한국항행학회논문지
Journal of Advanced Navigation Technology

항공 통신 기술
J. Adv. Navig. Technol. 21(6): 608-613, Dec. 2017

시변 지연시간을 갖는 이산 구간 시변 시스템의 시변 불확실성의 안정범위

Stability Bound for Time-Varying Uncertainty of Time-varying Discrete Interval System with Time-varying Delay Time

한 형 석
가천대학교 전자공학과

Hyung-seok Han
Department of Electronic Engineering, Gachon University, Gyeonggi-do, 13120, Korea

[요 약]

본 논문에서는 시변 지연시간이 있는 선형 이산 구간 시변 시스템의 지연 상태변수에 존재하는 불확실성 안정범위에 관한 것을 다룬다. 고려된 시스템은 지연 없는 상태변수에 대한 시스템 행렬이 구간범위에서 시변으로 변동하고, 지연 시간이 구간범위 내에서 시변인 지연 상태변수에 대하여 비구조화된 불확실성이 시변으로 존재하는 시스템이다. 기존의 많은 연구들이 시변에 대한 부분을 고려하지 못하고 시불변 경우에 대하여 얻어진 것에 반하여, 본 논문에서는 모든 요소를 시변으로 고려하여 새로운 안정범위를 도출하였다. 새로운 안정범위는 적용 가능한 시스템에 대한 제한이 없는 것으로 그 효용성이 기존의 결과 보다 우수하다. 제안된 범위는 복잡한 선형행렬부등식 혹은 리아프노프 방정식의 상한 해 한계를 이용하는 복잡한 과정이 필요하지 않다. 수치예제를 통하여 제안된 결과가 기존의 결과들을 포함할 수 있음을 보이고, 이들 보다 확장성과 효용성이 우수함을 확인한다.

[Abstract]

In this paper, we consider the stability bound for uncertainty of delayed state variables in the linear discrete interval time-varying systems with time-varying delay time. The considered system has an interval time-varying system matrix for non-delayed states and is perturbed by the unstructured time-varying uncertainty in delayed states with time-varying delay time within fixed interval. Compared to the previous results which are derived for time-invariant cases and can not be extended to time-varying cases, the new stability bound in this paper is applicable to time-varying systems in which every factors are considered as time-varying variables. The proposed result has no limitation in applicable systems and is very powerful in the aspects of feasibility compared to the previous. Furthermore. the new bound needs no complex numerical algorithms such as LMI(Linear Matrix Inequality) equation or upper solution bound of Lyapunov equation. By numerical examples, it is shown that the proposed bound is able to include the many existing results in the previous literatures and has better performances in the aspects of expandability and effectiveness.

Key word : Stability bound, Discrete interval time-varying system, Time-varying delay time, Sufficient condition, Stability.

https://doi.org/10.12673/jant.2017.21.6.608

Received 29 October 2017; **Revised** 6 November 2017
Accepted (Publication) 29 November 2017 (30 December 2017)

***Corresponding Author; Hyung-seok Han**

Tel: +82-31-750-5561
E-mail: hshan@gachon.ac.kr

Ⅰ. 서 론

지연된 상태변수를 갖는 이산시스템에 대한 연구는 다양한 측면에서 진행되어 왔다[1],[2]. 특히, 안정성에 대한 연구는 대상 시스템이 시변/시불변, 지연 시간의 특성이 시변/시불변으로 구분될 수 있으며, 불확실성에 대한 연구도 시변/시불변으로 구분되어 진행되어 왔다[3]-[8]. 기존 연구들에서는 대부분 상태변수와 지연 상태변수에 대한 시스템 행렬들을 시불변으로 고려하고 지연 시간은 일정 구간 내에서 시변인 형태의 시스템에 대하여 안정 조건이 다루어졌다[3],[4]. 또한, 제안된 안정 조건들도 리아프노프 함수를 이용한 선형부등식 형태로 제시되었으며 복잡한 연산을 필요로 한다. 선행 연구에서 고려된 이산시스템 중 가장 포괄적으로 표현된 시스템은 모든 시스템 요소가 시변으로 고려되는 것으로, 이에 대한 결과는 최근에 발표된 바 있다[7],[8]. [7]에서는 시스템 행렬들이 시변으로 일정 구간에서 변동하는 시스템을 고려하였으나, 불확실성의 측면에서는 구조화된 불확실성의 경우에만 적용 가능한 결과이며, 구조화되지 않은 불확실성에 대하여 직접 적용할 수 없는 것이다. 비구조화된 불확실성에 대한 결과로는 시변 시스템 행렬에 시변 지연시간을 갖는 경우에 대하여 특별한 시스템인 양의 시스템에만 적용가능한 조건을 제시한 결과[5],[8]가 있다. 양의 구간 시스템 행렬에 대하여 고려한 [5]와[8]에서는 효과적인 리아프노프 함수를 이용하여 리아프노프 방정식의 상한 해 한계(upper solution bound)를 이용하는 복잡한 과정을 통하여 안정조건을 유도하였다.

본 논문에서는 [7]에서와 같이 시스템 행렬들이 시변으로 일정 구간에서 변동하는 시스템에 대하여 시변 지연시간이 있는 지연 상태변수에 대한 비구조화된 시변 불확실성의 안정 크기를 제안한다. 제안된 결과는 이전의 결과 [3],[4]에서 다루지 못한 시변 시스템에 대하여, [5],[8]에서의 양의 시스템을 일반 시스템으로 확장하여, [7]의 결과에서 다루지 못한 비구조화된 불확실성의 안정범위를, [3]-[9]보다 더욱 간단한 유도과정을 통하여 새롭게 제시한다. 제시된 조건은 기존 결과들을 모두 포함하는 보다 일반적인 조건으로 기존과 같은 리아프노프 함수를 이용하여 지연시간 독립 (delay-independent)의 형태로 표현되며, 기존의 안정조건[7]과[8]에서와 같은 매우 간단한 수식이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 기존 결과를 요약하고 3장에서는 새로운 안정조건을 리아프노프 이론을 이용하여 제시하고, 4장에서는 기존 수치 예제에 대하여 새로운 조건을 적용하고 그 결과를 제시한다.

Ⅱ. 양의 시변 시스템 안정 조건

본 장에서는 논문의 주요 결과에 사용된 행렬에 관한 중요한 기초 이론을 정리한다. 본 논문에서 사용하는 기호로는 Z_+ 는 음이 아닌 정수 집합, $R^{n\times m}$는 실수 행렬 요소를 갖는 $n\times m$ 행렬, $R_+^{n\times m}$는 음이 아닌 값으로 행렬 요소를 갖는 $n\times m$ 행렬이며, $R_+^n = R_+^{n\times 1}$, $\|X\|$는 행렬 X의 스펙트랄 노옴(spectral norm), ($\|X\|: X^TX$행렬의 최대 고유치의 제곱근)을 의미하며, $X>0$는 대칭행렬 X가 양의 정칙(positive definite), $A=[a_{ij}]$는 행렬 요소 값 a_{ij} 로 구성된 행렬. $|A|=[|a_{ij}|], A \le_e B$는 행렬 요소별 부등식을 나타내며, $\lambda_{\max}(X)$는 행렬 X의 최대 고유치, $\rho(X)$ 는 $max|\lambda_i(X)|$,즉, 스펙트랄 반경(spectral radius), I_n는 $n\times n$ 차원의 단위행렬(identity matrix)을 의미한다. 벡터 $x\in R_+^n$ 중 모든 행렬요소가 양의 값을 갖는 경우에는, 완전 양(strictly positive)벡터라 정의하며 $x>0$으로 표시한다.

다음의 이산 시스템을 고려한다.

$$x(k+1) = A(\bullet)x(k) + E(\bullet)x(k-d(\bullet)) \tag{1}$$

여기서 $A(\bullet), E(\bullet), d(\bullet)$의 시간에 따른 특성에 따라 다수의 결과가 발표되었다[8]-[11]. 모두가 시불변인 경우는 [10]에서 E 행렬의 안정범위를 제안하였다. $E(\bullet)$만을 시변으로 고려한 경우인 [11]에서는 시변 불확실성의 크기를 제안하였다. $d(\bullet), E(\bullet)$의 두 개의 항을 시변으로 고려한 경우가 최근에 발표[9]된 바 있다. 기존의 결과[8]에서는 다음과 같은 양의 시스템에 대하여 모든 요소를 시변으로 고려한 시스템에 대하여 안정범위를 유도하였다.

$$x(k+1) = A(k)x(k) + E(k)x(k-d(k)) \tag{2}$$

여기서, $A(k)$는 시변 시스템 행렬, $E(k)$는 지연 상태변수에 대한 불확실한 섭동 행렬(perturbation matrix)이며 다음과 같은 양의 성질을 갖는다..

즉, $A(k), E(k) \in R_+^{n\times n}, x(k)\in R_+^n, \forall k \in Z_+$이고, 모든 $x(-k)\in R_+^n,\ k=0,1,....,d_M$ 이다. 또한,

$$\begin{aligned} & A(k)\in [A^-, A^+] \subset R_+^{n\times n} \\ & 0 \le_e A^- \le_e A(k) \le_e A^+, (0 \le a_{ij}^- \le a_{ij}(k) \le a_{ij}^+)\ \forall k,i,j \\ & \|E(k)\| \le \mu \\ & d(k) \in [d_m, d_M] \subset Z_+, (0 \le d_m \le d(k) \le d_M)\ \forall k \end{aligned} \tag{3}$$

이다. 여기서 A^+ 행렬은 시변 시스템 행렬의 상한행렬이다.

기존 결과 1[8]: 식 (2), (3)를 만족하는 양의 구간 시변 이산시스템은 시스템 상한 행렬 A^+이 점근안정하고, 즉

$$\rho(A^+) < 1 \tag{4}$$

하고, 다음의 조건을 만족하면

$$(\|A^{+}\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\ \mu) \times (\frac{(A^{+})^T A^{+}}{\|A^{+}\|} + \sqrt{1+d_M-d_m}\,\mu I_n) < I_n \quad (5)$$

점근안정하다.

기존 결과 2[8]: 식 (2), (3)를 만족하는 양의 구간 시변 이산시스템은 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$\|A^{+}\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\ \mu < 1 \quad (6)$$

위의 부등식은 선형부등식이나 복잡한 최적화 알고리즘 등이 필요 없는 간단하고 효과적인 수식이나, 식(3)에서와 같이 양의 시스템으로 제한된 경우에 적용되는 결과로 양의 시스템이 아닌 일반적인 구간 시변 시스템에는 적용될 수 없다.

본 논문에서는 다음과 같은 잘 알려진 정리를 사용한다.

보조정리 1 ([7],[8]) :임의의 벡터 x, y와 양의 상수 ϵ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$2x^T y \le \epsilon^{-1} x^T x + \epsilon y^T y \quad (7)$$

보조정리 2 ([12]) : $|X| \le_e Y$ 를 만족하는 정방행렬 X, Y 에 대하여 다음의 관계식이 성립한다.

a) $\rho(X) \le \|X\|$
b) $\rho(X) \le \rho(|X|) \le \rho(Y)$
c) $\|X\| \le \||X|\| \le \|Y\|$

Ⅲ. 일반 시변 시스템의 새로운 안정 범위

본 논문에서는 양의 시스템이 아닌 일반적인 경우에 대하여 구간 시변 시스템 행렬과 시변 지연시간을 갖는 시변 구간 시스템에 대하여 비구조화된 불확실성의 안정 조건을 유도한다. 이를 위하여 다음과 같은 가장 포괄적인 구간 시변 이산 시스템을 고려한다. 이는 식 (1)에서의 $A(\bullet), E(\bullet), d(\bullet)$를 모두 시변으로 고려한 것으로 기존 결과로 제시된 바 없으며, 기존 결과 [8]의 대상 시스템을 양의 시스템 조건을 제거하고 일반적인 시스템으로 확장한 것이다.

$$x(k+1) = A(k)x(k) + E(k)x(k-d(k)) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &A(k) \in [A^{-}, A^{+}] \subset R^{n\times n} \\ &A^{-} \le_e A^{-} \le_e A^{+} (a_{ij}^{-} \le a_{ij} \le a_{ij}^{+})\ \forall i,j \\ &\|E(k)\| < \mu \\ &0 \le d_m \le d(k) \le d_M\ \forall k \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, 시스템 행렬인 $A(k)$ 도 시변으로 고려하고 식(3)의 양의 값을 갖는 조건 $0 \le_e A^{-}$ 이 제거된 것이다. 따라서, 오직 양의 시스템 행렬에 대하여서만 적용 가능한 기존 결과[8]를 포함할 수 있다. [6]과 같이 다음의 행렬을 정의한다.

$$F = [f_{ij}],\ f_{ij} = \max(|a_{ij}^{-}|, |a_{ij}^{+}|)\ \forall i,j \quad (10)$$

리아프노프 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} V(x(k)) &= x^T(k)x(k) + \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &+ \sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1} \sum_{i=k+j-1}^{k-1} x^T(i)Rx(i) = V_1 + V_2 + V_3 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, 대칭행렬 R은 양의 정칙행렬로 $R > 0$.

보조정리 3: 식(8)의 시스템은 식(11)에 정의된 리아프노프 함수와 $\epsilon > 0, d_M - d_m \ge 0$, 식(10)에 정의된 행렬에 대하여, 다음의 관계식을 만족한다.

$$\begin{aligned} &V(x(k+1)) - V(x(k)) = \triangle V_1 + \triangle V_2 + \triangle V_3 \\ &\le x^T(k)(\|F\|^2 I_n - I_n + (1+d_M-d_m)R)x(k) \\ &\quad + x^T(k-d(k))(\mu^2 I_n - R)x(k-d(k)) \\ &\quad + 2x^T(k-d(k))E^T(k)A(k)x(k) \\ &\le x^T(k)(\|F\|^2 I_n - I_n + (1+d_M-d_m)R + \epsilon^{-1}\|F\|^2 I_n)x(k) \\ &\quad + x^T(k-d(k))((1+\epsilon)\mu^2 I_n - R)x(k-d(k)) \end{aligned} \quad (12)$$

증명: $V(x(k+1)) - V(x(k)) = \triangle V_1 + \triangle V_2 + \triangle V_3$

$$\begin{aligned} &x_d(k) \equiv x(k-d(k)) \\ &\triangle V_1 = x^T(k+1)x(k+1) - x^T(k)x(k) \\ &= x^T(k)(A^T(k)A(k) - I_n)x(k) \\ &\quad + 2x_d^T(k)E^T(k)A(k)x(k) \\ &\quad + x_d^T(k)E^T(k)E(k)x_d(k) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \triangle V_2 &= \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k} x^T(i)Rx(i) - \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &= x^T(k)Rx(k) - x_d^T(k)Rx_d(k) + \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &\quad - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \end{aligned} \quad (14)$$

[13]에서와 같이 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &\le (\sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) + \sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i)) \\ &\quad - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) = \sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i) \end{aligned} \quad (15)$$

$$
\begin{aligned}
\triangle V_3 &= \sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1} (x^T(k)Rx(k) - x^T(k+j-1)Rx(k+j-1)) \\
&= (-d_m+1-(-d_M+2)+1)x^T(k)Rx(k) \\
&\quad -(x^T(k-d_M+2-1)Rx(k-d_M+2-1) - \ldots \qquad (16) \\
&\quad - x^T(k-d_m+1-1)Rx(k-d_m+1-1)) \\
&= (d_M-d_m)x^T(k)Rx(k) - \sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i)
\end{aligned}
$$

그러므로, 보조정리 1,2와 잘 알려진 대칭행렬의 성질 $A^T(k)A(k) \le \|A(k)\|^2 I_n \le \|F\|^2 I_n$, $E^T(k)E(k) \le \|E(k)\|^2 I_n \le \mu^2 I_n$ 을 이용하면 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
& V(x(k+1)) - V(x(k)) = \triangle V_1 + \triangle V_2 + \triangle V_3 \\
& \le x^T(k)(A^T(k)A(k) - I_n)x(k) \\
& \quad + 2x_d^T(k)E^T(k)A(k)x(k) \\
& \quad + x_d^T(k)E^T(k)E(k)x_d(k) \\
& \quad + x^T(k)Rx(k) - x_d^T(k)Rx_d(k) + (d_M-d_m)x^T(k)Rx(k) \\
& = x^T(k)(A^T(k)A(k) - I_n + (1+d_M-d_m)R)x(k) \\
& \quad + x^T(k-d(k))(E^T(k)E(k) - R)x(k-d(k)) \qquad (17) \\
& \quad + 2x^T(k-d(k))E^T(k)A(k)x(k) \\
& \le x^T(k)(\|F\|^2 I_n - I_n + (1+d_M-d_m)R)x(k) \\
& \quad + x^T(k-d(k))(\mu^2 I_n - R)x(k-d(k)) \\
& \quad + 2x^T(k-d(k))E^T(k)A(k)x(k) \\
& \le x^T(k)(\|F\|^2 I_n - I_n + (1+d_M-d_m)R + \epsilon^{-1}\|F\|^2 I_n)x(k) \\
& \quad + x^T(k-d(k))((1+\epsilon)\mu^2 I_n - R)x(k-d(k))
\end{aligned}
$$

위의 보조정리3을 이용하면 다음과 같은 안정조건을 얻을 수 있다.

정리 1: 주어진 $\epsilon > 0, d_M - d_m \ge 0$에 대하여 다음을 만족하고

$$
-R = \frac{(1+\epsilon^{-1})\|F\|^2 - 1}{1+d_M-d_m} I_n < 0 \qquad (18)
$$

다음의 부등식을 만족하면 식 (8),(9)의 시스템은 안정하다.

$$
\|F\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\,\mu < 1 \qquad (19)
$$

증명 : 식 (18)과 같이 행렬 R을 선택하여 대입하면 다음이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
& V(x(k+1)) - V(x(k)) = \triangle V_1 + \triangle V_2 + \triangle V_3 \qquad (20) \\
& \le x^T(k)(\|F\|^2 I_n - I_n + (1+d_M-d_m)R + \epsilon^{-1}\|F\|^2 I_n)x(k) \\
& \quad + x^T(k-d(k))((1+\epsilon)\mu^2 I_n - R)x(k-d(k)) \\
& = x^T(k-d(k))((1+\epsilon)\mu^2 I_n - R)x(k-d(k))
\end{aligned}
$$

따라서 $(1+\epsilon)\mu^2 + (1+d_M-d_m)^{-1}((1+\epsilon^{-1})\|F\|^2 - 1) < 0$이 되면 $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$ 이 됨을 알 수 있다. 이를 보이기 위하여,

$$
\epsilon = \frac{\|F\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}\,\mu} > 0
$$

로 하면, 다음의 부등식이 성립함을 보이면 된다.

$$
\begin{aligned}
& (1 + \frac{\|F\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}\,\mu})(1+d_M-d_m)\mu^2 \qquad (21) \\
& \quad + (1 + \frac{\sqrt{1+d_M-d_m}\,\mu}{\|F\|})\|F\|^2 - 1 < 0
\end{aligned}
$$

이를 위하여 함수 $f(\bullet)$를 다음과 같이 정의하여 위의 부등식을 만족하는 조건을 구한다.

$$
\begin{aligned}
f(\mu) &= (1+d_M-d_m)\mu^2 \qquad (22) \\
&\quad + 2\sqrt{1+d_M-d_m}\,\|F\|\mu + \|F\|^2 - 1 < 0
\end{aligned}
$$

μ에 대한 2차 방정식 $f(\mu) = 0$ 의 해를 이용하면 $f(\mu) < 0$ 는 다음의 조건을 만족하면 성립한다.

$$
\begin{aligned}
& \mu_1, \mu_2 = \frac{-\sqrt{1+d_M-d_m}\,\|F\| \pm \sqrt{1+d_M-d_m}}{1+d_M-d_m} \\
& 0 < \mu < \frac{1-\|F\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}} \qquad (23) \\
& \|F\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\,|\mu < 1
\end{aligned}
$$

정리 1은 두 개의 부등식 조건으로 안정 조건이 표현되므로 이를 하나의 조건으로 표현하면 다음과 같다.

정리 2 : 다음의 부등식을 만족하면 시스템 (8),(9)은 안정하다.

$$
0 < \mu < \frac{1-\|F\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}} \qquad (24)
$$

증명 : 위의 조건을 만족하면 $0 < \mu$ 이므로 $\|F\| - 1 < 0$은 당연하다.

$$
\begin{aligned}
& \|F\| - 1 < 0 \qquad (25) \\
& \Leftrightarrow (\frac{1}{\|F\|})\|F\|^2 - 1 < 0 \\
& \Rightarrow (\frac{\|F\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\,\mu}{\|F\|})\|F\|^2 - 1 < 0 \\
& \Leftrightarrow (1+\epsilon^{-1})\|F\|^2 - 1 < 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{(1+\epsilon^{-1})\|F\|^2 - 1}{1+d_M-d_m} I_n = -R < 0
\end{aligned}
$$

따라서 식(24)의 조건을 만족하면 식(18)의 조건도 만족하게 된다.

위의 정리2의 조건은 이산 시스템에서 가장 복잡하게 표현

된 시스템에 대하여 불확실성의 안정 범위를 매우 간결하고 함축적으로 제시한 조건이다. 식(24)와 같이 간단한 수식으로 제시되는 안정 범위는 시불변 시스템에 대하여 주로 제시되었고 [9]-[11], 시간 지연에 대한 조건도 매우 제한적으로 적용 가능한 것이다, 또한, 대부분의 기존 결과는 리아프노프 방정식의 해를 이용하거나 선형부등식의 해를 이용하는 복잡한 과정을 수행하여야 하나, 제안된 결과는 이러한 과정이 필요하지 않다. 위의 결과는 $d_m = d_M$로 고려하면 시불변 지연시간에 대하여 적용이 가능하고, 시스템 행렬이 시변/시불변, 고정/구간 행렬의 형태에 관계없이 다양한 시스템에 적용 가능한 결과이다. 또한, [8]에서와 같은 양의 시스템에만 적용되는 것이 아니라 일반적인 시변 시스템 전체에 적용 가능한 것으로, 가장 포괄적인 안정조건이다.

다음 장에서는 제안된 안정조건을 기존의 예제에 적용하여 얻은 결과를 설명한다.

Ⅳ. 새로운 조건의 수치 예제 적용

예제 1[8]: 다음과 같이 표현되는 양의 이산 시스템을 고려한다.

$$x(k+1) = A_0 x(k) + \gamma(k) A_1 x(k-d(k))$$
$$A_0 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

이 시스템은 지연 없는 상태변수에 대한 시스템 행렬A_0가 고정된 값을 갖는 시스템으로 지연 상태변수에 부가되는 불확실성 $\gamma(k)$가 시스템 행렬 A_1 으로 구조화된 경우를 고려한 것

표 1. 불확실성의 안정범위 비교
Table 1. Comparison of stability bound of uncertainty.

	previous		proposed
A	[10]	1.47	1.06
	[10]	1.01	
	[10]	1.06	
	[8]	1.07	
B	[11]	0.68	1.06
	[9]	1.10	
	[8]	1.07	
C	[9, Thm.1]	0.45	0.61
	[9, Thm.2]	0.45	
	[9, Thm.3]	0.64	
	[9, Thm.4]	0.26	
	[9, Thm.5]	0.26	
	[8]	0.63	

A: time-invariant uncertainty, time-invariant delay time
B: time varying uncertainty, time-invariant delay time
C: time varying uncertainty, time varying delay time ($d_M - d_m = 2$)

표 2. 적용가능한 경우 비교.
Table 2. Comparison of applicable cases.

	[9]	[10]	[11]	[8]	previous
general time varying system	X	X	X	X	O
time varying uncertainty	O	X	O	O	O
time varying delay time	O	X	X	O	O

O (X): possible (impossible)

이다. 제안된 조건은 가장 광범위하게 적용될 수 있는 조건이므로, 이러한 시불변 시스템에 대하여도 적용 가능하다. 표 1은 시변으로 고려될 수 있는 요소인 $\gamma(k), d(k)$ 의 형태에 따라 적용한 결과를 비교한 것이다. 표 1에서 기존 [9],[10],[11]의 결과들이 복잡한 선형행렬부등식을 통하여 얻어지는 결과임에 비교하여 제안된 방법이 간단한 계산으로 우수한 결과를 보여줌을 알 수 있다. 표 1의 A의 경우에 일부 제안된 결과가 기존 것에 미흡한 것은 제안된 결과가 시변인 구간 시스템 행렬까지도 적용될 수 있는 조건임을 고려하면 받아들일 수 있다. 적용 가능한 시스템의 범위를 비교한 결과가 표 2에 제시되었다. 표 2에서 새로 제안된 결과는 그 적용범위에 있어 이전의 결과들 보다 탁월함을 알 수 있다.

예제 2[7]: 다음과 같이 일반적인 시변 시스템을 고려한다.

$$A^- = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 0 & -a \\ 0 & -0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & a \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

위의 시스템은 시스템 행렬 요소가 양과 음의 값을 모두 갖을 수 있는 일반적인 구간 행렬이다. 시스템 행렬 $A(k)$ 값이 구간 하한, 상한 행렬 A^-, A^+ 의 범위에서 시변으로 임의로 변하는 시변시스템으로 고려한 경우로 $a = 0.21$ 에 대하여 고려한다. 식(10)에 정의된 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.21 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$d_M - d_m = 2$, 즉, 간격이 2인 시변지연시간을 갖는 경우에 대하여 안정범위 $\mu < (1 - \|F\|)/\sqrt{1+2} = 0.4099$ 로 계산된다. 만약 불확실성이 다음과 같이 $b = 0.33$으로 구간 행렬로 구조화 된 경우로 고려하면

$$B^- = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & -b \end{bmatrix}, \quad B^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & b \end{bmatrix}$$

최대 불확실성의 크기는 $\|B^+\| = 0.4025$ 가 되어 위에서 구한 안정범위 보다 작음을 알 수 있다. 따라서 구조화된 불확실성에

대하여 안정함을 알 수 있으며 이는 [7]에서의 결과와 같음을 알 수 있다.

Ⅴ. 결 론

본 논문에서는 지연 이산시스템에서 지연이 없는 상태변수에 대한 시스템 행렬이 구간 범위에서 시변으로 표현되고, 지연 상태 변수에 대하여 비구조화된 시변 불확실성이 존재하는 시스템의 불확실성 안정 범위를 제안하였다. 제안된 결과는 기존에 발표된 여러 결과를 포함할 수 있는 수식으로 복잡한 방정식이나 수치 해석이 필요 없는 매우 간단한 것이다. 본 논문에서 제안된 안정조건은 기존의 수치예제를 통하여 확장성과 효용성을 확인하였다.

References

[1] D. L. Debeljković, and S. Stojanović, “The stability of linear discrete time delay systems in the sense of Lyapunov: an overview,” *Scientific Technical Review,* Vol. 60, No. 3, pp. 67-81, Mar. 2010.

[2] P. G. Park, W. I. Lee, and S. Y. Lee, “Stability on time delay systems: A survey,” *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, Vol. 20, No. 3, pp.289-297, Mar. 2014.

[3] L. V. Hien, and H. Trinh, “New finite-sum inequalities with applications to stability of discrete time-delay systems,” Automatica, Vol. 71, pp.197-201, Sep. 2016.

[4] M. N. A. Parlakci, “Robust stability of linear uncertain discrete-time systems with interval time-varying delay,” *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences,* Vol. 22, No. 3, pp. 650- 662, Apr. 2014.

[5] H. S. Han, “New stability conditions for positive time-varying discrete interval system with interval time-varying delay time,” *Journal of Korea Navigation Institute,* Vol. 18, No. 5, pp. 501-507, Oct. 2014.

[6] H. S. Han, “Stability condition for discrete interval system with time-varying delay time,” *Journal of Korea Navigation Institute,* Vol. 19, No. 6, pp. 574-580, Dec. 2015.

[7] H. S. Han, “Stability condition for discrete interval time-varying system with time-varying delay time,” *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 20, No. 5, pp. 475-481, Oct. 2016.

[8] H. S. Han, “Stability bound for time-varying uncertainty of positive time-varying discrete systems with time-varying delay time,” *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems,* Vol. 22, No. 6, pp. 424-428, Jun. 2016.

[9] H. S. Han, “Stability bounds of time-varying uncertainty and delay time for discrete systems with time-varying delayed state,” *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems,* Vol. 18, No. 10, pp. 895-901, Oct. 2012.

[10] S. B. Stojanovic and D. L, J. Debeljkovic, “Further results on asymptotic stability of linear discrete time delay autonomous systems,” *International Journal of Information and Systems Sciences,* Vol. 2, No. 1, pp. 117-123, Jan. 2006.

[11] H. S. Han and D. H. Lee, “Stability bounds of delayed-time varying perturbations of discrete systems,” *Journal of Control, Automation, and Systems,* Vol. 13, No. 2, pp. 147-153, Feb. 2007.

[12] R. A. Hornand, and C. R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge, UK: Cambridge University Press, pp. 491, 1985.

[13] S. B. Stojanovic and D. Debeljkovic, “Delay-dependent stability analysis for discrete-time systems with time varying state delay,” *Chemical Industry & Chemical Engineering Quaterly,* Vol. 17, No. 4, pp. 497-503, Apr. 2011.

한 형 석 (Hyung-Seok Han)

1986년 2월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학사)
1993년 8월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학박사)
1993년 9월 ~ 1997년 8월: 순천향대학교 제어계측공학과 조교수
1997년 9월 ~ 현재 : 가천대학교 전자공학과 교수
※관심분야 : 유도제어, 견실제어, 센서 응용 시스템