

인수분해 된 분모를 갖는 두 변수 유리함수 근사에 기반한 3차원 음향 포물선 방정식 제곱근 연산자의 분할기법 제안

Suggestion for a splitting technique of the square-root operator of three dimensional acoustic parabolic equation based on two variable rational approximant with a factored denominator

이근화[†]

(Keunhwa Lee^{1†})

¹세종대학교 국방시스템공학과

(Received August 6, 2016; revised September 6, 2016; accepted January 25, 2017)

초 록: 본 연구에서는 두 변수 유리함수 근사법에 기반한 3차원 음향 포물선 방정식의 제곱근 연산자의 새로운 근사식을 제안한다. 이 근사식은 기존의 제곱근 연산자에 대한 근사 연구와 비교해서 두 가지의 장점을 가진다. 첫 번째는 광대역 각도 능력이다. 제안된 식은 방위각 45°에서 3차원 음향 포물선 방정식의 거리 축으로부터 62°까지 넓은 각도에 대해 정확도를 가지는데, 이 값은 기존에 연구된 3차원 음향 포물선 방정식 알고리즘의 각도 한계의 약 세 배이다. 두 번째로는 본 근사식의 분모는 수심과 횡 거리에 대한 연산자의 곱으로 표현된다는 점이다. 이러한 분할 형태는 3차원 포물선 방정식을 손쉽게 삼중대각행렬 방정식으로 변환할 수 있다는 점에서 수치해석에서 선호된다. 제안된 식의 성능을 검증하기 위해 위상 오차분석을 통해 타 근사법과의 비교 연구가 수행되었고, 제안된 방법은 가장 우수한 성능을 보였다. **핵심용어:** 두 변수 유리함수 근사법, 3차원 음향 포물선 방정식, 3D PE (Parabolic Equation), 연산자 분할기법, 제곱근 연산자

ABSTRACT: In this study, novel approximate form of the square-root operator of three dimensional acoustic Parabolic Equation (3D PE) is proposed using a rational approximant for two variables. This form has two advantages in comparison with existing approximation studies of the square-root operator. One is the wide-angle capability. The proposed form has wider angle accuracy to the inclination angle of $\pm 62^\circ$ from the range axis of 3D PE at the bearing angle of 45° , which is approximately three times the angle limit of the existing 3D PE algorithm. Another is that the denominator of our approximate form can be expressed into the product of one-dimensional operators for depth and cross-range. Such a splitting form is very preferable in the numerical analysis in that the 3D PE can be easily transformed into the tridiagonal matrix equation. To confirm the capability of the proposed approximate form, comparative study of other approximation methods is conducted based on the phase error analysis, and the proposed method shows best performance.

Keywords: Two variable rational approximant, Three dimensional acoustic parabolic equation, 3D PE (Parabolic Equation), Operator splitting method, Square-root operator

PACS numbers: 43.30.Dr, 43.20.Mv

1. 서 론

[†]Corresponding author: Keunhwa Lee (nasalkh2@sejong.ac.kr)
Department of Defense Systems Engineering, Building Kwanggaeto,
Room 1004c, Sejong University, 209 Neungdong-ro, Gwangjin-gu,
Seoul 05006, Republic of Korea
(Tel: 82-2-3408-3508, Fax: 82-2-3408-9298)

음향 현상을 가장 정확하고 사실적으로 구현하는 방법은 해당 환경에 대해 3차원 음파방정식을 직접

수치적으로 푸는 것이다. 수중음향에서는 해양환경이 거리에 따른 변화가 심하지 않는 조건을 가정하여, 음파방정식을 직접 다루기보다는 단방향 음향포물선방정식으로 분해하여 푸는 방법을 선호한다.^[1] 음향포물선방정식은 음파방정식의 간소화된 형태지만 그 본질은 여전히 해석적인 미분방정식이므로, 기본적으로 파장 당 적어도 2개 이상의 정보가 필요하다는 Nyquist 법칙의 제한을 받는다. 이 때문에 포물선방정식이 이론적으로는 전체 주파수 영역에 걸쳐서 음향 현상을 설명할 수 있음에도 불구하고, 실무에서는 약 5 kHz 이하의 저-중파수 영역에서만 사용된다.

3차원 포물선 방정식을 수치적으로 계산하기 위해서는 우선 3차원 포물선 방정식의 2차원 제공근 연산자를 행렬연산이 가능한 형태의 연산자로 근사해야 한다. 수학적으로는 다양한 형태의 근사가 가능하지만, 수치해석 알고리즘의 효율을 고려하면 그 중에 세 가지 종류만이 사용가능한 것으로 알려져 있다.^[2]

첫 번째는 $N \times 2D$ 근사법이다. 이 방법은 3차원 포물선 방정식에서 방위각 방향의 시공간 변화량을 무시하는 것에서 출발한다. 위 가정을 도입하면 3차원 음향포물선방정식은 각 방위각 방향에 대한 2차원 음향포물선방정식으로 간소화된다. 만약에 방위각 방향을 N 개로 분할했다면, 독립적으로 N 번의 2차원 음향포물선방정식을 풀어주면 되기 때문에 매우 효율적이다. 두 번째는 2차원 제공근 연산자가 ‘수심 및 횡 거리’ 또는 ‘수심 및 방위각’에 대한 이변수 함수로 표현되는 것을 이용하여, 두 변수 Taylor 근사법으로 근사하는 것이다. 두 변수를 Y, Z 라고 할 때, $\sqrt{1+Y+Z}$ 의 두 변수 Taylor 근사법의 결과는 ‘ Y 또는 Z 의 n 제곱수로만 표현되는 비상관항’과 ‘ Y 와 Z 의 곱이 나타나는 상관항’으로 나눌 수 있다. 상관항은 수치해석 알고리즘의 매우 효율적인 형태인 삼각대각행렬로 변환할 수 없기 때문에 전통적으로 무시한다. 남은 비상관항 중에 1차 비상관항까지 사용한 것을 ‘3차원 협대역 음향포물선방정식’이라 칭한다. 세 번째 방법은 상관항을 무시한다는 점에서는 두 번째 방법과 동일하다. 그러나 비상관항을 Taylor 근사법이 아닌 Padé 근사법을 이용해 근사를 하는 점

이 다르다. Padé 근사는 Taylor 근사보다 수렴성이 좋고 광대역 알고리즘을 구현하기 용이하기 때문에 소위 ‘3차원 광대역 음향포물선방정식’을 구성할 수 있다.

한편 2012년에 Lin *et al.*^[3]은 위의 세 번째 방법에 저차의 상관항(YZ, Y^2Z, YZ^2, \dots)을 고려한 3차원 음향포물선방정식을 유도하고, 방정식을 풀기 위한 효율적인 수치 알고리즘을 제안했다. 그의 방법을 이용하면 Sturm의 3차원 거리중속 벤치마크 문제^[2]에서 나타나는 거리 17 km 이후의 전달손실의 오차를 보정할 수 있음을 보였다.

위의 방법들과 별도로 수치해석 알고리즘의 효율성을 고려하지 않고 정확성만을 추구하며 3차원 포물선방정식의 2차원 제공근 연산자를 근사한 연구도 존재한다. 2006년에 Lee와 Seong^[4]은 $Y+Z$ 를 하나의 변수로 취급하는 방법을 통해 Padé 근사를 적용했으며, Collis^[5]도 2011년에 유사한 연구를 발표했다. 2015년에는 Sturm^[6]이 세 번째 방법에 YZ 의 상관항을 포함시키는 방법으로 Lin *et al.*과 동일한 결과를 얻었다. 위의 방법은 보다 정확한 해는 산출하나 해당 포물선방정식을 삼각대각행렬 방정식으로 변환할 수 없다는 점에서 수치해석의 효율성은 떨어지는 방법이다.

본 연구에서는 두 변수 유리함수 근사법을 이용해 2차원 제공근연산자를 근사하는 방법을 연구한다. 2차원 제공근연산자에 두 변수 유리함수 근사법을 직접 적용하면 앞의 두 변수 Taylor 근사와 마찬가지로 상관항이 나타나게 된다. 그렇기 때문에, 앞의 방법과 마찬가지로 수치해석적으로 효율적인 삼각대각행렬 방정식을 얻는 것이 불가능하다. 이 문제를 해결하기 위해 본 연구에서는 두 변수에 대한 연산자 분할이 가능한 특별한 유리함수식을 구성하고 이 식을 원 함수와 일치시키는 방법을 제안한다.

II장에서는 3차원 음향포물선방정식 및 기존에 연구된 제공근 연산자에 대한 근사법을 서술하고, III장에서는 Padé 근사법 및 대표적인 두 변수 유리함수 근사법인 Chisholm 근사법을 서술하고 본 연구자가 제안한 방법을 서술했다. IV장에서는 기존 방법과 제안된 방법에 대해 위상오차분석을 통한 비교연구를 수행하였으며 V장에서 결론을 맺는다.

II. 3차원 음향 포물선방정식

2.1 3차원 음향 포물선방정식

3차원 직교좌표계(Fig. 1)에서 에너지 보존 3차원 음향 포물선방정식은 아래의 식과 같이 표현된다.^[1]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = jk_0(-1 + \sqrt{1 + Y + Z})u, \quad (1)$$

여기서 k_0 는 기준파수를 나타내며, u 는 음압에 해당하는 물리량이다. 위 식에서 Y 와 Z 는 각각 횡방향 거리와 수심에 대한 연산자를 의미하며 각각 다음과 같이 표현된다.

$$Y = \frac{1}{k_0^2} \frac{\rho}{\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \alpha \right), \quad (2)$$

$$Z = (n^2 - 1) + \frac{1}{k_0^2} \frac{\rho}{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \alpha \right), \quad (3)$$

여기서 ρ 는 유체의 밀도이며 $\alpha = \sqrt{\rho c}$ 로 에너지 보존을 위한 인자이다. c 는 물의 음속이다. n 은 굴절률이며 $n = c_0/c$ 로 c_0 는 위의 기준파수에 해당하는 기준음속이다.

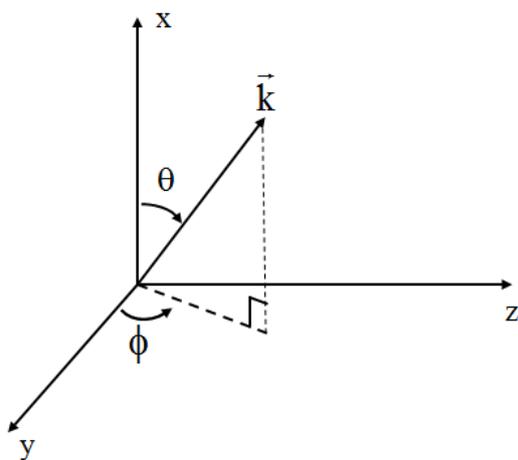


Fig. 1. Rectangular coordinate. The x-axis is assumed to be the propagation direction of three dimensional parabolic equation. The rectangular coordinate is transformed into the spherical coordinate with the elevation and bearing angle of (θ, ϕ) .

2.2 2차원 제공근 연산자의 근사

Eq. (1)에서 2차원 제공근 연산자를 아래와 같이 Q 라고 정의한다.

$$Q = \sqrt{1 + Y + Z}. \quad (4)$$

3차원 협대역 음향포물선방정식에서는 Q 는 아래와 같이 근사된다.

$$Q_1 = 1 + \frac{1}{2}(Y + Z) + O(Y^2, Z^2, YZ). \quad (5)$$

해양에서 널리 사용되는 3차원 광대역 음향포물선방정식의 제공근 연산자는 비상관항의 2차 항을 포함하여 다음과 같이 표현된다.

$$Q_2 = 1 + \frac{1}{2}Y - \frac{1}{8}Y^2 + \frac{1}{2}Z - \frac{1}{8}Z^2 + O(Y^3, Z^3, YZ). \quad (6)$$

Eq. (6)에서는 각 연산자의 2차 항까지 고려되었으므로 수심 연산자에 대해서도 광대역이고 횡 거리 연산자에 대해서도 광대역이다. 일부 모델은 횡 거리 연산자에 대해서는 1차 항만 사용한 경우도 있다.

비상관항만을 이용하여 Eqs. (5)와 (6)의 근사 차수를 높여간다고 할 때, Q 는 다음과 같이 일반화할 수 있다.^[2]

$$Q_3 = -1 + \sqrt{1 + Y} + \sqrt{1 + Z} + O(YZ). \quad (7)$$

위 식은 Eq. (6)을 포함하며, 비상관항에 대한 일반화된 근사식이라고 할 수 있다. Eq. (7)에서 각각의 수심 및 횡 거리 제공근 연산자에는 손쉽게 Padé 근사법을 적용할 수 있기 때문에, Eq. (7)을 이용하면 손쉽게 고차의 3차원 광대역포물선방정식을 얻을 수 있다.

Lin et al.^[3]은 $Q = \sqrt{-1 + (1 + Y) + (1 + Z)}$ 로 표현하고 $\sqrt{1 + Y}$ 와 $\sqrt{1 + Z}$ 가 각각 1근처인 경우에 대해 Q 를 다음과 같이 근사했다.

$$Q_4 = -1 + \sqrt{1 + Y} + \sqrt{1 + Z} - (-1 + \sqrt{1 + Y})(-1 + \sqrt{1 + Z}) + O[1 + Y, 1 + Z, \sqrt{(1 + Y)(1 + Z)}]. \quad (8)$$

Eq. (8)은 앞의 Eqs. (5)~(7)과 달리 네 번째 항에 Y와 Z의 상관항이 나타남을 확인할 수 있다. 비록 Eq. (8)은 $Y^m Z^m$ 에 해당하는 여러 상관항을 포함하고 있지만, 정확한 식인 Eq. (4)의 상관항과 비교해보면, YZ 항을 제외하고는 각 상관항의 계수의 값이 틀리다. 하지만 상관항이 포함됨에 따라 Eq. (8)의 정확도는 앞의 식보다 크다.

Strum^[6]은 Eq. (8)에서 정확한 상관항만을 취해서 아래와 같은 식을 사용했다.

$$Q_5 = -1 + \sqrt{1+Y} + \sqrt{1+Z} - \frac{1}{4}YZ + O(Y^2Z, YZ^2, \dots). \quad (9)$$

위의 Eqs. (8)과 (9)의 정확도는 IV절에서 자세히 다룬다.

III. 두 변수 유리함수 근사법

3.1 Padé 근사법^[7]

Padé 근사는 일 변수 함수에 대한 유리함수 근사이다. 함수 $f(z)$ 의 멱급수가 $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ 로 알려져 있을 때, $f(z)$ 의 (m, m) 차 Padé 근사는 아래의 식으로 정의된다.

$$\hat{f}_{m,m}(z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^i}{\sum_{j=0}^m b_j z^j}, \quad (10)$$

$$\left(\sum_{i=0}^m b_i z^i \right) \left(\sum_{j=0}^m c_j z^j \right) = \sum_{j=0}^m a_j z^j + O(z^{2m+1}). \quad (11)$$

Eq. (10)에서 결정해야 하는 미지수는 $(2m+2)$ 개이다. Eq. (11)에서 $z^0 \sim z^m$ 까지는 좌변과 우변의 항들이 항등식을 만족하므로 $(m+1)$ 개의 방정식을 세울 수 있으며, $z^{m+1} \sim z^{2m}$ 까지는 우변을 0으로 놓으면 역시 m 개의 방정식을 세울 수 있다. 총 $(2m+1)$ 개의 방정식을 얻을 수 있다. 여기에 $b_0 = 1$ 이라는 추가조건을 부여하면 미지수의 개수와 방정식의 개수가 같으므로 위의 방정식은 풀 수 있다. $f(z) = \sqrt{1+z}$ 인 경우에는 아래와 같은 대수적인 유리 근사식이 존재

한다.

$$\hat{f}_{(m,m)}(z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^i}{\sum_{j=0}^m b_j z^j} = 1 + \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_{i,m} z}{1 + \delta_{i,m} z}, \quad (12)$$

여기서

$$\gamma_{i,m} = \frac{2}{2m+1} \sin^2\left(\frac{i\pi}{2m+1}\right), \quad (13)$$

$$\delta_{i,m} = \cos^2\left(\frac{i\pi}{2m+1}\right). \quad (14)$$

a_i, b_j 는 Eqs. (13)과 (14)로부터 Eq. (12)를 이용하여 항등식 조건에 의해 구할 수 있다.

3.2 Chisholm 근사법

두 변수 함수에 대한 유리함수 근사는 Padé 근사법을 2차원으로 확장한 것이다. 원리는 Padé 근사와 동일하나 항등식을 세울 때 조건식을 어떤 식으로 부여하느냐에 따라 여러 방식이 있다.^[8] 본 절에서는 그 중에 두 변수 유리함수 근사에 대해서 가장 최초로 발표되었고 기본이 되는 Chisholm 근사를 서술한다. Chisholm 근사법^[9]은 다음과 같다.

Padé 근사와 유사하게, 함수 $f(y, z)$ 를 멱급수로 전개하면, $f(y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} y^i z^j$ 가 되고, 이식을 (m, m) 차 유리함수로 근사를 한다면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$f_{(m,m)}(y, z) = PP(y, z) / QQ(y, z), \quad (15)$$

여기서

$$PP(y, z) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m a_{ij} y^i z^j, \quad (16)$$

$$QQ(y, z) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m b_{ij} y^i z^j. \quad (17)$$

Eqs. (16)과 (17)의 계수는 아래의 조건을 만족해야 한다.

$$QQ(y,z) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} y^i z^j \right) = PP(y,z) + \varepsilon(y,z), \quad (18)$$

여기서 $\varepsilon(y,z)$ 는 근사 오차를 의미한다.

Eqs. (16)과 (17)에서 미지수는 $2(m+1)^2$ 개 이므로 Eq. (18)에서 미지수 개수만큼의 방정식을 이끌어내야 한다. 두 변수 함수에 대해서는 Padé 근사와 달리 다양한 조건이 존재할 수 있다. 두 변수 유리함수는 m 이 선형적으로 늘어남에 따라 항의 개수는 제곱으로 증가하기 때문에, Padé 근사와 달리 조건식의 선택의 폭이 넓어진다.

Chisholm는 아래와 같은 조건식을 제안했다.^[10]

$$\sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\beta} b_{ij} c_{(\alpha-i)(\beta-j)} = a_{\alpha\beta}, \quad (19)$$

$(0 \leq \alpha \leq m, 0 \leq \beta \leq m)$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\beta} b_{ij} c_{(\alpha-i)(\beta-j)} = 0, \quad (20)$$

$(0 \leq \beta < m, m < \alpha \leq 2m - \beta)$

$$\sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^m b_{ij} c_{(\alpha-i)(\beta-j)} = 0, \quad (21)$$

$(0 \leq \alpha < m, m < \beta \leq 2m - \alpha)$

$$\sum_{i=0}^{\gamma} \sum_{j=0}^m [b_{ij} c_{(\gamma-i)(2m+1-\gamma-j)} + b_{ji} c_{(2m+1-\gamma-j)(\gamma-i)}] = 0. \quad (22)$$

$(1 \leq \gamma \leq m)$

Eq. (19)에서 $(m+1)^2$ 의 조건식이 나오고, Eqs. (20)과 (21)로부터 각각 $m(m+1)/2$ 의 조건식이 나오며, 마지막으로 Eq. (22)에서 m 개의 조건식이 주어진다. $b_{00} = 1$ 이라는 조건을 추가하면 총 $2(m+1)^2$ 의 방정식이 얻어지므로 모든 미지수를 계산할 수 있다.

Fig. 2는 Eqs. (19)~(22)의 의미를 기하학적으로 표현한 것이다. Fig. 2의 행렬의 행과 열 번호는 Eq. (18)의 Y 와 Z 의 차수를 나타낸다고 생각할 수 있다. Eq. (19)는 Fig. 2의 회색 영역의 조건을 나타내며, Eqs. (20)과 (21)은 하향 대각선 영역의 조건이다. Eq. (22)는 체크 무늬 영역에서 정의된 것으로, 전체 행렬의 하향 대각선을 중심으로 서로 거울 대칭인 항들을 더한 항

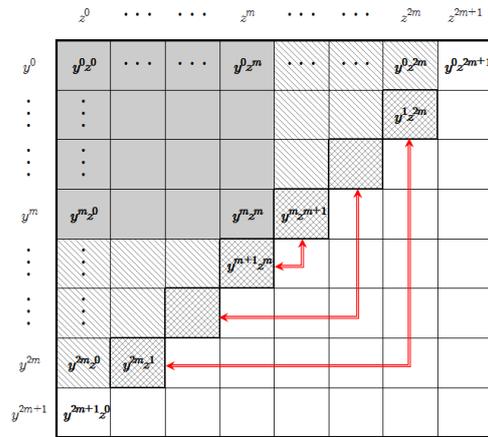


Fig. 2. Illustrative geometry for Chisholm approximant. In the geometry, shells with gray color, downwardly diagonal line texture, and check pattern respectively correspond to Eqs. (19) ~ (22). The broken arrow indicates a combination of two terms in Eq. (22).

등식을 0으로 놓은 것이다. 결국 Fig. 2에서 보듯이 Chisholm 근사법은 행렬의 삼각형 형태로 조건식이 주어진다. 이 때문에 Chisholm 근사법은 여러 두 변수 유리함수 근사법 중의 삼각법이라고도 부른다.

Eqs. (20)~(22)로 얻어지는 b_{ij} 에 대한 선형 행렬식은 항상 full rank가 되는 것은 아니기 때문에, Chisholm 근사식은 항상 존재하는 것은 아님에 유의해야 한다.^[11] 위의 해의 유일성은 전적으로 원 함수에 의존적이다. $f(y,z) = \sqrt{1+y+z}$ 에 대해서는 $m = 8$ 차 까지 해가 존재하는 것을 확인했다.

3.3 분모의 연산자가 분리된 유리함수 근사

수치 해석적으로 Y 와 Z 에 대한 연산자가 분리되면 수치 알고리즘을 삼각대각 행렬식만으로 구성할 수 있다. 예를 들어 제곱근 연산자가 Q 가 $Q = f(Y) + g(Z)$ 와 같이 분리가 된다고 할 때, $\frac{\partial u}{\partial x} = [f(Y) + g(Z)]u$ 로 놓을 수 있다고 한다. 이 식의 해는 $u(x+dx) = e^{f(Y)dx} e^{g(Z)dx} u(x)$ 이 된다. $u(x)$ 를 알고 있다고 할 때 오른쪽에서 왼쪽으로 순차적으로 연산을 수행하면 $u(x+dx)$ 를 구할 수 있는 것이다.

하지만, 제곱근 연산자가 분리되지 않는다면 해는 $u(x+dx) = e^{Q(Y,Z)dx} u(x)$ 이 되는데, 이 식은 알고리즘을 어떤 식으로 구성하더라도 삼각대각 행렬식으로 만드는 것은 불가능하다.

Eq. (15)의 Chisholm 근사식은 Y 와 Z 방향의 연산자가 강하게 연성된 형태로 표현된다. 만약에 Y 와 Z 방향 연산자의 상관항이 존재하지 않는다고 가정하면, Eq. (15)는 $f(Y) + g(Z)$ 의 형태로 표현이 되는데, 이 식은 Eq. (7)에 유리함수 근사를 적용한 식과 동일하다.

Lin *et al.*은 저차의 상관항을 고려한 Eq. (8)을 이용해 계산을 수행했다. Lin *et al.*은 비상관항에는 각각 일 변수 함수에 대한 Padé 근사를 적용하고, 상관항에는 Taylor 근사를 적용하여 상관항으로 인해 발생하는 수치 알고리즘의 비효율성을 피해갔다. Padé 근사는 p/q 의 형태로 주어지기 때문에 q^{-1} 를 계산해야 된다. 이때 q 가 삼각 대각행렬이 아니라면 계산시간이 급격히 증가한다. 하지만 Taylor 근사는 분모가 없기 때문에 단순 행렬 곱으로 계산을 할 수 있어서, 삼각 대각행렬의 제한조건으로부터 자유로울 수 있다. 하지만 Lin *et al.*의 근사식은 완전한 식이 아닌 Eq. (8)을 근사한 것이기 때문에, 기본적으로 각도에 대한 제한조건을 가진다. Lin *et al.*의 연구에 의하면, Eq. (8)은 y - z 평면에서 45° 의 방위각을 가질 때 22° 의 정확도를 갖는다고 한다.

본 연구에서는 Eq. (4)를 Chisholm 근사처럼 직접 두 변수 유리함수 형태로 근사했다. 단 분모의 형태가 아래와 같이 표현된다고 가정하고 근사를 수행했다.

$$f_{1(m,m)}(y,z) = PP(y,z)/QQ_1(y,z), \quad (23)$$

여기서

$$PP(y,z) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m a_{ij} y^i z^j, \quad (24)$$

$$QQ_1(y,z) = \left(\sum_{i=0}^m p_i y^i \right) \left(\sum_{j=0}^m q_j z^j \right). \quad (25)$$

위와 같은 가정을 적용하면 분모에 대한 역행렬을 구할 때 분모의 연산자가 두 개로 분리가 되므로 각각을 삼각 대각행렬에 대한 식으로 변환할 수 있는 장점이 있다. 즉 연속적인 삼각 대각행렬의 역산만 수행하면 된다.

이때 구해야 하는 미지수는 분자인 PP 에 대해서

$(m+1)^2$ 개가 있고, 분모인 QQ_1 에 대해서는 $2(m+1)$ 개가 된다. 본 연구에서는 위의 미지수를 구하기 위해 아래와 같은 조건식을 부여했다.

$$\sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\beta} p_i q_j c_{(\alpha-i)(\beta-j)} = a_{\alpha\beta}, \quad (0 \leq \alpha \leq m, 0 \leq \beta \leq m) \quad (26)$$

$$\sum_{i=0}^m p_i c_{(\alpha-i)0} = 0, \quad (m < \alpha \leq 2m), \quad (27)$$

$$\sum_{j=0}^m q_j c_{0(\beta-j)} = 0, \quad (m < \beta \leq 2m). \quad (28)$$

Eq. (26)은 Chisholm 근사의 Eq. (19)와 동일하다. 여기서 $(m+1)^2$ 개의 조건식이 나온다. Eqs. (27)과 (28)로부터는 각각 m 개 씩 총 $2m$ 개의 조건이 나온다. 추가로 $p_0 = q_0 = 1$ 의 조건을 부가하면, 미지수와 방정식의 개수가 일치하므로 모든 미지수를 구할 수 있다.

Fig. 3은 Eqs. (26)~(28)의 의미를 기하학적으로 표현한 것이다. 회색 영역은 Fig. 2의 Chisholm 근사와 동일하며, 분모항의 미지수를 계산하는데 사용되는 조건은 하향 대각선 영역으로 표시했다. Fig. 2와 비교할 때, Chisholm 근사에 비해 분모를 구할 때 적용

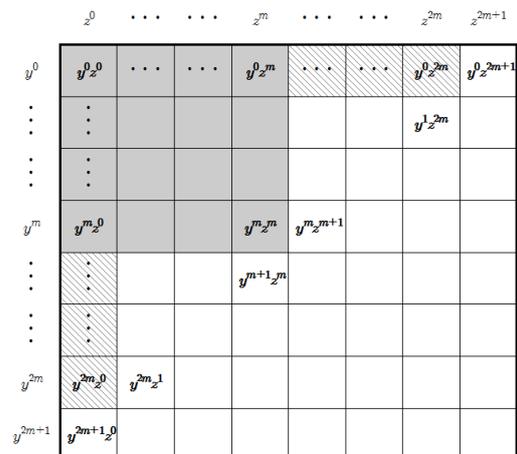


Fig. 3. Illustrative geometry for our method. In the geometry, shells with gray color and downwardly diagonal line texture respectively correspond to Eqs. (19) ~ (21).

되는 $Y^i Z^j$ 의 상관항에 대한 조건이 많이 생략된 것을 알 수 있다. 이 때문에 상관항이 지배적인 환경에서는 수렴성 측면에서 Chisholm 근사보다 성능이 떨어지리라 짐작할 수 있다.

Eqs. (27)와 (28)의 조건은 각각 Eq. (11)의 Padé 근사에서 분모의 차수를 유도하는데 사용되는 조건이랑 동일하다. 그렇기 때문에 p_i 와 q_j 는 각각 Eq. (14)의 b_j 과 동일한 값으로 주어진다. Eq. (15)에서 두 개의 항의 곱으로 되어 있는 분모 항을 부분 분수 전개를 통해 치환하면, 결국 Eq. (15)는 아래와 같이 정리할 수 있을 것이다.

$$f_{1(m,m)}(y,z) = -1 + \hat{f}_{(m,m)}(y) + \hat{f}_{(m,m)}(z) + R(y,z), \quad (29)$$

여기서 $R(y,z)$ 는 상관항을 의미한다. Eq. (29)의 구조를 살펴보면, Lin *et al.*의 Eq. (8)이나 Sturm은 Eq. (9)와 동일한 구조로 되어 있음을 알 수 있다. 결국 $R(y,z)$ 에 해당하는 상관항의 정확성 차이에 의해 각 상관항을 포함하는 근사식의 근사성능이 결정될 것이다. 다음 절에서는 위상오차분석을 통해 각 근사법의 성능을 분석한다.

IV. 위상 오차 분석

4.1 위상 오차 분석법^[1,12]

Eqs. (1)과 (4)에서 $\sqrt{1+Y+Z}$ 는 물리적으로 k_0 에 의해 정규화된 x방향의 파수로 볼 수 있다. 보다 논의를 단순화하기 위해 매질이 균일하다고 가정하고 음파가 평면파라고 생각한다. 이때 음파의 파수 벡터는 아래와 같이 고각(θ)과 방위각(ϕ)을 이용하여 직각좌표계로 표현할 수 있다(Fig. 1).

$$\vec{k} = k(\cos\theta, \sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi). \quad (30)$$

Eq. (30)의 파수를 Eq. (4)에 대입하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$Q_x = (k/k_0) \sqrt{1 - \sin^2\theta}. \quad (31)$$

Eq. (31)은 평면파의 정규화된 x방향의 파수인 것을 확인할 수 있다.

마찬가지의 방식으로 Eq. (30)을 이용하여 Eqs. (5), (7) ~ (9)를 각각 정리하면 아래와 같다. 이때 문제를 단순화하기 위해 $k/k_0 = 1$ 로 놓았다.

$$Q_{1x} = 1 + \frac{\sin^2\theta}{2}(\cos^2\phi + \sin^2\phi). \quad (32)$$

$$Q_{3x} = -1 + \sqrt{1 - \sin^2\theta\cos^2\phi} + \sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\phi}. \quad (33)$$

$$Q_{4x} = -1 + \sqrt{1 - \sin^2\theta\cos^2\phi} + \sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\phi} - (-1 + \sqrt{1 - \sin^2\theta\cos^2\phi}) - (-1 + \sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\phi}). \quad (34)$$

$$Q_{5x} = -1 + \sqrt{1 - \sin^2\theta\cos^2\phi} + \sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\phi} + \frac{1}{4} \sin^4\theta\cos^2\phi\sin^2\phi. \quad (35)$$

한편, 두 변수 유리함수 근사식인 Eq. (15)의 $f_{(m,m)}$ 과 Eq. (23)의 $f_{1(m,m)}$ 에도 동일한 근사를 적용할 수 있다. 이를 각각 Q_{6x} 와 Q_{7x} 라고 정의한다.

Reference [1]에 의하면, 위상오차는 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon = |Q_{jx} - Q_x|, \quad (36)$$

여기서 j 는 1,3,4,5,6,7 중 하나이다.

위상오차인 Eq. (36)는 근사식으로 얻어진 x방향 파수와 정확한 x방향 파수간의 차이를 나타낸다. 참고문헌 3에서는 위의 위상오차가 0.002 또는 1/10인 0.0002에 해당하는 각도를 해당 근사법이 정확한 최대 각도로 정의했다. 본 연구에서는 참고문헌 3의 사례를 따라 0.0001에 해당하는 각도를 근사법의 최대 각도로 정의할 것이다.

Eqs. (33) ~ (35)의 제곱근 연산자는 해석적으로 풀지 않고 Padé 근사를 이용하여 계산했다. 이는 $f_{(m,m)}$ 과 $f_{1(m,m)}$ 의 계산과 일관성을 유지하기 위해서이다.

4.2 분석 결과

Fig. 4는 방위각 45°에서 Chisholm 근사식과 본 연구에서 제안한 근사식의 고각 및 근사 차수에 따른 위상 오차를 보여준다. 방위각 45°는 상관항의 영향이 강하게 나타나는 영역이다. 차수가 높아질수록 근사식의 근사범위가 증가하는 것을 확인할 수 있다. 최대 각도의 기준을 위상오차 0.0001로 잡을 때, Chisholm 근사식은 근사차수 1차, 2차, 5차에서 각각 26.3°, 47.6°, 70.5°의 최대각도를 갖고, 본 연구의 방법은 21.2°, 34.4°, 54.4°의 최대각도를 갖는다. 본 연구의 방법이 Chisholm 근사식보다 성능은 떨어지지만 광대역의 정확도를 갖는다는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 5는 동일한 방위각에서 본 연구의 방법과 기존의 근사법을 비교한 것이다. 유리함수 근사의 차수는 8차로 고정했다. Table 1에 위상오차 0.0001에서의 최대각도를 정리했다. Table 1에서 Sturm1은 Eq. (33)를 의미하며, Sturm2는 Eq. (35)를 의미한다. 본 연구에서 제안된 방법은 기존의 방법에 비해 거의 세배의 최대 전달 각도를 갖는다는 것을 확인할 수 있다. 그러나 정확한 두 변수 유리함수 근사법인 Chisholm 방법에 비해서는 전달 각도의 영역이 15도 정도 작은 것을 볼 수 있다. 한편 Lin *et al.*의 방법과 Sturm2는 비슷한 최대각도를 갖는다. 이것은 Eq. (8)이 최저 차의 상관항인 $O(YZ)$ 까지만 고려한 근사식이라는 것

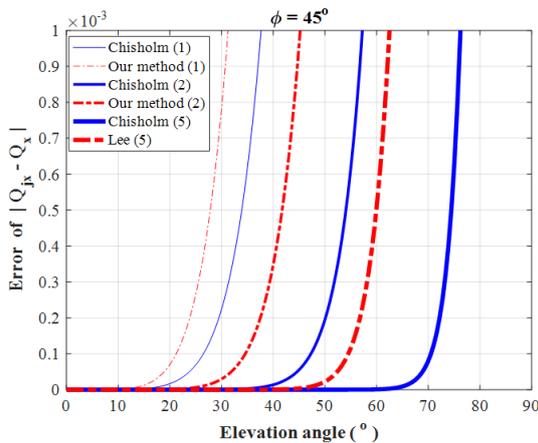


Fig. 4. Phase error as a function of elevation angle at the bearing angle of 45° for 1st, 2nd, and 5th approximations of Chisholm method and proposed method.

을 의미한다.

Fig. 6은 방위각이 0°와 90°에서의 본 연구의 방법과 기존의 방법을 비교한 것이다. 0°와 90°는 상관항의 영향이 나타나지 않는 영역이다. Tappert의 방법을 제외하고는 모두 동일한 특성을 보이는 것을 확인할 수 있다. Chisholm 근사법 및 본 연구의 방법은

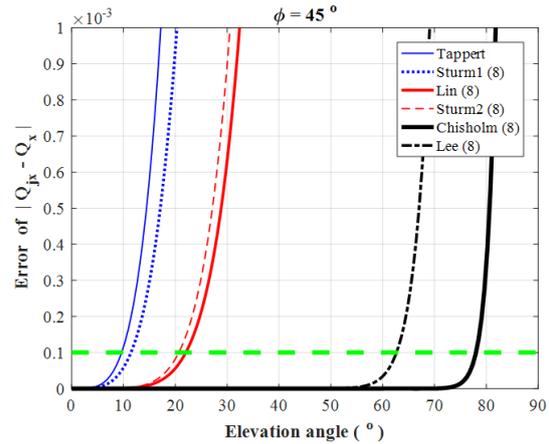


Fig. 5. Phase error as a function of elevation angle at the bearing angle of 45° for different approximation methods.

Table 1. Maximum Elevation Angle (MEA) for different approximations at the bearing angle of 45°.

Types	Tappert	Sturm1	Lin	Sturm2	Chisholm	Lee
MEA (°)	9.7	11.5	21.8	20.6	77.9	62.5

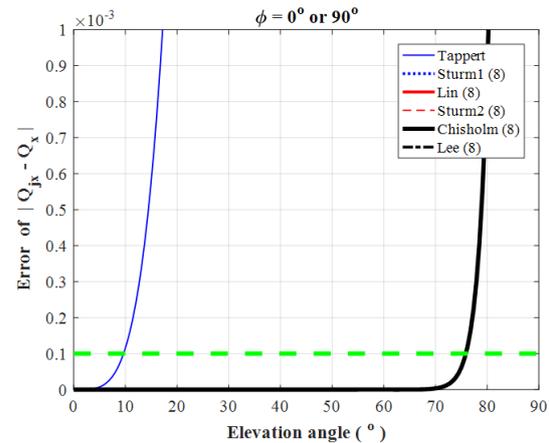


Fig. 6. Phase error as a function of elevation angle at the bearing angle of 0° or 90° for different approximation method. All results coincide with each other except the result of Tappert approximation.

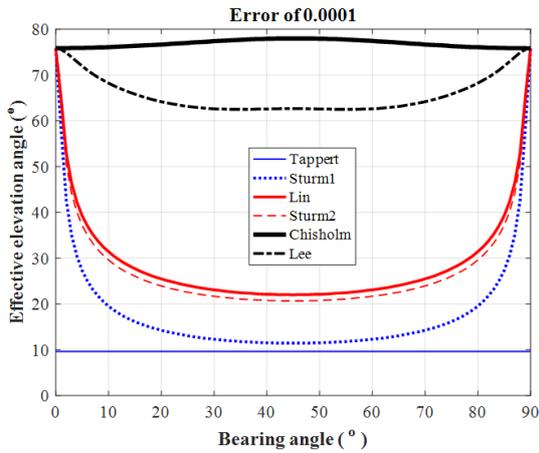


Fig. 7. Effective elevation angle vs. bearing angle for different approximation methods at the phase error of 0.0001.

두 변수에 대한 유리함수 근사지만, 각각의 연산자가 0인 경우($Y = 0$ 또는 $Z = 0$)에는 Padé 근사로 간략화 된다. 이 때문에 방위각이 0° 와 90° 에는 Tappert 근사식을 제외한 모든 근사식이 동일한 결과를 주는 것이다.

Fig. 7은 각각의 근사식에 대해 0.0001의 위상오차에서 방위각에 따른 고각의 최대각도를 도시한 것이다. Tappert의 방법은 방위각에 상관없이 9.7° 의 동일한 최대각도를 갖는다. 이는 Eq. (32)만 봐도 알 수 있다. Eq. (32)은 방위각에 독립적이다. 이것은 균일한 매질을 가정했기 때문에 얻어지는 자명한 결과지만, 균일매질이 아니라도 Tappert 근사가 상대적으로 방위각에 둔감할 수 있다는 것을 보여준다.

Tappert 근사와 달리 Sturm1의 근사는 보다 높은 최대각도를 갖는 것을 볼 수 있다. 특히 방위각 0° 와 90° 근처에서는 광대역의 최대각도를 갖는다. Lin *et al.*의 방법과 Sturm2는 상관항이 지배적인 방위각 45° 근처에서 Tappert 근사보다 고각의 최대각도가 증가하는 것을 볼 수 있다. 본 연구의 방법은 전 영역에 걸쳐서 60° 이상의 광대역의 각도를 보이는 것을 볼 수 있다. Chisholm 근사식은 모든 근사식 중에 가장 좋은 성능 보인다. 재밌는 점은 방위각 45° 근처에서 가장 큰 최대각도를 갖는다는 것이다. 이는 Fig. 2에서 $O(Y^2 Z^{2m+1})$ 항에 대해서 조건을 부여할 때, 비상관항에 대해서는 조건을 부여하지 않고, 상관항에만 조건을 부여한 결과라고 생각한다.

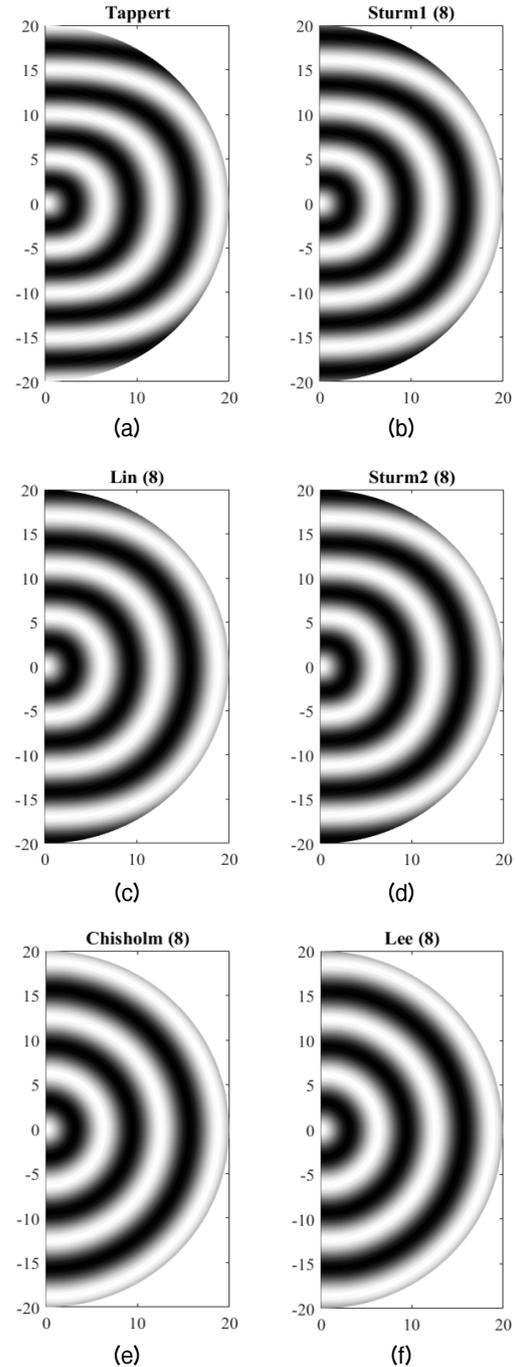


Fig. 8. Cross sections of spherical wave fields at the bearing angle of 45° with six approximations. In the coordinate system of the figures, the horizontal and vertical axes represent cross-range and z axes. The axis label is kr and a non-dimensional parameter.

Fig. 8에서는 여러 근사법이 실제 음장에서 어떤 음향을 보이는지를 알아보기 위해, 위에서 서술한 6개의 근사법에서 얻어진 파수를 사용하여 거리확산

성분을 보정한 구면파의 실수 성분을 모의한 것으로써 45°의 방위각에서 고각에 대한 결과를 나타낸 것이다. 수평과 수직축은 kr 에 대해 그린 것이며 ‘파장으로 정규화 된 길이’로써 무차원수이다. 그림에서 보면 Tappert의 결과와 Sturm1의 결과는 수직의 고각에 가까울수록 위상 차이가 한눈에 보이는 것을 알 수 있다. Lin과 Sturm2의 것은 서로 유사하나 역시 수직의 고각에서 오차가 보인다. Chisholm와 Lee의 결과만이 전체 고각에 대해서 구면파의 음장과 비슷한 것을 확인할 수 있다. 물론, Fig. 8의 결과는 비교적 근거리에서 구면파의 음장을 모의한 것임에 유의해야 한다. kr 이 증가하여 먼 거리가 되면 위상 오차에 의한 음장의 일그러짐은 더욱더 커질 것이다.

마지막으로 Chisholm 근사법의 유용성에 대해 언급한다. 앞서 말했듯이 Chisholm 근사법은 $f(y, z)$ 로 표현되는 두 변수 함수에 대한 정확한 유리함수 근사법이다. 그러나 Chisholm 근사를 직접 3차원 음향 포물선방정식에 적용하는 것은 효율성이 떨어진다. 3차원 음향 포물선방정식의 연산자는 본질적으로 $f(y, z)$ 의 함수이긴 하나, $W = Y + Z$ 의 치환을 통해서, $f(w)$ 로 쓸 수 있다. 그렇기 때문에 본 연구의 목적처럼 특별한 이유가 없다면 Chisholm 근사를 직접 적용할 필요가 없이, 이 등 및 Collis의 방법처럼 일 변수에 대한 Padé 근사를 하는 것이 유리하다. Eq. (12)를 이용하면 Eq. (4)의 2차원 제곱근 연산자는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$Q_{8x} = \sum_{i=0}^m a_i (Y+Z)^i / \sum_{j=0}^m b_j (Y+Z)^j + O[(Y+Z)^{2m+1}]. \quad (37)$$

Fig. 9는 $-5 < Y < 5$, $-5 < Z < 5$ 에서 Eq. (4)와 Chisholm 근사식인 Q_{6x} , Eq. (4)와 Padé 근사식인 Q_{8x} 의 위상오차를 보여준다. 차수는 각각 8차까지 고려했다. 위상오차는 로그 값을 이용하여 표기했다. 위상오차가 0인 경우는 로그값이 음의 무한대에 가까울 것이고 위상오차가 큰 경우에는 로그값이 양의 무한대로 가까울 것이다. Fig. 9를 보면 Chisholm 근사는 $Y = 0, Z = 0$ 을 중심으로 국소영역에서만 정확한 반면, Padé 근사는 보다 넓은 범위에서 정확성이 높은 것을 볼 수 있다. x방향 파수에 대한 음파의

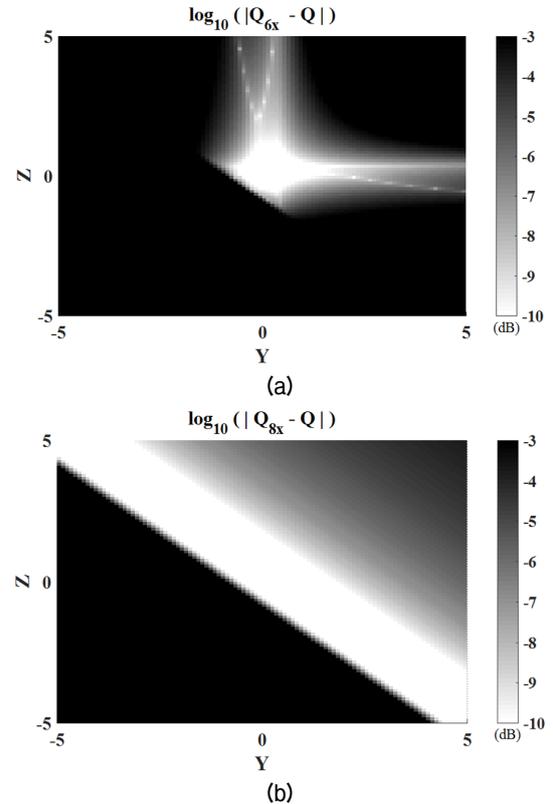


Fig. 9. Logarithm errors between Eq. (4) and approximation method. approximation method. (a) Error between Eq. (4) and Chisholm approximation of Eq. (15); (b) Error between Eq. (4) and Padé approximation of Eq. (36). The colorbar shows the logarithm error. The axis label is a non-dimensional parameter.

방사 스펙트럼 영역은 $-1 < Y+Z < 0$ 인 영역인데, Fig. 9에서 보면 Padé 근사는 해당 영역에서 매우 정확하다. 더구나 유리함수의 형태를 봐도 Eq. (15)보다는 Eq. (37)이 훨씬 수치 해석적으로 적합하게 정리되어 있다. 결론적으로 완전한 3차원 음향포물선 방정식을 풀기 위해서는 Chisholm의 Eq. (15)보다는 Eq. (37)을 사용하는 것이 좋다고 할 수 있다.

V. 결론 및 전망

본 연구에서는 두 변수 유리함수 근사에 기반한 3차원 음향 포물선방정식의 2차원 제곱근 연산자의 근사식을 제안했다. 제안된 근사식의 특징은 분모의 수심 및 횡거리 방향 연산자가 곱의 형태로 분리가 된다는 점이다. 이러한 특성을 이용하면 분모의 역

행렬을 구할 때 각 연산자에 대한 순차적인 역산을 할 수가 있어서 수치적으로 매우 효율적이다. 또한 제안된 식은 $Y = 0$ 또는 $Z = 0$ 일 때 Padé 근사식으로 간략화 되기 때문에 기존에 제안된 모든 알고리즘을 포괄하며 보다 일반화 된 식이라 할 수 있다.

또한, 본 연구에서 제안된 근사식의 방위각에 따른 최소 고각은 약 60° 로써, 이 각도는 기존에 학계에 보고된 근사식의 결과의 3배에 해당한다. 결과적으로 본 연구의 제안식을 이용하면 전 방위각에 대해 3차원 광대역 음향 포물선방정식 알고리즘을 구성하는 것이 가능하리라 판단된다.

본 연구에서는 제곱근 연산자의 근사만을 수행하였으나, 추후 연구에서는 $e^{jk_0(-1+\sqrt{1+Y+Z})dx}$ 연산자에 대한 적용을 통해 해양에 대한 3차원 Split-step 유리함수 근사 알고리즘을 구현할 계획이다.

감사의 글

본 연구는 한국연구재단 이공분야기초연구사업(NRF-2016R1C1B1011545)의 지원을 받아 수행되었습니다.

References

1. F. B. Jensen, M. B. Porter, W. A. Kuperman, and H. Schmidt, *Computational Ocean Acoustics, 2nd Edition* (Springer, New York, 2011), pp. 457-527.
2. Frédéric Sturm, "Numerical study of broadband sound pulse propagation in three-dimensional oceanic waveguides," *J. Acoust. Soc. Am.* **117**, 1058-1079 (2005).
3. Y. Lin, J. M. Collis, and T. F. Duda, "A three-dimensional parabolic equation model of sound propagation using higher-order operator splitting and Padé approximants," *J. Acoust. Soc. Am.* **132**, EL364-EL370 (2012).
4. K. Lee and W. Seong, "Perfectly three-dimensional parabolic equation algorithm" (in Korean), *J. Acoust. Soc. Kr.* **25(2s)** (2006).
5. J. M. Collis, "Three-dimensional underwater sound propagation using a split-step Padé parabolic equation solution (A)," *J. Acoust. Soc. Am.* **130**, 2528 (2006).
6. Frédéric Sturm, "Leading-order cross term correction of three-dimensional parabolic equation models," *J. Acoust. Soc. Am.* **139**, 263-270 (2016).
7. C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical*

Methods for Scientists and Engineers (McGraw-Hill, Auckland, 1978), pp. 383-410.

8. A. Cuyt, "How well can the concept of Padé approximant be generalized to the multivariate case?" *J. Comput. Appl. Math.* **105**, 25-50 (1999).
9. J. S. R. Chisholm, "Rational approximants defined from double power series," *Math. Comp.* **27**, 841-848 (1973).
10. N. K. Bose and S. Basu, "Two-dimensional matrix Padé approximants: Existence, nonuniqueness, and recursive computation," *IEEE Trans. Automat. Contr.* **AC-25**, 509-514 (1980).
11. R. H. Jones and G. J. Makinson, "The generation of Chisholm rational polynomial approximants to power series in two variables," *J. Inst. Maths Applics* **13**, 299-310 (1974).
12. K. Lee and W. Seong, "Analytic error caused by the inconsistency of the approximation order between the non local boundary condition and the parabolic governing equation" (in Korean), *J. Acoust. Soc. Kr.* **25**, 229-238 (2006).

저자 약력

▶ 이 근 화 (Keunhwa Lee)



2000년: 서울대학교 조선해양공학과 학사
 2006년: 서울대학교 조선해양공학과 박사
 2006년~2014: 서울대학교 해양시스템공학 연구소 연구부교수
 2014년~ 현재: 세종대학교 국방시스템 공학과 조교수