

## 論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 45(12), 1021-1030(2017)

DOI:https://doi.org/10.5139/JKSAS.2017.45.12.1021

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

## 유한요소 열해석의 3차원 불일치격자경계면의 절점 접촉열교환계수 계산 연구

김민기\*

### Study of Computing Nodal Thermal Contact Conductance between 3 Dimensional Unmatched Grid Interfaces for Finite Element Thermal Analysis

Min Ki Kim\*

Korea Aerospace Research Institute\*

#### ABSTRACT

This paper describes the algorithm of computing thermal contact conductance between unmatched grid interfaces for finite element thermal analysis. Because grid interfaces should be coincident with adjacent meshes for finite element method, large amount of man hours and huge computations are required to match interfaces between many numbers of complex subdomains. A novel method that distributes feasibly the conductances to interface nodes is proposed. The aims of the method are described, and details of the nodal conductance distribution algorithm with less dependency on meshes are represented. The algorithm can be applied both the flat and curved interfaces in 3 dimensional space, and proposed method can combined with many finite element application including thermal analysis.

#### 초 록

본 논문은 유한요소 열해석 시 불일치하는 격자 접촉면의 열교환계수를 효과적으로 계산하는 방법에 대해 논의한다. 원래 유한요소해석은 두 경계면 사이의 격자가 일치해야 하는데, 복잡하고 다양한 재질의 형상들의 접촉면을 모두 일치하기 위해서는 많은 수고와 계산량이 소요된다. 본문은 이를 극복하기 위해 서로 다른 두 격자면의 접촉 열교환계수를 각 절점으로 효과적으로 분배하는 새로운 기법을 제안하였다. 제시된 기법의 지향점을 서술하고 이를 위해 격자면의 형상에 의존성이 낮은 절점 가중치 분배 기법을 서술하였다. 그리고 이를 3차원의 곡면 접촉면에도 적용하여 제시한 방법론의 범용성을 확인함으로써 열해석을 포함한 여타 유한요소 해석 기법에도 적용 가능함을 알 수 있다.

**Key Words** : Thermal Contact Conductance(접촉 열교환계수), Unmatched Grid Interface (불일치 격자 경계), Finite Element Thermal Analysis(유한요소 열해석), Polygon Vertex Weight Distribution(다각형 꼭지점 가중치 분배), Shape Function(형상 함수)

† Received : June 21, 2017    Revised : September 18, 2017    Accepted : November 4, 2017

\* Corresponding author, E-mail : mkkim12@kari.re.kr

## I. 서 론

유한요소 해석 기법은 본래 구조물의 정적 거동 및 안정성을 해석하기 위해 고안된 기법으로서 2차의 편미분방정식으로 표현되는 구조해석 분야를 포함한 다양한 분야에서 널리 사용되는 방법이다. 진도, 대류, 복사를 포함한 열전달방정식에도 유한요소 해석 기법이 적용될 수 있으며 한국항공우주연구원에서 개발한 극한의 우주환경하의 인공위성의 구조해석 및 열해석 등의 각종 해석 모듈들을 탑재한 위성종합설계 SW[1,2]에도 유한요소 해석 기법을 채택하고 있다.

일반적으로 열해석을 포함한 유한요소 해석 기법은 각 부영역(Subdomain) 사이의 경계면의 격자가 일치해야 한다는 제약조건이 따라붙는다. 이러한 조건은 격자계 모델링 및 격자 생성 시는 물론이고 해석 시에도 지나치게 많은 미지수를 생성하여 많은 계산량이 소요된다. 이러한 문제점은 복사 열전달이 포함될 경우 더욱 두드러지는데 이는 복사 열전달항이 전도나 대류와 달리 이론상으로는 표면 요소에서 바라볼 수 있는 모든 여타 표면과의 사이에 발생하는 복사 열전달을 표현하는 열교환 항이 미지수가 많아질수록 그 개수의 제공에 비례하여 거대해지기 때문이다. 따라서 복잡한 다수의 경계면을 일치하면서 생성되는 지나치게 많은 미지수 생성의 가능성은 열해석의 계산 복잡도를 지나치게 증가시키게 되며 이는 전후처리의 어려움과 더불어 실제 현상의 적용에도 많은 어려움을 야기한다. 따라서 이를 경감하기 위해 각각 독립적으로 생성되어 서로 일치하지 않는 부영역 간 경계면을 그 자체로 포용할 수 있는 새로운 접근 방식이 필요하다.

그리고 각 부영역 사이에는 통상적으로 접촉열저항이 발생하는데 이를 물리적으로 타당하게 설명할 수 있는 효과적인 접촉 열교환계수(Contact Conductance) 계산 기법이 필요하다. 여기서 언급하는 물리적 타당성이라고 함은 접촉면의 수직방향으로만 열교환이 발생하며, 면내 방향의 열교환이 발생하지 않도록 하고, 총 열전달량을 보존해야 한다. 추가적으로 부영역 경계의 격자 형상에 적게 의존적이며, 부영역의 순서에 관계없이 접촉 열교환계수를 산출할 수 있어야 한다. 본문에 이에 대한 자세한 내용을 서술하기로 한다.

상기와 같은 이유로 본 논문은 각각 독립적으로 생성된, 서로 일치하지 않는 부영역 간 경계면을 갖는 유한요소 격자계에서 전술한 물리적으로 합당한 성질을 지니면서 해당 격자의 형상과 연관성이 적도록 절점 간 접촉 열교환계수를 생

성하는 새로운 방법을 제안하였다. 참고문헌[3]에 제시된 방법의 문제점을 완화하는 새로운 방법을 소개하고 이를 접촉면이 3차원 곡면일 때도 적용할 수 있도록 알고리즘을 확장하였다. 본문에서 제시된 방법은 유한요소 열해석을 위해 고안되었으나 구조해석의 집합 요소의 강성 계산에도 확장할 수 있으며, 본문에서 후술할 내용 중 접촉 다각형 추출 방식은 유한체적법 기반 열해석에도 응용할 수 있다.

## II. 본 론

### 2.1 연구 동기

유한요소법의 기본적인 이산화 방식인 Galerkin 법은 공간 편미분 항의 이산화에서 수학적으로 강력하고 직관적인 이해를 주며 실제 수치적으로도 널리 활용되고 있는 방식이다. 다만 열전달방정식의 대류 및 접촉 열전달항과 같이 서로 다른 두 영역 사이의 열교환이 있을 경우 해당 항을 이산화할 때 같은 요소 내 열전달이 발생하게 된다. 이는 실제 물리 현상과 일치하지 않기에 수치적으로 불안정한 해를 산출할 수 있다. 이를 설명하기 위해 가장 단순한 경우인 두 요소가 서로 기하학적으로 일치하는 경우를 살펴보기로 한다.

두 요소 1과 2의 접촉 열전달계수(Contact Heat Transfer Coefficient)를  $h$ 로, 온도를  $T_1, T_2$ 로, 1번 요소에서 2번 요소의 열유량(Heat Flux)를  $q_{12}$ 라고 하면 2번 요소에서 1번 요소로 통하는 열유량  $q_{21}$ 은 에너지 보존 법칙에 의해  $-q_{12}$ 와 같으므로 식 (1), (2)와 같이 서술할 수 있다.

$$q_{12} = h(T_1 - T_2) \quad (1)$$

$$q_{21} = -q_{12} = h(-T_1 + T_2) \quad (2)$$

두 요소의 온도  $T_1, T_2$ 를 각각 Galerkin법으로 이산화하면 다음 식 (3), (4)와 같다.

$$T_1 = \sum_j \phi_j T_j \quad (3)$$

$$T_2 = \sum_j \Phi_j T_j \quad (4)$$

식 (1), (2)에 각각 적용할 시험함수(Test Function)  $\delta T_1, \delta T_2$ 를 도입하고 식 (3), (4)에 사용된 각 요소의 온도를 표현하는 형상함수를 동일하게 시험함수에도 적용하면 다음과 같다.

$$\delta T_1 = \sum_i \phi_i \delta T_i \quad (5)$$

$$\delta T_2 = \sum_I \Phi_I \delta T_I \quad (6)$$

시험함수  $\delta T_1, \delta T_2$ 를 식 (1), (2)에 각각 곱하여 적분하고 식 (3)~(6)을 대입하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\delta Q_{12} = \sum_i \delta T_i \int_A h \phi_i (\sum_j \phi_j T_j - \sum_J \Phi_J T_J) dA \quad (7)$$

$$\delta Q_{21} = \sum_I \delta T_I \int_A h \Phi_I (-\sum_j \phi_j T_j + \sum_J \Phi_J T_J) dA \quad (8)$$

식 (7), (8)은 임의의 시험함수에 모두 성립해야 하므로 시험함수의 이산화변수  $\delta T_i, \delta T_I$ 를 제거하여 정리하면 Galerkin방법의 접촉 열교환 강성행렬을 얻을 수 있다.

$$[K][T] = \int_A h \begin{bmatrix} \phi_i \phi_j & -\phi_i \Phi_J \\ -\Phi_I \phi_j & \Phi_I \Phi_J \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} T_j \\ T_J \end{bmatrix} \quad (9)$$

위 식을 보면  $\phi_i \phi_j, \Phi_I \Phi_J$ 와 같은 항들에서 같은 요소 내부의 절점 사이에도 열교환이 일어날 수 있음을 알 수 있다. Galerkin방법은 수학적으로 일관성 있는 이산화 방식을 제공하지만 이 경우에는 물리적으로 타당하지 않은 결과를 가져올 수 있으며, 이와 유사한 현상은 요소 복사열교환 행렬을 절점 열교환행렬로 변환하는 문제에 관한 참고문헌[4]에 언급되어 있다. 물리적으로는 두 접촉면의 열전달은 두 면의 수직한 방향으로만 발생하므로 요소의 두 요소가 일치할 때는 서로 일치하는 두 요소의 절점 사이에만 열교환이 일어나야 한다. 이를 위해 접촉 열교환계수 알고리즘 개발 목표를 다음 장에서 정리할 수 있다.

## 2.2 평면 불일치격자면 접촉열전달계수 기법

### 2.2.1 알고리즘 목표

2.1절에서 언급한 물리적 불합리성을 줄이고 더 나아가 수치적으로도 타당성이 높은 접촉열전달 계수 산출을 위해 알고리즘의 목표를 다음과 같이 설정하였다. 참고문헌[3]에 기술된 목표를 다시 정리하면 아래와 같다.

1. 가급적 경계면에 수직방향의 열전달만 이루어 지도록 접촉 열교환계수를 계산해야 한다.
2. 가급적 격자 형상에 적게 의존적인 결과를 산출해야 한다.
3. 부영역의 순서와 무관하게 동일한 결과를 산출해야 한다.

목표 1은 물리적으로 접촉열전달은 접촉하는 두 면 사이에 열이 면에 수직한 방향으로만 전달되어야 하며 면에 평행한 방향의 열교환을 최대

한 억제해야 한다는 것으로서 본 논문의 알고리즘 지향 목표 중 가장 강하게 적용되어야 하는 것이라고 할 수 있다. 현실적으로 목표 1을 두 요소가 일치하지 않는 모든 경우에 대해 정확히 구현하는 것은 불가능에 가깝다. 그렇기에 이 목표를 실제 알고리즘 개발에 적용하기 위해 조건을 완화하여 다음의 두 가지 필수 요구사항을 반드시 만족하도록 설정하였다.

1-1 동일 요소 내 절점 사이에는 열교환이 있어서는 안 된다.

1-2 접촉면의 두 요소의 전체 절점이 기하학적으로 일치할 경우 일치하는 위치의 절점 사이에만 열교환이 있어야 한다.

요구사항 1-1은 동일 요소 내 절점 사이의 열교환을 금지하는 조항이고, 1-2는 기하학적으로 일치하는 두 절점의 경우 양자의 열교환만을 허용하는 조항이다. 1-1은 물리적 현상뿐만 아니라 수치적인 면에서도 해의 안정성을 위해 꼭 필요한 사항이다. 1-2에 의해 만일 두 접촉 요소가 기하학적으로 일치할 경우 동일한 위치의 두 절점 쌍으로만 열전달이 일어나게 된다.

목표 2는 수치적으로 강건하고 합리적인 알고리즘을 지향하기 위한 것이다. 경계면의 격자 형상에 따라 접촉 열교환계수가 달라질 수 있는 것을 최소화하기 위해 두 요소의 교차다각형의 꼭지점(Vertex)에 접촉 열교환량을 적절히 분배하는 알고리즘을 설계하였다. 참고문헌[3]에 제안된 알고리즘 역시 목표 2를 지향하지만 다른 문제점이 존재할 여지가 있어서 본 연구에서는 이 부분을 극복하여 개발하였다.

목표 3은 사용자 편의성을 높이고 결과의 모호성을 소거하기 위한 것이다. 많은 접촉(Contact) 관련 알고리즘이 주종(Master-Slave) 설정 후 진행되는 경향이 있고 이는 주종 설정 순서에 따라 결과가 달라질 수 있음을 의미한다. 특히 접촉면이 곡면일 때 이러한 현상이 두드러질 우려가 있어서 결과의 모호성을 제거하고 수치적으로 일관된 결과를 얻을 수 있도록 알고리즘을 설계하였다.

### 2.2.2 알고리즘 개요

본 연구에서 개발한 알고리즘은 대략적으로 다음과 같은 순서로 수행된다.

1. 유한요소 절점, 요소 정보를 바탕으로 2차원 경계면 요소 추출
2. 전체 영역 Voxel 구축 및 인접 Voxel 내 경계면 요소들 간 접촉 다각형(Polygon) 추출
3. 접촉 다각형의 총 접촉열전달계수를 다각형의 각 꼭지점(Vertex)으로 분배

4. 각 다각형 꼭지점마다 접촉하는 두 요소의 형상함수 인자 계산 후 해당 인자의 형상함수값을 가중치로 요소 절점(Node) 접촉열전달계수를 분배

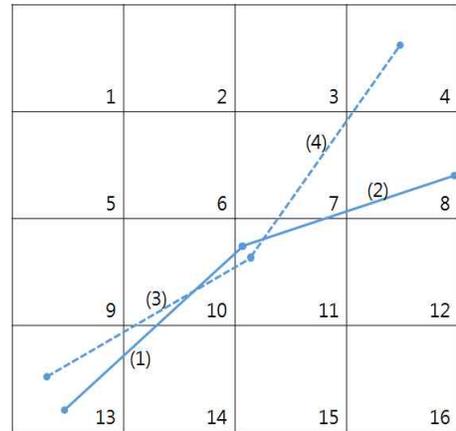
과정 2의 접촉 다각형의 꼭지점(Vertex)와 미지수가 실제 위치하는 격자의 절점(Node)을 구분하여 지칭하였다. 실제 코드에서는 1~4가 단순히 순차적으로 수행되는 것에 그치지 않고, 반복문과 조건문을 조합하여 계산 효율성을 높일 수 있게 개발하였다. 그리고 과정 3에서 접촉 다각형의 면적을 보존하도록 분배가 이루어지고 과정 4의 형상함수들은 그 합이 1이므로 총 접촉 열교환계수는 일정하게 유지되고 총 열전달량 역시 보존된다.

**2.2.3 전처리, 공간탐색 및 접촉 다각형 추출**

우선 3차원 공간의 각 부영역들에서 경계면을 이루는 2차원 요소들을 추출한다. 사면체 요소의 경우 4개의 삼각형 요소, 육면체 요소의 경우 6개의 사각형 요소를 추출 후 여기서 내부의 면을 소거하여 각 부영역들의 외부 경계 요소들만을 추출할 수 있다. 이 부분은 외부의 격자생성 모델링 소프트웨어 등에서 해당 기능을 지원할 경우 그대로 입력하여 사용할 수 있다.

다음은 전체 영역을 포함하는 3차원 공간을 일정한 간격으로 분할하는 Voxel 목록을 구축한다. 전처리 단계에서 추출된 요소들을 일대일로 모두 탐색하기에는 지나치게 많은 시간이 소요되므로 이를 최소화하는 과정으로서 일정한 간격을 갖는 Voxel 목록을 구축 후 각 요소가 위치하는 Voxel들에 해당 요소번호(Element Identification Number)를 입력한다. Voxel 기반 접촉 탐색은 여러 알고리즘에서 널리 사용되고 있으며 이기종 격자 간 온도 변환에 관한 논문[5]에도 구현된 바 있다. Fig. 1은 구현된 Voxel 기반 인접 경계면 요소 간 탐색을 나타낸 그림이다. 물리량 보간(Interpolation)을 목적으로 적절한 요소가 없을 경우 탐색 범위를 증가시키는 참고문헌[5]과 달리 여기서는 해당 위치 및 바로 인접한 Voxel에 걸친 요소들에 대해서만 탐색이 이루어지며 해당 범위에 접촉이 없을 경우 다음 Voxel의 탐색으로 넘어가게 된다.

설명을 위해 4x4의 정사각형으로 구성된 2차원 Voxel인 Fig. 1을 살펴보도록 한다. 요소 (1)은 9,10,11,13,14,15의 6개 Voxel에 위치하게 된다. 요소 (1)이 놓인 6개 Voxel들에 요소번호 (1)을 모두 삽입한다. 나머지 세 요소에 대해서도 동일한 절차를 반복할 수 있다. 탐색의 효율성을 위



**Fig. 1. Voxel Based Contact Search**

해 Voxel에 걸쳐 있는 요소의 개수가 많은 순서대로 Voxel 번호(Voxel Identification Number)를 정렬(Sort)하고 정렬된 순서대로 해당 및 인접한 Voxel들에 걸친 요소들에 대해 탐색을 수행한다. Fig. 1의 예제에는 11번 Voxel에 가장 많은 4개의 요소가 걸쳐 있으므로 11번 및 인접한 6,7,8,10,11,12,14,15,16번 Voxel에 걸친 (1)~(4)번 요소에 대한 상호 탐색을 우선적으로 수행하게 된다. 중복된 요소 쌍의 탐색을 막기 위한 별도의 처리와 함께, Voxel ID순서의 단순 공간 탐색에 비해 이러한 방식이 탐색 효율성을 높인다.

두 요소 쌍의 접촉 영역을 추출하는 것은 다각형 절개(Polygon Clipping) 알고리즘 중 하나인 Sutherland-Hodgman 알고리즘[6]을 구현한 코드[7]를 본 연구에 맞게 이식(Porting)하였다. Sutherland-Hodgman 알고리즘은 교차하는 다각형의 공유 다각형을 추출하는 알고리즘으로 Clipper 다각형 외부의 대상 다각형의 절점이 볼록(Convex)일 때 별도의 고려 없이 적용할 수 있는 효율적인 알고리즘이므로 두 요소 간 공유 영역을 추출하기에 적합하다.

다만 해당 알고리즘으로 출력된 접촉 다각형은 볼록하지 않을 수 있으며, 이를 처리하기 위해 별도의 알고리즘이 필요하다. 이 부분에 대해서는 다음 장에 후술한다.

**2.2.4 접촉 다각형 꼭지점 열교환계수 분배**

이전 단계에서 추출된 접촉 다각형을 접촉열전달계수와 그 면적의 곱인 접촉 열교환계수를 보존하도록 다각형의 각 꼭지점으로 가중치와 함께 분배한다. 통상적으로 유한요소법에는 각 절점의 형상함수 적분치와 부피비(Volume Fraction)를 가중

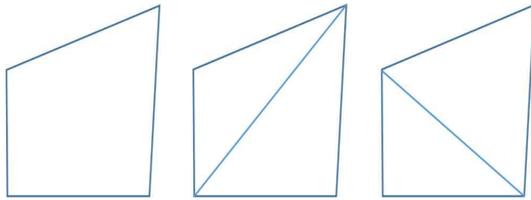


Fig. 2. Three Cases of Elements on Two Contact Surfaces[3]

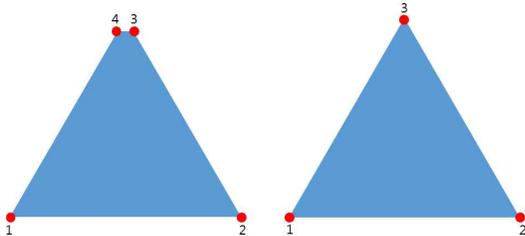


Fig. 3. A Trapezoidal Similar to a Triangle

치로 분배하는 경우가 대부분이다. 하지만 해당 방식은 접촉 영역이 복잡한 다각형일 때는 적용이 어려울 뿐만 아니라, 참고문헌[3]에도 언급된 바와 같이 격자 형상에 따라 분배 결과가 달라질 수 있다. 참고문헌[3]은 격자 형상의 의존성을 줄이기 위해 부피비 가중치가 아닌 꼭지점의 두 변의 각도를 가중치로 분배하였다. Fig. 2[3]의 좌측 첫 번째는 두 접촉 요소가 모두 사각형으로 일치할 경우이고 두 번째, 세 번째는 한 면은 1개의 사각형으로 반대면은 2개의 삼각형으로 분할된 두 가지 경우에 대해 도시한 것이다. 접촉 다각형이 평행사변형일 경우 Fig. 2[3]의 세 경우 모두 각 꼭지점 각도의 합은 모두 동일하므로 결과적으로 세 경우 모두 각 절점마다 동일한 접촉 열교환계수를 가지게 된다.

그러나 이 방식[3]은 한계를 갖고 있다. 첫 번째로 접촉 영역이 평행사변형이 아닐 때는 Fig. 2[3]의 세 경우에 대해 동일한 결과가 산출된다고 보장할 수 없다. 다만 이 부분은 임의의 접촉 형상에 대한 모든 격자 분할의 수에 동일한 결과를 가져오는 알고리즘은 없으며 적절한 타협이 필요하다.

참고문헌[3] 방식의 또 다른 문제는 꼭지점 각도 분배 방식이 비합리적인 결과를 가져올 수 있다는 점이다. 극단적인 경우로 삼각형과 그 형태가 무척 유사한 사다리꼴의 접촉 다각형의 경우를 도시한 Fig. 3을 살펴보면, 좌측 사다리꼴의 꼭지점 3과 4의 각도가 꼭지점 1, 2의 각도보다

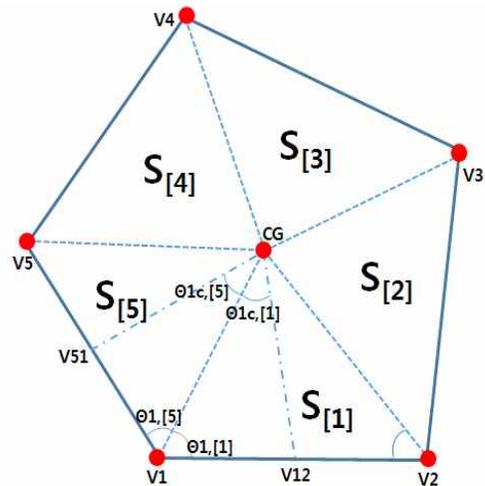


Fig. 4. A Polygon with 5 Sub-Triangles Connected to the Center of Geometry of the Polygon

훨씬 크기에 꼭지점 3과 4에 과도한 가중치가 물리는 현상이 발생한다. 하지만 기하학적인 측면에서는 Fig. 3의 좌측 사다리꼴과 우측 삼각형은 그 형태가 무척 유사하기에 가중치 분배도 이를 고려하는 것이 보다 합리적이다.

따라서 본 연구에는 각도 기반 분배기법[3]을 수정하여 Fig. 4, 5와 같은 접촉다각형의 중심점(Center of Geometry)과 각 꼭지점을 연결하는 내부 삼각형들로 분할하여 각도 비율로 그 면적을 양쪽 꼭지점으로 분배하게 된다. 단 다각형이 삼각형일 경우는 참고문헌[3]과 동일하게 각 꼭지점의 각도 비율로 가중치를 주어서 분배한다.

Figure 4의 오각형의 중심점을 CG로, 그와 각 변의 꼭지점을 잇는 삼각형들을 순서대로 1부터 5로 표현하기로 한다. 내부 삼각형은 대괄호 하첨자로, 다각형 꼭지점은 단순 하첨자로 분리하여 표기하였다. 꼭지점 V1과 인접한 두 삼각형 V1-V2-CG를  $S_{[1]}$ , V5-V1-CG를  $S_{[5]}$ 라고 하고  $S_{[1]}$ ,  $S_{[5]}$ 의 꼭지점 V1의 각도를 각각  $\theta_{1,[1]}$ ,  $\theta_{1,[5]}$ 이라고 할 때, V1의 두 내부 삼각형의 접촉 열교환계수는 각각 식 (10), (11)과 같다. 전체 열교환계수는 모든 내부 삼각형에 대해 동일한 과정의 분배를 각 꼭지점마다 모두 더하여 얻을 수 있다.

$$C_{1,[1]} = \frac{\theta_{1,[1]}hS_{[1]}}{\pi} \tag{10}$$

$$C_{1,[5]} = \frac{\theta_{1,[5]}hS_{[5]}}{\pi} \tag{11}$$

그리고 중심점 CG의 가중치는 내부 삼각형의 변과 중심점과 다각형의 변의 중점을 잇는 선분 사이의 각도를 바탕으로 분배할 수 있다. 꼭지점 V1의 경우 선분 V51-CG와 변 V1-CG의 각도를  $\theta_{1c,[5]}$ , 선분 V12-CG와 변 V1-CG의 각도를  $\theta_{1c,[1]}$  이라고 하면 V1의 두 내부 삼각형의 CG의 열교환계수 기여분은 식 (12), (13)이다.

$$C_{1c,[1]} = \frac{\theta_{1c,[1]}hS_{[1]}}{\pi} \quad (12)$$

$$C_{1c,[5]} = \frac{\theta_{1c,[5]}hS_{[5]}}{\pi} \quad (13)$$

따라서 꼭지점 V1의 해당 접촉다각형의 총 열교환계수는 식 (10)-(13)을 모두 더한 식으로서 식 (14)로 계산할 수 있다.

$$C_1 = C_{1,[1]} + C_{1c,[1]} + C_{1,[5]} + C_{1c,[5]} \quad (14)$$

$$= \frac{h}{\pi} \{(\theta_{1,[1]} + \theta_{1c,[1]})S_{[1]} + (\theta_{1,[5]} + \theta_{1c,[5]})S_{[5]}\}$$

다각형 중심점을 바탕으로 분배하는 또 다른 방식으로 Fig. 4의 꼭지점 및 그 양쪽 변의 중심들과 다각형의 중심점을 잇는 부다각형(Sub Polygon)의 면적으로 꼭지점의 가중치를 결정하는 방법도 생각할 수 있다. 예를 들면 Fig. 4의 꼭지점 V1의 경우 부다각형 V51-V1-V12-CG의 면적으로 열교환계수를 결정할 수 있을 것이다.

Table 1. Weights of Three Cases of Fig. 5 Computed by Algorithm 1 and Algorithm 2

Case	Case 1		Case 2		Case 3	
Algorithm	a-1	a-2	a-1	a-2	a-1	a-2
V1	1/4	1/4	1/4	1/6	1/4	2/6
V2	1/4	1/4	1/4	2/6	1/4	1/6
V3	1/4	1/4	1/4	1/6	1/4	1/6
V4	1/4	1/4	1/4	2/6	1/4	2/6

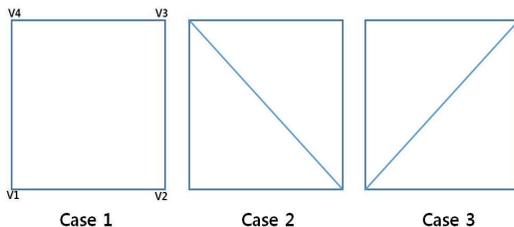


Fig. 5. Three Cases of Elements on Two Square Contact Surfaces

Table 2. Equality of the Vertex Conductances of Three Cases of Meshes for Parallelogram Region

$$C_1 = \frac{S}{4} \frac{\{(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)\}}{\pi}$$

$$= \frac{S}{2} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{\pi}$$


---


$$C_1 = \frac{S}{2} \frac{\alpha}{\pi} = \frac{S}{2} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{\pi}$$


---


$$C_1 = \frac{S}{2} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{\pi}$$

하지만 이 방법(Table 1의 a-2)은 정사각형 접축 영역을 가정한 Fig. 5의 세 경우에 대해 서로 다른 가중치 결과를 가져오므로 본 연구에서 제안된 방법에 비해 그 타당성이 떨어진다. 이 방법으로 Fig. 5의 좌측 첫 번째 경우는 모든 꼭지점이 동등한 가중치를 갖게 되나, 가운데 및 우측의 경우는 두 삼각형의 꼭지점들이 모두 동등한 가중치를 가지므로 이를 모두 더하면 두 꼭지점들이 다른 두 꼭지점보다 두 배의 가중치를 갖게 된다.

반면에 본 연구방식(Table 1의 a-1)은 Fig. 5의 세 가지 경우 모두 동일한 가중치를 갖는다. Fig. 5의 Case 2에서, 하단 삼각형(절점 V1-V2-V4)의 절점 V1은 삼각형 면적 1/2의 각도 비례분(90/180)인 1/4의 가중치를, 절점 V2, V4는 삼각형 면적 1/2의 각도 비례분(45/180)인 1/8의 가중치를 각각 갖게 되고, 상단 삼각형(절점 V2-V3-V4)에도 동일한 과정의 가중치를 더하면 모든 네 절점이 동일하게 1/4의 가중치를 갖게 된다. Table 1은 Fig. 5의 세 가지 경우에 대한 네 꼭지점의 본문의 방식과 부다각형 방식의 가중치를 나타낸 것이다.

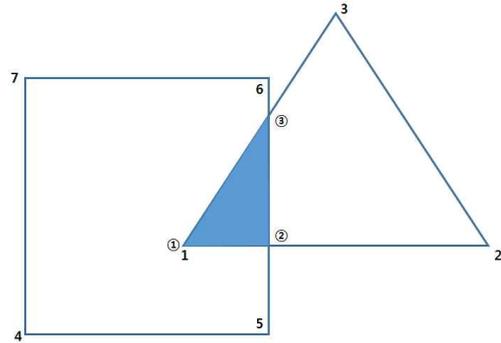
보다 엄밀하게는 접축 영역이 평행사변형일 때 세 가지 경우 모두 동일한 결과를 산출한다. Table 2의 접축 면적이 S일 때 평행사변형 교차영역에 대한 꼭지점 V1의 결과가 세 가지 모두 동일함을 보여준다.

해당 알고리즘을 적용하기 위해서는 다각형의 중심점이 다각형 내부에 있어야 하므로 접축 다각형은 반드시 볼록다각형이어야 한다. 접축 다각형이 오목한 꼭지점을 가지고 있을 가능성이 있으므로, 다각형 분할 알고리즘으로 최적 결과를 가져오는 참고문헌[8]을 구현한 CGAL 라이브러리[9]를 사용하여 단일 혹은 복수 개의 볼록다각형들로 분할 후 적용하였다.

**2.2.5 형상함수값 가중치 절점 열교환계수 계산**

2.2.4절에서 접축 다각형의 열교환계수를 각 꼭지점으로 분배하는 기법에 대해 논의하였다. 이번 장에는 다각형 꼭지점으로 분배된 열교환계수를 접축하는 두 요소의 절점으로 분배하는 방법으로서, 참고문헌[3]에도 자세히 기술되어 있는 내용으로 해당 내용을 다시 서술하기로 한다.

Figure 6의 도시된 예제는 삼각형과 사각형이 접축하는 문제로서 접축 영역은 유색의 삼각형으로, 삼각형 요소의 절점은 숫자 1부터 3까지, 사각형 요소의 절점은 숫자 4부터 7까지이고, 접축 다각형의 꼭지점은 ①-③로 표현하였다.



**Fig. 6. Example of Conductance Distribution from Polygon Vertices to Element Nodes[3]**

접축다각형 꼭지점 ①은 삼각형 요소의 절점 1과 동일하지만 사각형 요소의 절점들과는 일치하지 않는다. 그리고 꼭지점 ②, ③은 두 요소의 어느 절점과도 일치하지 않는다. 하지만 일치 여부와 무관하게 각 꼭지점 ①-③은 모두 삼각형, 사각형 내에서 두 요소 각각의 형상함수의 두 인자(Parameter)들과 그에 따른 형상함수값을 계산할 수 있다. 형상함수 인자를 계산하는 방식으로 2차원 평면뿐만이 아닌 3차원 곡면에도 적용하기 위해 참고문헌[5]에 언급된 최소거리 해법을 적용하여 구현하였다.

그리고 각 접축다각형 꼭지점의 접축 열교환계수는 두 요소의 각 절점의 형상함수값들의 곱을 가중치로 하여 절점 간 접축 열교환계수로 분배할 수 있다. 접축다각형의 꼭지점이 요소의 절점과 일치하면 해당 절점의 형상함수값은 1이고 나머지는 0이므로, 두 요소가 일치하는 절점들만을 가지면 일치하는 두 절점 사이에만 가중치를 갖는다.

Figure 6의 예에서 꼭지점 ③이 삼각형 요소의 변 1-3의 1/2 지점에, 사각형 요소의 변 5-6의 4/5 지점에 있다고 가정하면 꼭지점 ③의 접축 열교환계수는 Table 3과 같은 식으로 해당 위치

**Table 3. Example of Nodal Weight Distribution of Vertex ③[3]**

Node	Tri	1	2	3
Quad	Weight	1/2	0	1/2
4	0	0	0	0
5	1/5	1/10	0	1/10
6	4/5	4/10	0	4/10
7	0	0	0	0

의 두 요소의 형상함수값들의 곱들을 가중치로 하여 두 요소의 절점 1-3, 절점 4-7 사이의 접촉 열교환계수를 분배할 수 있다. Table 3의 2번째 열은 각각 사각형 요소 절점 4-7, 2번째 행은 삼각형 요소 절점 1-3의 형상함수값들이고, 각 요소의 절점 간 가중치는 2번째 열과 2번째 행을 곱한 값이 된다. Table 3에서 꼭지점 ③의 유의미한 열교환계수를 갖는 절점 쌍은 총 6쌍이다. 다른 꼭지점들에 대해서도 이와 같은 방식을 반복하여 누적하면 두 요소의 절점 간 접촉 열전달계수를 구할 수 있다. 식 (15)는  $k$ 개의 접촉다각형 꼭지점을 가진 두 요소의 절점  $i, j$ 의 접촉 열교환계수를 구하는 식이다.  $C$ 는 접촉 열교환계수를,  $\phi$ 는 각 요소의 형상함수를, 상첨자  $k$ 는 접촉다각형 꼭지점을, 하첨자  $i, j$ 는 각각 두 요소의 절점을 나타낸다.

$$C_{ij} = \sum_k C^{(k)} \phi_i^{(k)} \phi_j^{(k)} \quad (15)$$

두 요소의 절점 간 가중치를 곱하여 열교환계수를 결정하므로 요소 내 절점 사이에는 어떠한 열교환도 일어나지 않으므로 목표 1-1을 만족한다. 그리고 Fig. 2[3], Fig. 5, Table 2와 같이 두 요소의 전체 절점의 위치가 정확히 일치할 경우 동일한 두 절점 사이에만 열교환계수가 존재하므로 목표 1-2도 만족한다. 또한 각 요소의 형상함수의 총합은 1이므로 두 요소의 가중치 곱의 총합도 1이 되어 총 열교환계수도 보존되므로 문제의 물리적 특성을 훼손하지 않는다. 그리고 두 대상 요소의 일련번호에 관계없이 계산 결과는 동일하므로 목표 3도 만족한다. 한편 본 절 이전의 2.2.4절의 과정을 통해 격자 분할 방법에 덜 의존적인 계산 결과를 산출할 수 있다.

### 2.3 3차원 곡면 접촉면 열교환계수

#### 2.3.1 접촉 여부 판단

이전 절의 내용은 2차원 평면에 적용되는 내용에 대한 것이다. 이를 3차원 곡면 간 접촉 열교환계수 산출에 확장하기 위해 별도의 과정이 필요하다.

본 연구에는 경계 요소의 별도의 기하학적인 곡면 정보 없이 이산화된 격자 정보만을 가지고 곡면 추출 및 근사 곡률반경을 추정하고 이를 접촉 여부 판단에 활용하는 알고리즘을 구현하였다. 2.2.3절의 Voxel내부의 접촉 여부를 확인하고자 하는 두 요소의 법선벡터가 일정 각도 이하일 때 접촉 가능성이 있다고 판단한다. 실제 접촉다각형 추출은 다음 장의 절차로 수행된다. 만일

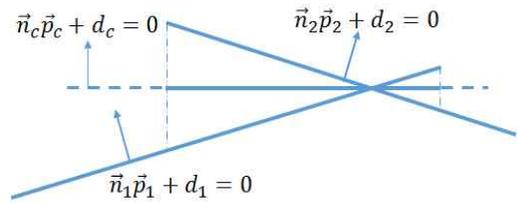


Fig. 7. Projection of Two Contact Elements onto the Middle Plane

외부 형상설계 소프트웨어 등에서 경계면 요소와 곡면의 접촉 정보를 입력받을 수 있으면 해당 정보를 사용할 수 있다.

#### 2.3.2 평균법선면 투영 접촉 열교환계수 계산

두 요소가 접촉 가능성이 있다고 판단되면, 실제 접촉 다각형을 추출하는 단계로 이어진다. 평면과 달리 이산화된 곡면의 경우 격자의 절점들이 정확히 동일 평면에 있지는 않기 때문에, Fig. 7과 같이 두 요소가 통과하는 평면의 평균 법선면(Normal Plane)에 두 요소를 투영(Projection)하고 이를 법선면의 2차원 좌표로 변환 후 접촉다각형을 추출한다. 3차원에서 평면은 법선벡터(Normal Vector)와 상수 1개의 총 4개의 값을 가진 4차원 벡터로 간주하여 두 요소가 통과하는 평면의 평균 법선벡터를 구할 수 있다. 접촉다각형 추출 및 불록다각형으로 분할 후에는 다시 3차원 공간 좌표로 치환하여 2.2.5의 과정을 수행하게 된다.

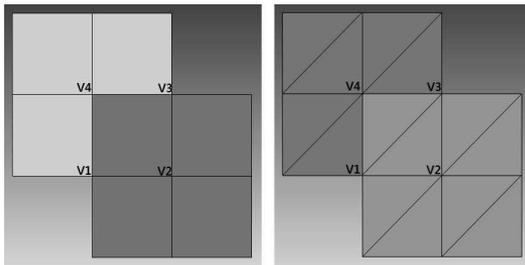
평균법선면으로부터 2차원 좌표로 변환하고 그 결과를 다시 3차원 공간으로 치환하기 위해서 법선벡터를 바탕으로 나머지 2개의 직교 단위벡터들을 구해야 한다. 본 연구에서는 법선벡터를 법선면 좌표계의 제 3좌표축으로, 법선벡터의 가장 큰 절대값 성분을 제외한 성분 중 가장 작은 성분과 법선벡터의 외적(Cross Product)을 제 1좌표축으로, 제 2좌표축은 제 3좌표축과 제 1좌표축의 외적으로 결정하게 된다. 이러한 방식은 평균 법선벡터가 z축과 일치할 경우 원래의 좌표계와 동일한 결과를 얻을 수 있다.

### 2.4 접촉 열교환계수 계산 결과

본 연구로 구현된 알고리즘으로 우선 2차원 사각형이 겹치는 영역에 대한 검증은 실시하였다. Fig. 8은 1x1로 겹치는 정사각 접촉영역을 가진 두 격자 형상의 접촉 문제이다. 이 문제를 2.2.4절의 두 알고리즘으로 절점 접촉 열교환계수를 계산한 결과는 Table 4와 같다. 이 결과는 이론적 예측 결과인 Table 1과 동일함으로 알고리즘이 예상대로 잘 구현되었음을 확인할 수 있다.

**Table 4. Contact Conductance of Quadrateral and Triangle Meshes of Fig. 8 Computed by Algorithm 1 and Algorithm 2**

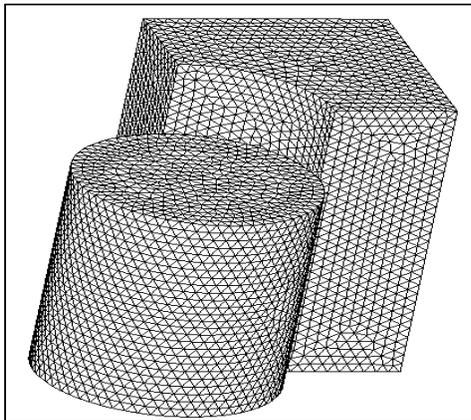
Case	Quad		Triangle	
Algorithm	a-1	a-2	a-1	a-2
V1	0.25	0.25	0.25	0.3333
V2	0.25	0.25	0.25	0.1667
V3	0.25	0.25	0.25	0.3333
V4	0.25	0.25	0.25	0.1667



**Fig. 8. Two Mesh Cases of 1x1 Contact Region**

본문에서 제시한 알고리즘이 Fig. 8의 두 격자 형상에 대해 모두 동일한 결과를 산출함을 알 수 있다. 그리고 두 알고리즘 모두 접촉 다각형 꼭지점에서 격자의 절점으로 분배하는 과정은 동일하고, 접촉 영역의 절점이 일치하므로 두 절점 사이에만 열교환이 존재한다. 본 예제는 접촉 영역의 절점이 서로 일치하는 경우이므로 2.2.1의 목표 1,2,3을 전부 만족한다.

다음으로 3차원 곡면의 접촉 영역에 대한 문제로서 Fig. 9와 같은 실린더와 원형의 곡면 벽이 접하는 모델로 검증하였다. 실린더와 곡면 벽이 접하는 높이는 2.2이고 접하는 원주의 각도는



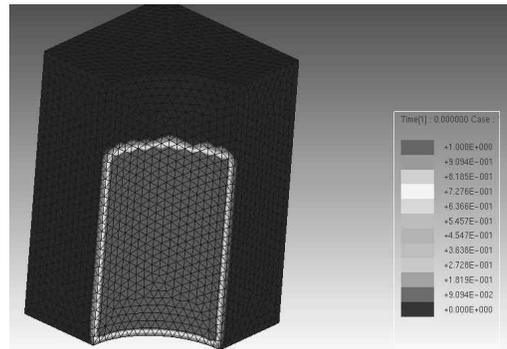
**Fig. 9. The Contact Problem between the Cylinder and Curved Wall**

**Table 5. Contact Area of Tested Models**

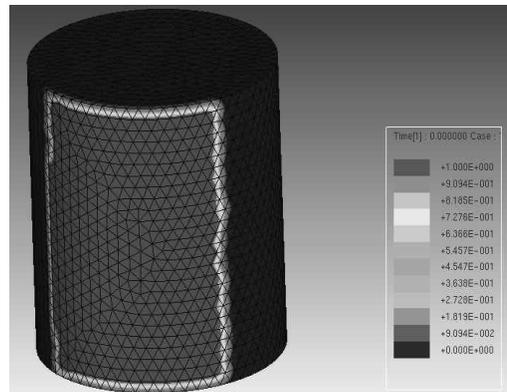
No. Elem	Element Length	Total Area	Exact	Error (%)
308	0.398	3.432	3.456	0.690
1,284	0.196	3.446	3.456	0.284
11,442	0.066	3.455	3.456	0.017
45,178	0.033	3.456	3.456	0.003

90도이므로 정확한 접촉 면적은 약 3.456이다.

격자수에 따른 본 연구의 알고리즘으로 계산된 총 접촉 면적은 Table 5에 나타내었다. 이 예제는 비구조 격자인데다 3차원 곡면이기 때문에 알고리즘 목표 달성도를 직관적으로 이해하기가 쉽지 않다. 목표 1-1, 1-2와 목표 3은 어느 경우에도 본지에서 제안한 알고리즘으로 만족할 수 있다. 한편 목표 2의 달성도를 정량적으로 측정하기 위해 두 영역의 접촉 면적 대비 이론적 접촉 면적의 차이 비율(Table 5)과, 요소 별 접촉 면적과 요소 면적의 비율(Fig. 10, 11)로 나타내



**Fig. 10. Element Areal Fraction of Contact Region on Curved Wall**



**Fig. 11. Element Areal Fraction of Contact Region on Cylinder**

었다. Table 5의 결과로 알 수 있듯이 3백 수준의 비교적 적은 수의 격자라도 총 접촉 면적이 잘 계산됨을 확인할 수 있다. Fig. 10, 11은 각각 Table 5의 세 번째 문제(격자 수 11,442)의 요소별 접촉 면적과 요소 면적의 비율을 실린더와 곡면 벽의 접촉 부위에 대해 나타낸 것이다. Fig. 10, 11에서 보이듯이 접촉 부위의 요소의 접촉 면적 비율도 1.0에 가깝게 잘 계산되었음을 확인할 수 있다.

### III. 결 론

본 연구에서는 유한요소 열해석 시 발생하는 접촉 열교환계수를 계산하는 방법으로 통상적인 유한요소 이산화 방식을 서로 다른 두 영역 간 접촉 열전달에 그대로 적용 시 발생할 수 있는 문제점을 설명하고 이를 극복하는 물리적으로 타당하면서 수치적으로 보다 합리적인 결과를 산출하는 알고리즘을 제안하였다. 개발된 알고리즘은 별도의 기하학적 곡면 정보 없이 이산화된 격자 정보만으로 3차원 곡면을 포함한 다양한 접촉면 간의 열교환계수를 계산할 수 있다.

### IV. 향후 계획

본 연구로 개발된 열교환계수 계산 기법과 여타 소프트웨어의 결과[10-12]와 비교하여 각 소프트웨어 알고리즘에 따른 열해석 결과와 비교 검증할 예정이며, 이후에 해당 알고리즘을 위성종합설계 SW[1,2]에 이식하여 위성 열해석에 활용할 예정이다.

### 후 기

본 연구는 미래창조과학부의 재원으로 국가과학기술연구회의 지원으로 한국항공우주연구원에서 수행 중인 연구과제 '초소형위성을 이용한 미래 우주 탐사 핵심기술 개발의 일환으로 수행되었습니다.

### References

1) Kim, J. H., Woo, J. M., Cho, J. Y., and Kim, M. K., "Development of a Heat Transfer

Analysis Program for Satellite Design," *Proceeding of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences Fall Conference*, November 2013, pp. 741-744.

2) Kim, M. K., Hyun, B. S., Kim, J. H., Woo, J. M., and Cho, J. Y., "Functionalities and Verification of the Satellite Thermal Analysis Solver Based on Finite Element Method," *Proceeding of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences Spring Conference*, April 2014, pp. 948-951.

3) Kim, M. K., "Evaluating Thermal Contact Conductances between Unmatched Grid Interfaces for Finite Element Thermal Analysis," *Proceeding of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences Fall Conference*, November 2016, pp. 1012-1013.

4) Kim, M. K., "A Study of Assembling Radiation Exchange Matrix for Finite Element Thermal Analysis of a Satellite," *Proceeding of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences Spring Conference*, April 2015, pp. 754-757.

5) Kim, M. K., "A Study of Temperature Transform Algorithm of Distinguished Grids between Thermal and Structural Mesh for Satellite Design," *Journal of the Korea Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 43, No. 9, 2015, pp. 805-813.

6) Sutherland, I. and Hodgman, G. W., "Reentrant Polygon Clipping," *Communication of ACM*, Vol. 17, 1974, pp.32-42.

7) [https://rosettacode.org/wiki/Sutherland-Hodgman\\_polygon\\_clipping#C](https://rosettacode.org/wiki/Sutherland-Hodgman_polygon_clipping#C)

8) Daniel H. Greene. "The decomposition of polygons into convex parts." *In Franco P. Preparata, editor, Computational Geometry, volume 1 of Adv. Comput. Res., JAI Press, Greenwich Conn.*, 1983, pp.235 - 259.

9) [http://doc.cgal.org/latest/Partition\\_2/index.html](http://doc.cgal.org/latest/Partition_2/index.html)

10) *Quick Reference Manual*, NX Nastran 11, SIEMENS.

11) *Introduction to ANSYS Mechanical*, ANSYS 16.0. ANSYS Inc.

12) *Abaqus Analysis User's Manual*, Abaqus 6.12, DS Simulia.