식적으로 제시된 사례이다. 지도서(교육부, 2017f)는 결합법칙을 비형식적으로 이해하고, 이를 적용하여 뒤의 두 수를 더해 10을 만들어 세 수를 더하는 것을 아는 것을 학습 목표로 서술하였다.



[그림 7] 결합법칙(교육부, 2017b, p. 88)



[그림 8] 교환 및 결합법칙(Altieri et al., 2009b, p. 70)

3) 박교식(2013)에 따라 ‘받아올림이 있는’ 대신 ‘받아 올리는’ 으로 표현하였다.
4) 교육대학원에 재학 중인 교사 4명으로 모두 관련 내용을 지도한 경험이 있다.

장혜원(2017)은 $2+6+4$에서 결합법칙에 대한 지도 없이 10 만들기 전략을 이용하기 위해 뒤의 덧셈을 먼저 하는 것은 앞서 배운 세 수의 덧셈은 앞에서부터 차례로 한다는 원칙과 논리적으로 충돌한다고 지적하였다. 그러나 결합법칙으로 10이 되는 두 수를 먼저 더하면 효율적인 계산을 할 수 있다. 최지영, 방정숙(2011b)이 곱셈의 결합법칙에서 지적한 것과 같은 맥락에서 $(2+6)+4$와 $2+(6+4)$를 각각 계산한 결과로부터 결합법칙에 대한 이해를 곧바로 이끌어내지 못한다. 따라서 결합법칙과 등호를 이해할 수 있도록 두 계산식을 등식

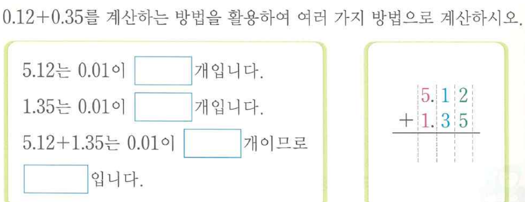
$$(2+6)+4=2+(6+4)$$

로 나타내는 것이 필요하지만, 괄호는 4-1 교과서에서 처음 도입된다. 그러므로 학습자의 이해 수준에서 이 등식을

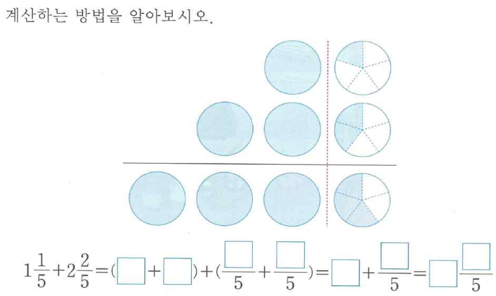
$$2+6+4=2+10$$

로 나타내면 지도서가 의도한 비형식적인 결합법칙을 이해하고, 등호도 이해할 수 있다. Altieri, et al.(2009b)는 [그림 8]과 같이 $2+4+6$에서 $4+6$을 먼저 계산하는 결합법칙을 괄호를 사용하여 명확하게 나타내었다. 따라서 결합법칙을 이해하는데 도움이 되는 괄호를 저학년 교과서에 도입하는 것을 논의할 필요가 있다.

끝으로 소수와 분수의 덧셈에서 연산의 성질이 암묵적으로 사용된 사례를 살펴보자.



[그림 9] 소수의 덧셈(교육부, 2015b, p. 26)



[그림 10] 대분수의 덧셈(교육부, 2016b, p. 125)

[그림 9]의 세로 형식의 계산을 등식으로 나타내면 다음과 같이 결합법칙과 교환법칙이 필요하다.

$$\begin{aligned}5.12+1.35&=(5+0.12)+(1+0.35)=5+(0.12+1)+0.35\\&=5+(1+0.12)+0.35=(5+1)+(0.12+0.35).\end{aligned}$$

이 등식을

$$5.12+1.35=(5+0.12)+(1+0.35)=(5+1)+(0.12+0.35)$$

로 나타내면 교환법칙과 등호를 이해할 수 있다. [그림 10]의 등식에서 생략된 결합법칙과 교환법칙은 다음과 같이 나타난다.

$$1\frac{1}{5}+2\frac{2}{5}=(1+\frac{1}{5})+(2+\frac{2}{5})=1+(\frac{1}{5}+2)+\frac{2}{5}=1+(2+\frac{1}{5})+\frac{2}{5}=(1+2)+(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}).$$

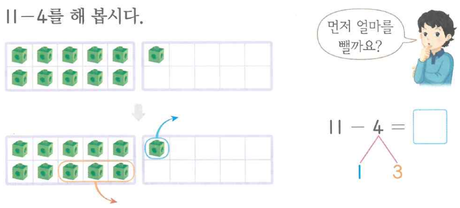
이 등식을

$$1\frac{1}{5}+2\frac{2}{5}=(1+\frac{1}{5})+(2+\frac{2}{5})=(1+2)+(\frac{1}{5}+\frac{2}{5})$$

로 나타내면 교환법칙과 등호를 이해할 수 있다. 이와 같은 방식으로 [그림 9], [그림 10]의 계산에서 자연수끼리 먼저 더하면 $0.12+0.35$와 $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$의 계산은 상대적으로 쉬워진다.

2. 뺄셈

뺄셈에서 연산의 성질이 암묵적으로 사용된 사례를 살펴보자.



[그림 11] 뺄셈(교육부, 2017b, p. 127)

[그림 11]의 계산 과정을 등식으로 나타내면 다음과 같이 분배법칙과 음수의 곱셈에 대한 이해가 필요하다.

$$11-4=11-(1+3)=11+(-1)\times(1+3)=11+(-1)\times1+(-1)\times3=11-1-3.$$

그러나 초등학교 수학에서 음수의 곱셈을 다루지 않기 때문에 이 등식은 학습자의 이해범위를 넘어선다. 따라서 이와 같은 뺄셈에서는 연산의 성질보다 등호의 이해를 강조할 수 있다. 이 등식을 괄호를 사용하지 않고

$$11-4=11-1-3$$

로 나타내면 분배법칙은 명확하게 드러나지 않지만 등호를 이해할 수 있다. 또한, 등식

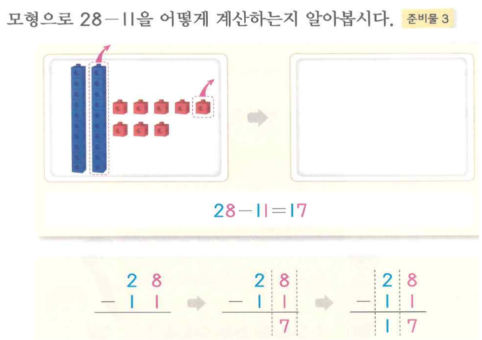
$$11-4=10-3$$

로 나타내면 등호를 이해하고, 효율적인 계산을 할 수 있다. 이와 더불어 등식으로

$$11-4=1+10-4=1+6$$

와 같이 나타내면 등호와 계산 순서의 효율성을 경험할 수 있다. 한편, 교사들에 의하면 대부분의 학생들은 11을 두 수의 합으로 표현할 때 $1+10$보다 $10+1$로 나타낸다. 이런 경향을 고려하면 11을 $1+10$으로 나타내는 것에서 수를 문맥 상황에 적합한 방식으로 나타내는 경험을 할 수 있다.

이제 두 자리수의 뺄셈에서 연산의 성질이 암묵적으로 사용된 사례를 살펴보자.



[그림 12] 두 자리수의 뺄셈(교육부, 2017b, p. 51) [그림 13] 두 자리수의 뺄셈(교육부, 2017c, p. 74)

[그림 12]에서 세로 형식의 계산을 등식으로 나타내면 다음과 같이 분배법칙, 결합법칙, 교환법칙, 음수의 곱셈에 대한 이해가 필요하다.

$$\begin{aligned}28-11&=(20+8)-(10+1)=(20+8)+(-1)\times(10+1)=(20+8)+(-1)\times10+(-1)\times1\\&=(20+8)+(-10)+(-1)=20+\{8+(-10)\}+(-1)=20+\{(-10)+8\}+(-1)\\&=(20-10)+(8-1).\end{aligned}$$

따라서 $11-4$의 경우와 마찬가지로 연산의 성질보다 등호의 이해를 강조할 수 있다. 이 등식을 괄호를 사용하지 않고

$$28-11=20+8-10-1=20-10+8-1$$

로 나타내면 등호를 이해할 수 있다. 또한 십의 자리수끼리 뺄셈을 먼저 하여

$$28-11=18-1$$

와 같은 등식으로 나타내면 등호를 이해하고, 효율적인 계산을 할 수 있다.

[그림 13]에서 서술된 받아 내리는 뺄셈의 두 가지 계산 방법을 등식으로 나타내면 다음과 같이 분배법칙과 음수의 곱셈이 필요하다:

$$28-19=28-(18+1)=28+(-1)\times(18+1)=28+(-1)\times18+(-1)\times1=28-18-1,$$
$$28-19=28-(20-1)=28+(-1)\times\{20+(-1)\}=28+(-1)\times20+(-1)\times(-1)=28-20+1.$$

그러므로 $11-4$, $28-11$의 경우와 마찬가지로 연산의 성질보다 등호의 이해를 강조할 수 있다. 따라서 괄호를 사용하지 않고

$$28-19=28-18-1,$$
$$28-19=28-20+1$$

와 같은 등식으로 나타내면 등호를 이해할 수 있다. 한편 십의 자리수끼리의 뺄셈을 먼저 하여 등식으로

$$28-19=18-9$$

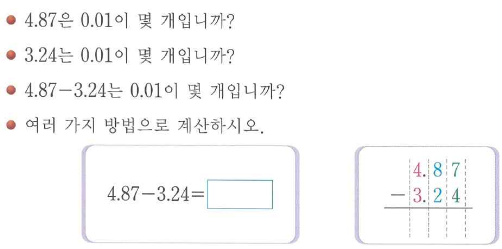
와 같이 나타내면 등호를 이해하고, 효율적인 계산을 할 수 있다. 또한 등식

$$28-19=8+20-19=8+1$$

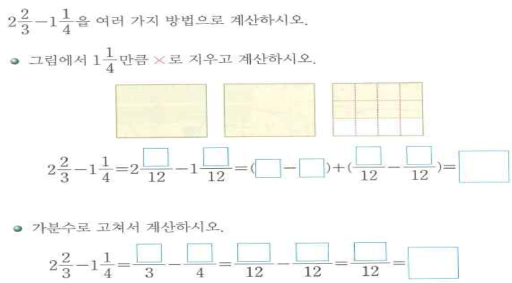
로 나타내면 등호를 이해하고, 계산 순서를 유연하게 선택하여 효율적인 계산을 할 수 있다.

Carpenter et al.(2003)이 지적했듯이 문맥 상황에 따라 계산의 절차를 유연하게 적용하여 계산이 쉬워지는 많은 사례가 있다. 예를 들어, $8+20-19$에서 뺄셈을 먼저 하고, $35\times24\div12$에서 나눗셈을 먼저 하는 것이 효율적이다. 그러므로 4-1 교과서의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있는 혼합식에서 연산의 순서가 일률적으로 제시된 것은 계산의 효율성을 떨어뜨릴 수 있다.

이제 소수와 분수의 뺄셈에서 연산의 성질이 암묵적으로 사용된 사례를 살펴보자.



[그림 14] 소수의 뺄셈(교육부, 2015b, p. 32)



[그림 15] 대분수의 뺄셈(교육부, 2016c, p. 111)

[그림 14]에서 세로 형식의 계산을 등식으로 나타내면 다음과 같이 분배법칙, 결합법칙,

교환법칙, 음수의 곱셈이 필요하다.

$$\begin{aligned}4.87-3.24&=(4+0.87)-(3+0.24)=(4+0.87)+(-1)\times(3+0.24)\\&=0.87+(4-3)-0.24=(4-3)+0.87-0.24.\end{aligned}$$

따라서 [그림 12]의 $28-11$에서 십의 자리수끼리 뺄셈을 먼저 하여 $28-11=18-1$과 같은 등식으로 나타낸 것과 같이 자연수끼리의 뺄셈을 먼저 하여 등식

$$4.87-3.24=1.87-0.24$$

로 나타내면 등호를 이해하고, 상대적으로 작은 수의 계산을 하게 된다. [그림 15]의 등식을 구체적으로 나타내면 소수의 뺄셈과 마찬가지로 분배법칙, 결합법칙, 교환법칙, 음수의 곱셈이 필요하다.

$$\begin{aligned}2\frac{2}{3}-1\frac{1}{4}&=(2+\frac{2}{3})-(1+\frac{1}{4})=(2+\frac{2}{3})+(-1)\times(1+\frac{1}{4})=\frac{2}{3}+2+(-1)\times1+(-1)\times\frac{1}{4}\\&=\frac{2}{3}+(2-1)-\frac{1}{4}=(2-1)+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

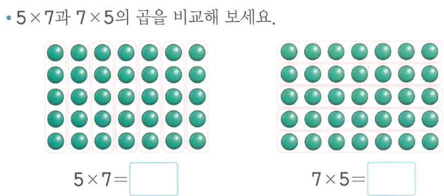
따라서 [그림 14]의 소수의 뺄셈과 마찬가지로 자연수끼리의 뺄셈을 먼저 하여 등식

$$2\frac{2}{3}-1\frac{1}{4}=1\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$$

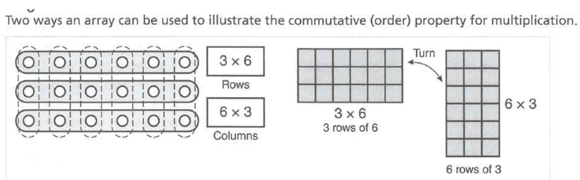
로 나타내면 등호를 이해하고, 가분수로 바꾸어 계산하기가 쉽다.

3. 곱셈

다음으로 곱셈에서 연산의 성질이 암묵적으로 제시된 사례를 살펴보자.



[그림 16] 교환법칙(교육부, 2017d, p. 51)



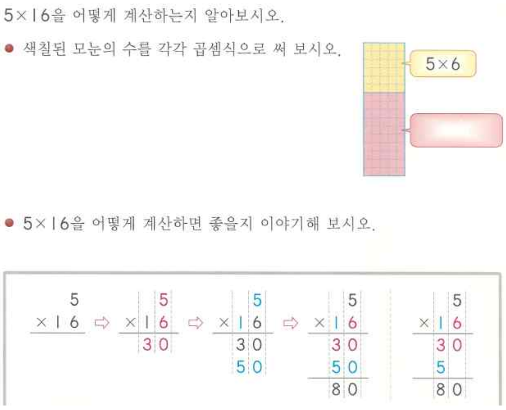
[그림 17] 교환법칙(Van de Walle et al., 2014a, p. 146)

[그림 16]은 두 수의 곱하는 순서를 바꾸어도 곱이 같다는 것을 이해하는 것으로 지도서(교육부, 2017h)에 서술된 학습 목표는 곱셈의 교환법칙을 이해하는 것이다. 5×7과 7×5의 결과를 비교하는 것에서 곱셈의 교환법칙에 대한 이해를 곧바로 이끌어내지 않기 때문에 두 계산식을 등식으로

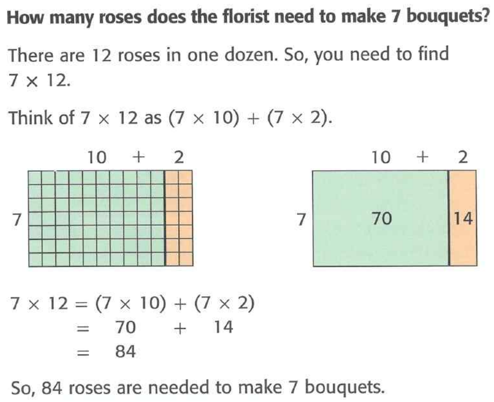
$$5\times7=7\times5$$

와 같이 나타내면 교환법칙과 등호를 이해할 수 있다. 한편, Van de Walle et al.(2014a)는 [그림 17]과 같이 곱셈의 교환법칙을 명시적으로 언급하고, 직사각형 모델을 회전시켜 교환법칙을 직관적으로 이해시킨다. 이 직관적인 방법은 소수의 곱셈과 분수의 곱셈에서 교환법칙을 이해하는데도 효과적이다. 이에 대해서는 추후에 논의하기로 하자.

이제 곱셈에서 분배법칙이 암묵적으로 제시된 사례를 살펴보자.



[그림 18] 분배법칙(교육부, 2015a, p. 21)



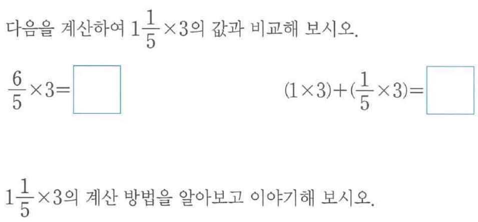
[그림 19] 분배법칙(Altieri et al., 2009c, p. 166)

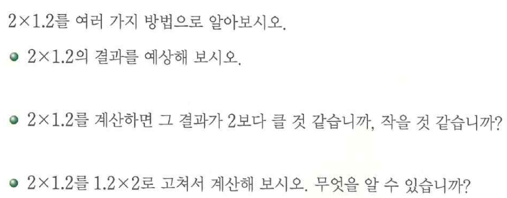
[그림 18]에서 세로 형식의 계산을 등식

$$5 \times 16 = 5 \times (6 + 10) = 5 \times 6 + 5 \times 10$$

로 나타내면 분배법칙과 등호를 이해하고, 효율적인 계산을 할 수 있다. Altieri et al. (2009c)은 [그림 19]와 같이 분배법칙이 적용되는 과정을 구체적인 그림으로 제시하고, 이를 등식으로 나타내었다.

다음으로 분수와 소수의 곱셈에서 연산의 성질이 비형식적으로 제시된 사례를 살펴보자.





[그림 20] (대분수)×(자연수)(교육부, 2016c, p. 181) [그림 21] (자연수)×(소수)(교육부, 2015c, p. 22)

먼저 [그림 20]에서 분배법칙이 비형식적으로 제시되었지만, [그림 16]에서 등식 $5 \times 7 = 7 \times 5$로 곱셈의 교환법칙과 등호를 이해할 수 있는 것과 같이 $1\frac{1}{5} \times 3$과 $(1 \times 3) + (\frac{1}{5} \times 3)$을 등식으로

$$1\frac{1}{5} \times 3 = (1 + \frac{1}{5}) \times 3 = (1 \times 3) + (\frac{1}{5} \times 3)$$

와 같이 나타내면 분배법칙과 등호를 이해할 수 있고, 효율적인 계산을 할 수 있다. 한편, [그림 20]과 관련하여 김미환 외(2017)는 등식 $(1 \times 3) + (\frac{1}{5} \times 3) = \square$은 과정이 생략되고 계산 결과만 요구하기 때문에 학생들이 분배법칙의 원리를 이해하거나 활용하기가 어렵다고 지적하였다.

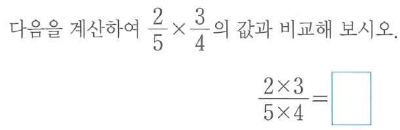
다음으로 [그림 21]에서 2×1.2의 계산은 후속 학습에서 분수의 곱셈으로 하게 된다. [그

림 21]에서 마지막 질문에 대한 지도서(교육부, 2015d)의 예시적인 대답은 $1.2\times2=2.4$이기 때문에 곱셈의 교환법칙을 적용하면 $2\times1.2=2.4$라는 것을 이해하는 것으로 서술되었다. 소수의 곱셈에 대한 교환법칙은 자연수의 곱셈과 같이 직사각형 모델의 회전을 이용하여 직관적으로 이해할 수 있다. 따라서 두 계산식을 등식

$$2\times1.2=1.2\times2$$

로 나타내면 곱셈의 교환법칙과 등호를 이해할 수 있다.

이제 분수의 곱셈에서 연산의 성질이 암묵적으로 사용된 사례를 살펴보자.



[그림 22] 분수의 곱셈(교육부, 2016c, p. 189)

[그림 22]에서 두 식의 관계를 등식으로 나타내면 다음과 같이 곱셈의 결합법칙, 교환법칙이 사용되었다.

$$\begin{aligned}\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}&=(\frac{1}{5}\times2)\times(\frac{1}{4}\times3)=\frac{1}{5}\times(2\times\frac{1}{4})\times3=\frac{1}{5}\times(\frac{1}{4}\times2)\times3\\&=(\frac{1}{5}\times\frac{1}{4})\times(2\times3)=(\frac{1}{5\times4})\times(2\times3)=\frac{2\times3}{5\times4}.\end{aligned}$$

이 등식을

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=(\frac{1}{5}\times2)\times(\frac{1}{4}\times3)=(\frac{1}{5}\times\frac{1}{4})\times(2\times3)=\frac{2\times3}{5\times4}$$

로 나타내면 곱셈의 교환법칙을 이해하고, 결국

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{2\times3}{5\times4}$$

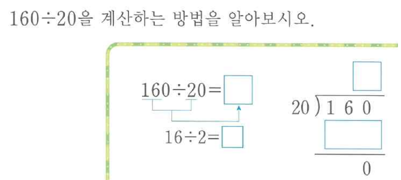
와 같이 분자끼리, 분모끼리 곱하는 계산을 하게 한다. 또한 계산 결과를 약분하는 과정을 등식으로

$$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

와 같이 나타내면 등호를 이해할 수 있다.

4. 나눗셈

마지막으로 나눗셈에서 연산의 성질이 암묵적으로 사용된 사례를 살펴보자.



[그림 23] 나눗셈(교육부, 2016b p. 47)

[그림 23]에서 $160\div20$을 $16\div2$로 계산하는 과정을 등식으로 나타내면 다음과 같이 곱

셈의 결합법칙이 사용되었다.

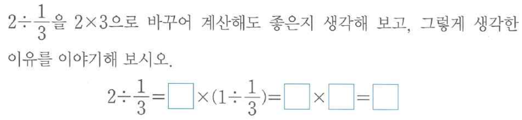
$$160 \div 20 = 160 \times \frac{1}{20} = (16 \times 10) \times (\frac{1}{10} \times \frac{1}{2}) = 16 \times (10 \times \frac{1}{10}) \times \frac{1}{2} = 16 \times \frac{1}{2} = 16 \div 2.$$

그러나 $160 \div 20 = 160 \times \frac{1}{20}$ 은 5-2, 6-1 교과서에서 다루기 때문에 4학년 학생들의 이해 범주를 벗어난다. 따라서 두 나눗셈을 등식으로

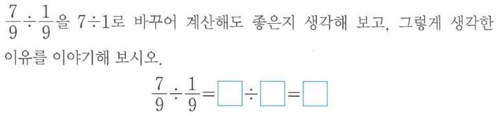
$$160 \div 20 = 16 \div 2$$

와 같이 나타내면 나눗셈의 몫의 관점에서 등호를 이해하고, 효율적인 계산을 할 수 있다.

이제 분수의 나눗셈에서 연산의 성질이 암묵적으로 사용된 사례를 살펴보자.



[그림 24] (자연수)÷(분수)(교육부, 2016d, p. 43)



[그림 25] (분수)÷(분수)(교육부, 2016d, p. 45)

[그림 24]에 제시된 등식의 $2 \div \frac{1}{3} = 2 \times (1 \div \frac{1}{3})$ 에서 암묵적으로 사용된 연산의 성질은 다음과 같이 덧셈에 대한 나눗셈의 우분배법칙이다.

$$2 \div \frac{1}{3} = (1+1) \div \frac{1}{3} = (1 \div \frac{1}{3}) + (1 \div \frac{1}{3}) = 2 \times (1 \div \frac{1}{3}).$$

일반적으로 덧셈에 대한 나눗셈의 좌분배법칙은 성립하지 않기 때문에 중학교 수학에서 연산의 성질로 다루지 않는다. 지도서(교육부, 2016f)는 학생들이 분수로 나눌 때 단순히 역수를 곱하는 것으로 암기하여 형식화하지 않도록 $2 \div \frac{1}{3}$ 이 $2 \times (1 \div \frac{1}{3})$ 로 나타나는 과정의 이해가 중요하다고 강조한다. 그러나 $2 \div \frac{1}{3} = 2 \times (1 \div \frac{1}{3})$ 은 덧셈에 대한 나눗셈의 우분배법칙이 필요하기 때문에 학습자의 이해 범위를 벗어난다. 한편 교과서에서는 [그림 24]의 등식에서 $1 \div \frac{1}{3} = 3$ 을 동수누감으로 이해시킨다. 따라서 동수누감으로 $1 \div \frac{1}{3} = 3$ 을 전제하지 않고 [그림 24]의 계산 과정을 구체적으로 나타내면 다음과 같이 곱셈에 대한 결합법칙이 필요하다.

$$2 \div \frac{1}{3} = (2 \times 1) \div \frac{1}{3} = 2 \times (3 \times \frac{1}{3}) \div \frac{1}{3} = (2 \times 3) \times \frac{1}{3} \div \frac{1}{3} = 2 \times 3.$$

이 등식도 학습자의 이해 수준을 넘어선다. 그러므로 한 가지 대안은 $2 \div \frac{1}{3} = 2 \times 3$ 을 곱셈과 나눗셈의 관계로 이해하는 것이다. 즉, 자연수의 곱셈과 나눗셈의 관계를 분수의 곱셈과 나눗셈의 관계로 확장하는 것이다. 먼저 $2 \div \frac{1}{3} = \square$라 두면 $2 = \square \times \frac{1}{3}$ 로 나타낼 수 있다. 이를 바탕으로 $2 \div \frac{1}{3} = 2 \times 3$ 은 다음과 같이 곱셈의 결합법칙이 사용된 등식으로 나타낼 수 있다.

$$2 \times 3 = (\square \times \frac{1}{3}) \times 3 = \square \times (\frac{1}{3} \times 3) = \square \times 1 = \square.$$

[그림 25]에서는 [그림 24]의 계산 방법을 적용할 수 있다. [그림 25]의 등식을 구체적으로 나타내면 다음과 같이 곱셈의 결합법칙이 필요하다.

$$\frac{7}{9}\div\frac{1}{9}=(7\times\frac{1}{9})\times 9=7\times(\frac{1}{9}\times 9)=7\times\frac{1}{1}=7\div 1.$$

이 등식을

$$\frac{7}{9}\div\frac{1}{9}=7\div 1$$

로 나타내면 곱셈의 결합법칙은 명확하게 드러나지 않지만, 동수누감의 관점에서 등호를 이해하고 효율적인 계산을 할 수 있다. 결론적으로 [그림 22], [그림 24]에서 논의한 등식

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{2\times 3}{5\times 4},\quad 2\div\frac{1}{3}=2\times 3$$

는 이후 학습에서 다루는 일반적인 분수의 나눗셈 $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}$를

$$\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{2\times 7}{3\times 5}=\frac{14}{15}$$

와 같이 연산의 성질이 명확하게 드러나지 않지만 효율적인 계산을 할 수 있게 한다.

V. 결 론

본 연구에서는 계산식을 등식으로 나타내어 암묵적으로 사용된 연산의 성질과 등호를 이해할 수 있는 방안을 논의하였다. 또한 연산의 성질과 등호를 적용하여 효율적인 계산을 할 수 있는 사례를 제시하였다. 이는 선행 연구에서 교과서에 연산의 성질을 명시적으로 도입하고 등호를 이해하기 위하여 다양한 형태의 등호(=) 맥락을 경험할 필요가 있다는 사실에 기초한 것이다. 계산식을 등식으로 나타내어 암묵적으로 사용된 연산의 성질과 등호를 분석한 결론은 다음과 같다.

첫째, 교과서에서 대부분의 계산 과정은 등식으로 제시되지 않았고 일부 분수의 사칙계산과 같이 등식으로 나타난 경우도 구체적인 계산 과정이 생략되었다. 또한 계산 방법도 대부분 형식화된 세로 형식의 계산을 강조하였다. 따라서 계산식의 계산 과정에 암묵적으로 사용된 연산의 성질과 등호를 이해할 수 있는 기회가 제공되지 않았다.

둘째, 계산식에서 연산의 성질이 필요한 경우에도 모형, 선분, 화살표 등을 사용하여 암묵적으로 나타내었다. 이와 같은 사례에서 계산 과정을 등식으로 나타내면 연산의 성질이 명확하게 드러나고, 이를 학습자의 이해 수준에 적합한 등식으로 나타낼 수 있었다. 예를 들어, $22+12$의 세로 형식의 계산을 등식 $22+12=20+2+12=20+14$ 또는 등식 $22+12=22+8+4=30+4$로 나타내면 괄호를 사용하지 않았지만 결합법칙을 이해할 수 있다.

셋째, 계산식을 여러 가지 등식으로 나타내면 등호를 이해할 수 있는 경험을 제공한다. 예를 들어, $11-4$를 계산할 때, $11-4=11-1-3$ 또는 $11-4=10-3$와 같은 등식으로 나타내면 등호를 이해할 수 있다.

넷째, 연산의 성질과 등호를 적용하면 효율적인 계산을 할 수 있다. 예를 들어, 분배법칙을 사용하여 5×16을 $5\times(6+10)=30+50$로 계산하고, 등호를 적용하여 $160\div 20$을 $16\div 2$로 계산하는 것이다.

다섯째, 교과서에서 상황에 따라 계산 순서를 유연하게 할 수 있는 기회가 제한되었다.

특히, 4-1 교과서에서 덧셈과 뺄셈이 섞여 있는 식, 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 식은 앞에서부터 차례로 계산하도록 순서를 명시한 것은 학생들이 효율적인 계산 절차를 사고할 수 있는 기회를 제한한다. 예를 들어, $8+20-19$ 에서 뺄셈을 먼저하고, $35\times24\div12$ 에서 나눗셈을 먼저 하는 것이 효율적이다.

이상과 같이 논의한 결론을 바탕으로 다음과 같은 시사점을 도출하였다.

첫째, 저학년 때부터 교과서의 계산식을 등식으로 나타내는 것이 필요하다. 계산 과정에 암묵적인 연산의 성질을 사용하는 것은 근본적으로 학생들이 등식에 익숙하지 않기 때문이다. 그러므로 1-1 교과서부터 계산 과정을 등식으로 나타내면 암묵적으로 사용된 연산의 성질과 등호를 이해할 수 있는 기회가 제공되고, 이는 궁극적으로 대수적 추론을 위한 준비 단계가 될 수 있다.

둘째, 선행 연구(변희현, 2011; 최지연, 방정숙, 2011b; 임재훈, 2013; 장혜원, 2017)의 논의와 같은 맥락에서 연산의 성질을 특정한 수로 나타난 구체적인 상황 속에서 다양하게 경험하는 것이 필요하다. 중학교에서 문자로 일반화되는 연산의 성질을 이해하기 위하여 초등학교에서 계산식에 나타나는 연산의 성질을 등식의 형태로 충분히 경험할 필요가 있기 때문이다. 특히, 괄호는 등식에서 연산의 성질을 분명하게 이해하는데 필수적인 기호이기 때문에 등식과 마찬가지로 저학년 때부터 사용하는 것이 필요하다.

셋째, 계산 과정에 연산의 성질과 등호를 적용하여 효율적인 계산을 할 수 있는 다양한 문제 상황이 필요하다. 반면, 대부분의 계산을 형식화된 세로 형식으로 하도록 지도하는 것은 재고되어야 한다. 세로 형식의 계산이 필요하지만, 이를 획일적으로 강조하면 계산 과정에 나타나는 연산의 성질과 등호를 이해할 수 있는 기회가 제한되기 때문이다.

넷째, 김정원 외(2016)의 제안과 같이 6-2 교과서(교육부, 2016e)의 ‘정비례와 반비례’ 단원에 도입된 문자가 포함된 등식을 저학년 때부터 명시적으로 다루는 것에 대한 논의가 필요하다. 2015 개정 교육과정에서는 ‘정비례와 반비례’ 단원이 삭제되어 중학교 교육과정으로 이동된다. 그러나 문자가 포함된 등식의 인위적인 분리는 앞선 Carpenter et al.(2003)의 지적처럼 학생들이 대수적 사고를 할 수 있는 기회를 박탈한다. 이와 관련하여 실질적으로 초등학교 수학에서 일반적인 연산의 성질을 지도할 수 있는 방안은 Van de Walle et al.(2014a, pp. 239-240)이 제시한 덧셈의 교환법칙에 대한 지도 사례를 참고할 수 있다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2011). **수학 6-2.** (주)두산동아.

교육부 (2015a). **수학 3-2.** (주)천재교육.

교육부 (2015b). **수학 4-2.** (주)천재교육.

교육부 (2015c). **수학 5-2.** (주)천재교육.

교육부 (2015d). **수학 5-2 교사용 지도서.** (주)천재교육.

교육부 (2016a). **수학 1-1.** (주)천재교육.

교육부 (2016b). **수학 4-1.** (주)천재교육.

교육부 (2016c). **수학 5-1.** (주)천재교육.

교육부 (2016d). **수학 6-1.** (주)천재교육.

교육부 (2016e). **수학 6-2.** (주)천재교육.

교육부 (2016f). **수학 6-1 교사용 지도서.** (주)천재교육.

교육부 (2017a). **수학 1-1.** (주)천재교육.

교육부 (2017b). **수학 1-2.** (주)천재교육.

교육부 (2017c). **수학 2-1.** (주)천재교육.

교육부 (2017d). **수학 2-2.** (주)천재교육.

교육부 (2017e). **수학 1-1 교사용 지도서.** (주)천재교육.

교육부 (2017f). **수학 1-2 교사용 지도서.** (주)천재교육.

교육부 (2017g). **수학 2-1 교사용 지도서.** (주)천재교육.

교육부 (2017h). **수학 2-2 교사용 지도서.** (주)천재교육.

기정순, 정영옥 (2008). 등호 문맥에 따른 초등학생의 등호 개념 이해와 지도 방법 연구. **학교수학, 10** (4), 537-555.

김정원, 방정숙, 최지영 (2016). Rasch 모델을 통한 초등학교 학생들의 등호 이해 분석, **수학교육 55**(1), 1-19.

김미환, 이수은, 김수미 (2017). 우리나라 초등학교 수학교과서에 제시된 분배법칙 지도내용 분석. **수학교육학연구, 27**(3), 451-467.

김원경, 조민식, 방금성, 김수미, 배수경, 오혜정 외 (2013). **중학교 수학 1.** 비상교육.

박교식 (2013). 초등학교 수학에서 사용하는 사칙계산 관련 어휘에 관한 연구. **한국초등수학교육학회지 17**(2), 185-205.

변희현 (2011). 한국과 일본의 초등교과서에서 다루는 분배법칙 개념에 관한 비교 분석. **한국초등수학교육학회지 15**(1), 39-56.

이화영, 장경윤 (2010). 조기 대수(Early Algebra)의 연구 동향과 접근에 관한 고찰. **수학교**

육학연구 20(3), 275-292.

임재훈 (2013). 등호 해석의 두 시간적 차원인 읽기, 쓰기의 불일치와 그 해소. **한국초등수학교육학회지 17**(2), 207-223.

장혜원 (2017). 교과서 분석에 기초한 연산법칙의 지도 방안 탐색. **한국초등수학교육학회지 21**(1), 1-22.

정연준, 조영미 (2012). 자연수 곱셈 계산 지도에 관한 초등학교 수학교과서 비교 분석 - 우리나라, 미국, 싱가포르, 일본 교과서를 중심으로 -. **수학교육학연구 22**(2), 293-309.

최지영, 방정숙 (2011a). 초등학생들의 범자연수 연산의 성질에 대한 이해 분석. **수학교육학연구 21**(3), 239-259.

최지영, 방정숙 (2011b). 초등학교에서의 대수적 추론 능력 신장 방안 탐색 - 곱셈의 결합법칙 탐구에 관한 수업 사례 연구 - **학교수학 13**(4), 581-598.

황선욱, 강병개, 한길준, 한철형, 권혁천, 김의석 외 (2013). **중학교 수학 1**, 좋은책 신사고.

Altieri, M. B., Balka, D. S., Day, R., Gonsalves, P. D., Grace, E. C., Krulik, S. et al. (2009a). *Math connects 1*, Volume 1, Macmillan /McGraw-Hill.

Altieri, M. B., Balka, D. S. Day, R., Gonsalves, P. D., Grace, E. C., Krulik, S. et al. (2009b). *Math connects 3*, Macmillan/McGraw-Hill.

Altieri, M. B., Balka, D. S. Day, R., Gonsalves, P. D., Grace, E. C., Krulik, S. et al. (2009c). *Math connects 4*, Macmillan/McGraw-Hill.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, S. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, S., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: developing relational thinking. *ZDM*, 37(1), 53-59.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics* 6(4), 232-236.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Schuster, L. & Anderson, N. C. (2005). *Good questions for math teaching, Math Solutions*.

Van de Walle, J. A., Lovin, L. H., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2014a). *Teaching student-centered mathematics*, Vol. 1. Pearson.

Van de Walle, J. A., Lovin, L. H., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2014b). *Teaching student-centered mathematics*, Vol. 2. Pearson.

<Abstract>

A Note on the Use of Properties of Operations and the Equal Sign in Elementary School Mathematics

Paek, Dae Hyun[5)]

The first appearance of the equations in elementary school mathematics is in the expression of the equal sign in the addition sentences without its definition. Most elementary school students have operational understanding of the equal sign in equations. Moreover, students' opportunities to have a clear concept of the properties of operations are limited because they are used implicitly in the textbooks. Based on this fact, it has been argued that it is necessary to introduce the properties of operations explicitly in terms of specific numbers and to deal with various types of equations for understanding a relational meaning of the equal sign. In this study, we use equations to represent the implicit properties of operations and the relational meaning of the equal sign in elementary school mathematics with respect to students' level of understanding. In addition, we give some explicit examples which show how to apply them to make efficient computations.

Key words: equations, relational meaning of the equal sign, associativity, commutativity, distributivity, elementary school mathematics textbooks

논문접수: 2017. 10. 15
논문심사: 2017. 11. 02
게재확정: 2017. 11. 20

5) paek@bnue.ac.kr