The Korean Journal of Applied Statistics (2017) **30**(6), 1027–1036
DOI: https://doi.org/10.5351/KJAS.2017.30.6.1027

Nonparametric multiple comparison method in one-way layout based on joint placement

Dahee Seok[a] · Dongjae Kim[a,1]

[a]Department of Biomedicine · Health Science, The Catholic University of Korea

(Received September 14, 2017; Revised October 27, 2017; Accepted November 2, 2017)

Abstract

Multiple comparisons are required to confirm whether or not something is significant if the null hypothesis to test whether the difference between more than three treatments is rejected in a one-way layout. There are both parametric multiple comparison method Tukey (1953) and Nonparametric multiple comparison method based on Kruskal-Wallis (1952).This procedure is applied to a mixed sample of all data and then an average ranking is used for each of three or more treatments. In this paper, a new nonparametric multiple comparison procedure based on joint placements for a one-way layout as extension of the joint placements described in Chung and Kim (2007) was proposed. Monte Carlo simulation is also adapted to compare the family wise error rate (FWE) and the power of the proposed method with previous methods.

Keywords: multiple comparison, joint placement, one-way layout

1. 서론

일원배치법은 3개 이상의 모집단에서 관측된 자료들에 대해 모집단의 평균값들이 같다는 가설을 검정하는데 쓰이는 통계적 분석방법이다. 예를 들면 보리의 다양한 품종들 간의 산출량의 차이, 치료 효과와 부작용의 측면에서 상이한 약물 요법들 간의 차이를 비교하는 임상시험 등에서 사용되는 연구들과 같이 집단들 간의 유사성을 검정하는 것이다.

만약 처리들 간의 차이가 존재하지 않는다는 귀무가설이 기각된다면, 처리들의 평균이 차이가 있다고 판단할 뿐 구체적으로 어떤 처리들 간의 차이가 존재하는지는 알 수 없다. 이때 어떤 처리의 효과가 유의하게 구별되는지 알기 위해 검정을 해 볼 필요가 있는데 이와 같은 분석을 다중비교 검정(multiple comparison test)이라고 한다. 모수적 방법으로는 Duncan (1955), Scheffe (1953), Tukey (1953)의 방법들이 있다. Seong (2001)에 의하면 Tukey의 방법은 자주 사용되고 있는 방법으로 집단의 수가 모두 동일하다면 검정력이 높다는 장점이 있다. 그러나 가장 보수적인 방법으로 평균간의 차이가 존재한다는 결론을 잘 내리지 않는다. Duncan의 방법은 모평균의 차이가 있다는 귀무가설을 잘 기각하지만 옳지 않은 결론을 내릴 오류의 확률 또한 커진다는 점을 인식해야 한다. Scheffe의 방법은 집단들의 수가 동일하지 않은 경우, 반복이 서로 다른 경우, 평균들이 상관이 있는 경우에도 적용할 수 있는 방법으로 가장 융통성이 있으나 다른 방법들에 비해 검정력이 낮다. 이러한 다중비교 검정은 분산분석에서 유의한

[1]Corresponding author: Department of Biomedicine · Health Science, The Catholic University of Korea, 222 Banpo-dero Seocho-gu, Seoul 06591, Korea. E-mail: djkim@catholic.ac.kr

결과가 나온 후 시행하는 것이 자연스럽지만 대부분의 다중비교 검정법은 분산분석의 F 검정과는 독립적으로 개발되었다. 따라서 다중비교 검정은 분산분석의 F 검정의 귀무가설 기각 여부와 관계없이 수행할 수 있다. 만약 오차가 서로 독립이고 정규분포를 따르는 확률변수라는 가정이 성립된다면 위와 같은 모수적 방법들을 사용하여 다중비교 검정을 할 수 있다. 하지만 가정을 만족하지 않을 때에는 모수적 방법을 사용하게 되면 제1종 오류를 제어할 수 없는 문제점이 발생하기 때문에 비모수적 방법을 사용해야 한다.

일원배치모형에서 어느 효과의 차이가 존재하는지 알아보기 위한 대표적인 비모수 다중비교 검정법으로는 Kruskal-Wallis (1952)의 순위합을 이용한 검정법이 있다. Kruskal과 Wallis가 제안한 검정법은 세 개 이상의 다른 모집단으로부터 결합된 관측값 자체를 이용하지 않고 통합순위를 이용하여 처리효과의 유의성을 검정하는 방법이다. 다중비교 검정법에서는 두 처리간의 효과 차이를 검정하기 위해 각 처리별 평균 순위를 사용하여 검정을 하므로, 원래 자료의 관측치가 아닌 혼합표본의 평균 순위를 사용하게 되어 정보의 손실이 있을 수 있다는 단점이 존재한다.

Orban과 Wolfe (1982)는 두 처리간의 효과 차이를 검정하기 위해 위치를 이용한 비모수적 검정법을 제안하였다. 이 방법은 두 처리 중 어느 한 처리에 대한 상대적인 위치정보를 이용해 처리효과의 차이를 검정하는 방법으로 대조군의 표본크기가 처리군의 표본크기보다 클 때 더 유용하다고 알려져 있다. Chung과 Kim (2007)은 이 방법을 일원배치모형으로 확장하여 결합위치(joint placement) 방법을 제안하였다. 이 검정법은 세 개 이상의 처리 효과 차이를 알아보고자 할 경우, 비교하고자 하는 확률표본이 포함되어있는 처리군을 제외한 모든 처리군과 비교하여 상대적인 위치를 사용해 처리 효과를 검정하는 방법으로 각 처리의 표본크기가 동일할 때 Kruskal-Wallis 검정법과 같게 된다.

본 논문에서는 Chung과 Kim (2007)이 제안한 결합위치 통계량을 확장하여 상대적인 위치정보를 이용한 일원배치모형에서의 비모수적 다중비교 검정법을 제안하였다. 제안된 검정법과 기존의 검정법들의 비교를 위해 Monte Carlo simulation을 통하여 일원배치모형에서의 모수적 검정법인 Tukey-Kramer (Kramer, 1956) 방법, 비모수적 검정법인 Kruskal-Wallis (1952) 순위합 다중비교 방법, 본 논문에서 제안한 방법의 family wise error rate (FWE)와 검정력(power)을 비교하였다.

2. 제안하는 방법

처리의 수가 k개인 일원배치모형은 다음과 같다.

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n_i,$$

여기서 Y_{ij}는 i번째 처리에서 j번째 반복의 관측치이며, μ는 전체평균, α_i는 처리 i에서의 처리효과, ϵ_{ij}는 오차항을 나타낸다. 이 때 오차항은 동일한 연속분포를 따르는 서로 독립인 확률변수를 가정하며 전체 표본크기 $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$이다.

모집단에 대한 구체적인 분포함수를 가정할 수 없을 때 두 처리의 효과가 동일하다는 귀무가설과 두 처리의 효과가 동일하지 않다는 일반 대립가설은 다음과 같다.

$$H_0 : \mu_a = \mu_b \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_a \neq \mu_b \quad (a \neq b;\ a, b = 1, \ldots, k).$$

본 논문에서 제안하는 결합위치를 이용한 다중비교 검정법은 Chung과 Kim (2007)이 제안한 결합위치의 처리별 평균을 이용하여 검정할 수 있다. 제안한 방법의 검정통계량으로 쓰일 비모수적 도구인 결합

위치 V_{ij}를 다음과 같이 정의한다.

$$V_{ij} = \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{k} \sum_{s=1}^{n_h} \chi(Y_{hs}, Y_{ij}), \quad \chi(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \text{일 경우}, \\ 0, & \text{그 외}. \end{cases}$$

결합위치 V_{ij}는 i번째 처리의 관측값을 제외한 혼합표본에서 Y_{ij}보다 작거나 같은 관측값의 개수이다. 이를 이용한 결합위치의 처리별 평균은 다음과 같다.

$$\overline{V}_{i\cdot} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} V_{ij}}{n_i}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Chung과 Kim (2007)에 의해 결합위치의 처리별 합 $V_{i\cdot}$과 순위의 처리별 합 $R_{i\cdot}$의 관계로부터 유도한 두 처리별 평균의 차이인 검정통계량 W_{ab}을 다음과 같이 정의한다.

$$W_{ab} = \left(\overline{V}_{a\cdot} - \overline{V}_{b\cdot}\right) = \left(\overline{R}_{a\cdot} - \overline{R}_{b\cdot} + \frac{n_b - n_a}{2}\right).$$

두 처리의 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 통계량 D_{ab}을 다음과 같이 정의한다.

$$D_{ab} = \overline{R}_{a\cdot} - \overline{R}_{b\cdot}$$

Dunn (1964)에 의해, 귀무가설 하에서 $\min(n_a, n_b)$이 커질 때 표준화된 통계량 $\hat{D}_{ab}$의 분포는 표준정규분포로 수렴하게 된다.

$$\hat{D}_{ab} = \frac{D_{ab} - E(D_{ab})}{\sqrt{\mathrm{Var}(D_{ab})}} \xrightarrow{\min(n_a, n_b) \to \infty} N(0,1).$$

이때 $E(D_{ab})$와 $\mathrm{Var}(D_{ab})$의 구체적인 식은 다음과 같다.

$$E(D_{ab}) = 0, \qquad \mathrm{Var}(D_{ab}) = \frac{N(N+1)}{12}\left(\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b}\right).$$

따라서 검정통계량 W_{ab}의 분포는 귀무가설 하에서 $\min(n_a, n_b)$이 커질 때 정규분포로 근사하게 된다.

$$\frac{W_{ab}}{\sqrt{\mathrm{Var}(W_{ab})}} \xrightarrow{\min(n_a, n_b) \to \infty} N\left(\frac{n_b - n_a}{2}, 1\right).$$

한편 각 처리별 표본크기가 동일한 경우 검정통계량 W_{ab}는 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 통계량과 상수 배의 관계에 놓여있게 되어 검정통계량이 같아지므로 처리별 표본크기가 동일할 때 두 검정법은 같은 검정법이 된다.

3. 모의실험의 계획 및 결과

본 논문에서는 결합위치를 이용한 처리별 평균 통계량에 근거하여 새롭게 제안한 검정법과 기존의 검정법들의 FWE와 검정력을 비교하기 위해 모의실험을 시행하였다. FWE는 모든 귀무가설이 참일 때 적어도 하나의 귀무가설이 기각될 확률이며 검정력은 거짓인 귀무가설들 중 적어도 하나의 귀무가설을 거짓이라고 판단할 확률이다.

모수적인 방법으로는 Tukey-Kramer 방법을 사용하였고 비모수적인 방법으로는 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법을 사용하였다. 모집단의 분포는 대칭분포인 정규분포, 이중지수분포, Cauchy분포와

Table 3.1. Monte Carlo power and FWE estimates: treatment = 3, $n_1 = 5$, $n_2 = 6$, $n_3 = 7$

Dist	τ_1	τ_2	τ_3	TK	KW	JP
Normal	0	0	0	0.0503	0.0503	0.0501
	0	0.5	0	0.1099	0.1061	0.1352
	0	1.5	0.5	0.5291	0.4995	0.5001
	0.5	1.2	0	0.3993	0.3739	0.4671
	0.8	0	0.5	0.1831	0.1764	0.2108
	0.8	0.8	0	0.2359	0.2252	0.2637
	1	0	1.2	0.4253	0.3995	0.4018
	1.5	0.8	0	0.5343	0.5106	0.4950
Exponential	0	0	0	0.0390	0.0469	0.0500
	0	0.5	0	0.1143	0.1756	0.2110
	0	1.5	0.5	0.5960	0.6934	0.6964
	0.5	1.2	0	0.4676	0.5705	0.6671
	0.8	0	0.5	0.2195	0.2993	0.3703
	0.8	0.8	0	0.3123	0.3738	0.4188
	1	0	1.2	0.5075	0.5672	0.5608
	1.5	0.8	0	0.5974	0.6802	0.6537
Double exponential	0	0	0	0.0429	0.0493	0.0499
	0	0.5	0	0.0737	0.0877	0.1089
	0	1.5	0.5	0.3278	0.3682	0.3659
	0.5	1.2	0	0.2419	0.2806	0.3528
	0.8	0	0.5	0.1194	0.1452	0.1739
	0.8	0.8	0	0.1539	0.1827	0.2099
	1	0	1.2	0.2673	0.3026	0.3017
	1.5	0.8	0	0.3328	0.3725	0.3678
Cauchy	0	0	0	0.0163	0.0470	0.0495
	0	0.5	0	0.0201	0.0589	0.0742
	0	1.5	0.5	0.0651	0.1786	0.1778
	0.5	1.2	0	0.0480	0.1426	0.1777
	0.8	0	0.5	0.0258	0.0820	0.0995
	0.8	0.8	0	0.0312	0.0953	0.1132
	1	0	1.2	0.0500	0.1514	0.1543
	1.5	0.8	0	0.0574	0.1779	0.1897

FWE = family wise error rate; TK = Tukey-Kramer's method; KW = method using Kruskal-Wallis; JP = method using joint placement.

비대칭분포인 지수분포를 채택하였다. 정규분포, Cauchy분포, 지수분포의 난수생성은 SAS의 RANNOR 함수, RANCAU 함수, RANEXP 함수를 이용하였고, 이중지수분포는 RANUNI 함수를 이용하여 역변환 방법으로 난수를 생성하였다.

처리의 수는 3개와 5개인 경우를 선택하였고, 처리별 표본크기는 모두 다른 경우를 고려하였다. 처리의 수가 3개일 때 소표본으로는 각 표본크기가 $5, 6, 7$인 경우와 대표본으로는 $13, 14, 15$인 경우를 고려하였고, 처리의 수가 5개일 때 소표본으로는 각 표본크기가 $5, 6, 7, 8, 9$인 경우와 대표본으로는 $15, 16, 17, 18, 19$인 경우를 고려하였다. 제안한 방법과 기존의 검정법들의 FWE와 검정력의 비교를 위해 10,000번 반복하는 Monte Carlo simulation을 시행하였다. 모의실험 결과는 처리의 수가 3개이고 각 처리별 표본크기가 $5, 6, 7$인 소표본의 경우에는 Table 3.1, 처리의 수가 3개이고 각 처리별 표본크기

Table 3.2. Monte Carlo power and FWE estimates: treatment = 3, n_1 = 13, n_2 = 14, n_1 = 15

Dist	τ_1	τ_2	τ_3	TK	KW	JP
Normal	0	0	0	0.0504	0.0512	0.0500
	0	0.5	0	0.2320	0.2229	0.2535
	0	1.5	0.5	0.9447	0.9301	0.9312
	0.5	1.2	0	0.7982	0.7731	0.8195
	0.8	0	0.5	0.4276	0.4136	0.4641
	0.8	0.8	0	0.5509	0.5245	0.5300
	1	0	1.2	0.8370	0.8155	0.8261
	1.5	0.8	0	0.9386	0.9247	0.8977
Exponential	0	0	0	0.0429	0.0499	0.0499
	0	0.5	0	0.2571	0.4536	0.5010
	0	1.5	0.5	0.9250	0.9884	0.9883
	0.5	1.2	0	0.8057	0.9469	0.9652
	0.8	0	0.5	0.4651	0.6842	0.7376
	0.8	0.8	0	0.5852	0.7539	0.7583
	1	0	1.2	0.8346	0.9219	0.9273
	1.5	0.8	0	0.9210	0.9834	0.9741
Double exponential	0	0	0	0.0461	0.0492	0.0498
	0	0.5	0	0.1394	0.1765	0.2035
	0	1.5	0.5	0.6813	0.7808	0.7827
	0.5	1.2	0	0.5093	0.6167	0.6757
	0.8	0	0.5	0.2470	0.3107	0.3550
	0.8	0.8	0	0.3234	0.4021	0.4078
	1	0	1.2	0.5498	0.6545	0.6690
	1.5	0.8	0	0.6840	0.7842	0.7429
Cauchy	0	0	0	0.0177	0.0525	0.0503
	0	0.5	0	0.0212	0.0907	0.1059
	0	1.5	0.5	0.0698	0.4016	0.4070
	0.5	1.2	0	0.0495	0.2892	0.3317
	0.8	0	0.5	0.0314	0.1518	0.1778
	0.8	0.8	0	0.0315	0.1892	0.1900
	1	0	1.2	0.0538	0.3071	0.3196
	1.5	0.8	0	0.0651	0.3899	0.3529

FWE = family wise error rate; TK = Tukey-Kramer's method; KW = method using Kruskal-Wallis; JP = method using joint placement.

가 13, 14, 15인 대표본의 경우에는 Table 3.2, 처리의 수가 5개이고 각 처리별 표본크기가 5, 6, 7, 8, 9인 소표본의 경우에는 Table 3.3, 처리의 수가 5개이고 각 처리별 표본크기가 15, 16, 17, 18, 19인 대표본의 경우에는 Table 3.4에 정리하였다.

처리의 수가 3개인 경우 각 처리의 효과가 모두 동일할 때 FWE가 0.05를 잘 만족하는지 살펴보면, 정규분포에서는 Tukey-Kramer 방법이 소표본일때 0.0503, 대표본일때 0.0504의 값을 얻었고 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법은 소표본일때 0.0503, 대표본일때 0.0512의 값을 얻었으며 제안한 방법은 0.0501,0.0500의 값을 얻었다. 이를 통해 Tukey-Kramer 방법과 제안한 방법이 FWE를 비교적 잘 제어하고 있음을 알 수 있다. 지수분포에서는 Tukey-Kramer 방법이 소표본일때 0.0390, 대표본일때 0.0429의 값을 얻었고, Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법은 소표본일때 0.0469, 대표본일때

Table 3.3. Monte Carlo power and FWE estimates: treatment = 5, $n_1 = 5$, $n_2 = 6$, $n_3 = 7$, $n_4 = 8$, $n_5 = 9$

Dist	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	TK	KW	JP
Normal	0	0	0	0	0	0.0477	0.0483	0.0498
	0	0	0.8	0	0	0.2389	0.2285	0.2474
	0	1	0	1	1	0.4339	0.4227	0.3736
	0	1.2	1.2	1.2	0	0.6610	0.6516	0.5990
	0	0.5	1.2	0.5	0	0.4349	0.4143	0.3553
	0	0.5	0.8	1	0	0.3935	0.3824	0.3699
	0.5	0	0.5	0	0.5	0.1348	0.1286	0.1622
	1.2	1	0.8	0.8	0	0.3992	0.3858	0.2455
Exponential	0	0	0	0	0	0.0378	0.0464	0.0497
	0	0	0.8	0	0	0.2463	0.3936	0.4342
	0	1	0	1	1	0.5044	0.6455	0.5787
	0	1.2	1.2	1.2	0	0.7066	0.8136	0.7746
	0	0.5	1.2	0.5	0	0.5946	0.7608	0.7431
	0	0.5	0.8	1	0	0.4299	0.6231	0.6037
	0.5	0	0.5	0	0.5	0.1611	0.2774	0.3190
	1.2	1	0.8	0.8	0	0.4779	0.5899	0.4031
Double exponential	0	0	0	0	0	0.0454	0.0482	0.0501
	0	0	0.8	0	0	0.1340	0.1683	0.1850
	0	1	0	1	1	0.2483	0.3127	0.2751
	0	1.2	1.2	1.2	0	0.3843	0.4752	0.4397
	0	0.5	1.2	0.5	0	0.2475	0.3092	0.2674
	0	0.5	0.8	1	0	0.2141	0.2710	0.2659
	0.5	0	0.5	0	0.5	0.0866	0.1108	0.1318
	1.2	1	0.8	0.8	0	0.2254	0.2847	0.1882
Cauchy	0	0	0	0	0	0.0269	0.0517	0.0508
	0	0	0.8	0	0	0.0211	0.0779	0.0897
	0	1	0	1	1	0.0363	0.1384	0.1352
	0	1.2	1.2	1.2	0	0.0452	0.2135	0.2017
	0	0.5	1.2	0.5	0	0.0378	0.1411	0.1366
	0	0.5	0.8	1	0	0.0356	0.1285	0.1308
	0.5	0	0.5	0	0.5	0.0220	0.0646	0.0843
	1.2	1	0.8	0.8	0	0.0349	0.1323	0.1008

FWE = family wise error rate; TK = Tukey-Kramer's method; KW = method using Kruskal-Wallis; JP = method using joint placement.

0.0499의 값을 얻었고 제안한 방법은 소표본일때 0.0500, 대표본일때 0.0499의 값을 얻어 0.05에 근접한 값을 가진 것을 알 수 있다. 이중지수분포에서는 Tukey-Kramer 방법이 소표본에서 0.0429, 대표본에서 0.0461의 값을 얻었으며 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법과 제안한 방법은 표본의 크기와 상관없이 0.0492에서 0.0499의 값을 얻었다. Cauchy분포에서는 Tukey-Kramer 방법과 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법의 FWE가 다른 분포들에 비해 0.05에서 벗어났다. Tukey-Kramer 방법은 소표본인 경우 0.0163, 대표본인 경우 0.0177의 값을 얻었고 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법은 소표본일때 0.0470, 대표본일때 0.0525의 값을 얻었으며 제안한 방법은 소표본일때 0.0495, 대표본일때 0.0503의 값을 얻은것으로 보아 Cauchy분포에서는 제안한 방법을 제외한 기존의 방법들이 FWE를 제어함에 있어 어려움이 있다는 것을 알 수 있다.

Table 3.4. Monte Carlo power and FWE estimates: treatment = 5, n_1 = 15, n_2 = 16, n_3 = 17, n_4 = 18, n_5 = 19

Dist	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	TK	KW	JP
Normal	0	0	0	0	0	0.0475	0.0478	0.0502
	0	0	0.8	0	0	0.6181	0.5884	0.6111
	0	1	0	1	1	0.9144	0.9024	0.8614
	0	1.2	1.2	1.2	0	0.9854	0.9809	0.9761
	0	0.5	1.2	0.5	0	0.8923	0.8755	0.8224
	0	0.5	0.8	1	0	0.8067	0.7896	0.7650
	0.5	0	0.5	0	0.5	0.3422	0.3330	0.3778
	1.2	1	0.8	0.8	0	0.8558	0.8318	0.6182
Exponential	0	0	0	0	0	0.0451	0.0483	0.0499
	0	0	0.8	0	0	0.6194	0.9839	0.9146
	0	1	0	1	1	0.9074	0.9797	0.9670
	0	1.2	1.2	1.2	0	0.9743	0.9967	0.9944
	0	0.5	1.2	0.5	0	0.8948	0.9937	0.9873
	0	0.5	0.8	1	0	0.8137	0.9651	0.9551
	0.5	0	0.5	0	0.5	0.3672	0.6286	0.6705
	1.2	1	0.8	0.8	0	0.8496	0.9586	0.8314
Double exponential	0	0	0	0	0	0.0456	0.0507	0.0502
	0	0	0.8	0	0	0.3322	0.4400	0.4672
	0	1	0	1	1	0.6243	0.7628	0.7059
	0	1.2	1.2	1.2	0	0.8037	0.9031	0.8838
	0	0.5	1.2	0.5	0	0.5859	0.7199	0.6488
	0	0.5	0.8	1	0	0.4940	0.6335	0.6018
	0.5	0	0.5	0	0.5	0.1817	0.2521	0.2917
	1.2	1	0.8	0.8	0	0.5362	0.6766	0.4585
Cauchy	0	0	0	0	0	0.0174	0.0464	0.0507
	0	0	0.8	0	0	0.0198	0.1808	0.2023
	0	1	0	1	1	0.0330	0.3630	0.3382
	0	1.2	1.2	1.2	0	0.0469	0.4976	0.4354
	0	0.5	1.2	0.5	0	0.0376	0.3318	0.2963
	0	0.5	0.8	1	0	0.0364	0.2821	0.2672
	0.5	0	0.5	0	0.5	0.0200	0.1189	0.1460
	1.2	1	0.8	0.8	0	0.0344	0.2940	0.1958

FWE = family wise error rate; TK = Tukey-Kramer's method; KW = method using Kruskal-Wallis; JP = method using joint placement.

처리의 수가 5개인 경우 대부분의 분포에서 0.05를 크게 벗어나지 않았지만 모집단의 분포가 지수분포인 경우 소표본일때 Tukey-Kramer 방법이 0.0378의 값을 가져 다른 방법들에 비해 작게 나타났음을 알 수 있다. Cauchy분포에서는 Tukey-Kramer 방법이 소표본에서 0.0269, 대표본에서 0.0174의 값을 얻었는데 정규성 가정을 만족하지 못할 때 FWE를 제어하기 어렵다는 이전의 내용과 같은 결과이다. 이 값들을 제외하고 분포와 표본크기에 상관없이 모든 검정법들의 FWE가 0.451에서 0.517사이의 값을 가져 0.05에 근사한 값을 갖는다 할 수 있다.

다음으로 검정력을 살펴보면, 처리의 수가 3개일 때 모집단의 분포가 정규분포인 경우 표본의 크기와 상관없이 정점이 1.5인 우산형 대립가설의 패턴과 완만하게 감소하는 패턴, 감소했다가큰 폭으로 증가하는 대립가설의 패턴에서는 Tukey-Kramer 방법이 나머지 두 검정법에 비해 검정력이 높았다. 모집단의

분포가 지수분포인 경우 소표본일때는 감소하였다가 큰 폭으로 증가하는 패턴과 완만하게 감소하는 패턴을 제외한 모든 대립가설에서 제안한 방법의 검정력이 가장 높았다. 대표본일때는 대부분의 패턴에서 제안한 방법의 검정력이 가장 높았다. 특히 지수분포에서 정점이 1.5인 우산형 대립가설의 패턴에서의 검정력은 제안한 방법은 0.9883, Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법은 0.9884로 근소한 차이가 났음을 알 수 있다. 모집단의 분포가 이중지수분포인 경우 소표본일때의 결과에서는 증가하여 정점을 찍고 감소하는 패턴, 증가하여 정점을찍고 큰폭으로 감소하는 패턴, 감소했다가 증가하는 패턴, 완만하다가 감소하는 패턴에서 제안한 방법의 검정력이 가장 높게 나타났다. 대표본일때의 결과에서는 완만하게 감소하는 패턴을 제외한 모든 대립가설의 패턴에서 제안한 방법의 검정력이 가장 높았다. 모집단의 분포가 Cauchy분포인 경우에는 표본크기와 상관없이 대부분의 대립가설에서 제안한 방법의 검정력이 Tukey-Kramer 방법, Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법보다 높음을 알 수 있다.

처리의 수가 5개인 경우 정규분포에서는 표본의 크기와 상관없이 대부분의 패턴에서 Tukey-Kramer 방법의 검정력이 가장 높았으나, 정규분포를 제외한 지수분포, 이중지수분포, Cauchy분포에서는 Tukey-Kramer 방법이 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법과 제안된 방법에 비해 대체로 낮은 검정력을 보였다. 모집단의 분포가 지수분포인 경우 소표본일때는 대부분의 패턴에서 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법, 제안한 방법, Tukey-Kramer 방법의 순으로 검정력의 차이가 있었다. 대표본일때의 결과에서는 일정한 간격으로 감소와 증가를 반복하는 패턴에서 제안한 방법, Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법, Tukey-Kramer 방법의 순으로 높은 검정력을 보였다. 모집단의 분포가 이중지수분포인 경우 표본크기와 상관없이 완만하다가 증가하여 정점을 찍고 다시 감소하여 완만한 형태의 패턴과 일정한 간격으로 감소와 증가를 반복하는 패턴에서는 제안한 방법의 검정력이 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법의 검정력보다도 높았으며 모든 패턴에서 Tukey-Kramer 방법보다 높은 검정력을 보였다. Cauchy분포에서는 소표본일때는 완만하다가 증가하여 정점을 찍고 다시 감소하여 완만한 형태의 패턴과 완만하게 증가하다가 큰 폭으로 감소하는 패턴, 일정한 간격으로 감소와 증가를 반복하는 패턴에서는 제안한 방법의 검정력이 가장 높았다. 대표본일때는 완만하다가 증가하여 정점을 찍고 다시 감소하여 완만한 패턴과 일정한 간격으로 감소와 증가를 반복하는 패턴에서 제안된 방법의 검정력이 가장 높고 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법, Tukey-Kramer 방법 순으로 검정력이 높았다.

4. 결론 및 고찰

본 논문에서는 일원배치모형에서 비모수적 다중비교 방법으로 결합위치를 이용한 검정통계량을 제안하였다. 이 통계량은 Chung과 Kim (2007)이 제안한 결합위치를 확장하여 처리별 평균순위를 이용하여 만들었다. Monte Carlo simulation을 실시하여 정규분포, 지수분포, 이중지수분포, Cauchy분포에서 제안한 검정법과 모수적 검정법인 Tukey-Kramer 방법, 비모수적 검정법인 Kruskal-Wallis 순위합을 이용한 다중비교 방법의 FWE와 검정력을 비교하였다.

모의실험의 전체적인 결과를 보면 Tukey-Kramer 방법은 정규분포에서는 FWE를 잘 제어했지만 다른 3개의 분포에서는 잘 제어하지 못했음을 알 수 있다. Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법은 처리의 수가 작을 때 FWE를 잘 제어하고 있으며 본 논문에서 제안한 방법은 모든 분포에서 표본크기와 상관없이 FWE를 잘 제어함을 알 수 있다. 검정력을 보면, 처리의 수가 3인 경우 총 표본의 크기와 상관없이 대부분의 분포에서 본 논문에서 제안한 방법이 기존의 방법들 보다 높은 검정력을 보였다. 정규분포에서는 Tukey-Kramer 방법의 검정력이 제안한 방법들과 비슷하거나 높았지만 정규분포를 제외한 다른 분포들에서는 대부분의 대립가설에서 본 논문에서 제안한 방법이 나머지 두 방법들에 비해 높은 검정력을 보였다. 처리의 수가 5인 경우 대부분의 분포에서 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법의 검정력이 가장 높았지만, 일정한 간격으로 감소와 증가를 반복하는 패턴에서는 분포와 표본크기에 상관없이 제안한

방법의 검정력이 가장 높았다.

본 논문에서 제안한 방법은 처리의 수가 큰 경우 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 방법에 비해 다소 낮은 검정력을 보였지만 처리의 수가 작은 경우에는 표본의 크기와 상관없이 기존의 방법들보다 제안한 방법의 검정력이 컸음을 알 수 있다. 또한 처리의 수가 작은 경우 Cauchy분포에서는 대부분의 대립가설에서 제안한 방법의 검정력이 다른 두 방법에 비해 높게 나타났다. 따라서 적절한 분포와 효율적인 형태의 대립가설에서 본 논문에서 제안한 방법을 사용한다면 효율적인 분석을 하는데 도움이 될 수 있다.

추후에 일원배치모형에서의 다중비교에 관한 연구에서 정보의 손실을 최소화 하는 방식으로 접근하여 합리적인 통계량을 도출하는 방법을 생각해 볼 수 있다. 또한 본 논문에서 제안한 결합위치 통계량을 확장하여 기존 방법들의 단점을 보완할 수 있는 다중비교 검정법에 대해 연구해 본다면 본 논문은 또 다른 연구를 위한 유용한 비모수 다중비교 방법이 될 것이라고 기대된다.

References

Chung, T. and Kim, D. (2007). Nonparametric method using placement in one-way layout, *The Korean Communications in Statistics*, **14**, 551–560.

Duncan, D. B. (1955). Multiple range and multiple F tests, *Biometrics*, **11**, 1–42.

Dunn, O. J. (1964). Multiple comparisons using rank sums, *Technometrics*, **6**, 241–252.

Kramer, C. Y. (1956). Extension of multiple range tests to group means with unequal numbers of replications, *Biometrics*, **12**, 309–310.

Kruskal, W. H. and Wallis, W. A. (1952). Use of ranks in one-criterion variance analysis, *Journal of the American Statistical Association*, **47**, 583–621.

Orban, J. and Wolfe, D. A. (1982). A class of distribution-free two-sample tests based on placement, *Journals of the American Statistical Association*, **77**, 666–671.

Scheffe, H. (1953). A method for judging all contrasts in the analysis of variance, *Biometrika*, **40**, 87–104.

Seong, N. (2001). *Experimental Design and Analysis*, Free Academy, Seoul.

Tukey, J. W. (1953). *The Problem of Multiple Comparisons*, Unpublished dotted notes, Princeton University, Princeton, New Jersey.

일원배치모형에서 결합위치를 이용한 비모수 다중비교법

석다희[a] · 김동재[a,1]

[a]가톨릭대학교 의생명·건강과학과

(2017년 9월 14일 접수, 2017년 10월 27일 수정, 2017년 11월 2일 채택)

요 약

일원배치모형에서 세 개 이상의 처리 간에 차이 유무를 검정하여 귀무가설이 기각됐다면, 어떤 것이 통계적으로 유의한 결과인지 확인하기 위해서는 다중비교 방법이 필요하다. 대표적인 모수적 검정법으로는 Tukey (1953), 비모수적 검정법으로는 Kruskal-Wallis (1952)의 검정에 기초한 방법이 있다. 이 방법은 전체 자료에 대한 혼합표본에 순위를 부여한 후 세 개 이상의 각 처리별 평균 순위를 이용한 검정방법이다. 본 논문에서는 Chung과 Kim (2007)이 제안한 결합위치 검정법을 확장하여 일원배치모형에서 새로운 비모수적 다중비교 방법을 제안하였다. 또한 모의실험(Monte Carlo simulation)을 통해 기존의 검정방법들과 제안한 방법의 family wise error rate (FWE)와 검정력을 비교하였다.

주요용어: 다중비교, 결합위치, 일원배치모형

[1]교신저자: (06591) 서울 서초구 반포대로 222, 가톨릭대학교 의생명·건강과학과. E-mail: djkim@catholic.ac.kr