

<https://doi.org/10.7236/IIBC.2017.17.6.217>

IIBC 2017-6-28

## 지구 중력장 내에서 성립하는 운동 상태 방정식의 해를 구하기 위한 벡터의 스칼라 프로덕트 응용

### Application of Vector Scalar Product to Solve the Kinematic Equations in the Earth's Gravitational Field

엄기홍\*

Kee-Hong Um \*

**요약** 지구 중력장 내에 위치한 물체는 연직 아래 방향의 힘을 받고 있다. 중력장 내에서 물체의 운동을 기술하기 위하여 운동상태 방정식을 이용한다. 자유 낙하하는 물체를 해석할 때 기준 방향은 연직 하방을  $+y$  으로, 연직위로 던져 올린 물체를 해석할 때 기준방향은 연직상방을  $+y$ 으로, 연직 아래로 던져 내린 물체를 해석할 때, 기준 방향은 연직 하방을  $+y$ 으로 선택하여 해석함이 일반적이다. 이 논문에서는 두 벡터의 스칼라 곱 (즉, 도트 곱)을 이용하여 연직 상방 또는 하방 두 경우를 방향으로 선택하여 구성한 벡터 운동 상태 방정식(vector kinematics equations)을 해석의 결과가 서로 일치함을 제시한다. 두 벡터의 스칼라 곱 (즉, 도트 곱)을 이용하여 물체의 상태 방정식을 해석한 예는 선행 연구에서 거의 찾아볼 수가 없다. 이 결과를 이용하면, 수평면의 방향 또는 빗각을 이루는 방향의 초속도로 던져 올리거나 던져 내린 물체의 운동 상태를 해석하기 위하여 연직 기준 방향을 상방 또는 하방으로 임의 선택할 수가 있다.

**Abstract** Any object located in the earth's gravitational field experiences a force in the direction of the center of the earth. In order to describe the motion of objects in the field, the solutions to a system of simultaneous vector kinematic equations need to be obtained. In the analysis of freely-falling objects, the reference direction  $+y$  is usually defined to be the downward direction. In the analysis of the motion of objects thrown upward, the reference direction  $+y$  is usually defined to be the upward direction. In the analysis of the motion of objects thrown downward, the reference direction  $+y$  is usually defined to be the downward direction. In this paper, we show that the choice of reference axis in either upward or direction gives the same results by adopting a scalar product of two vectors in solving the vector kinematic equations. It is rare to find other examples of using a scalar product of two vectors in solving vector kinematic equations describing the motion of objects. An application of this study is that we can arbitrarily choose the reference direction for objects moving in a horizontal direction, including projectile motions.

**Key Words** : GPS, Free fall, Dot product, Vector kinematics equations, Projectile motion

\*정회원, 한세대학교 IT학부(교신저자, 주저자)  
접수일자 2017년 10월 20일, 수정완료 2017년 11월 20일  
게재확정일자 2017년 12월 8일

Received: 20 October, 2017 / Revised: 20 November, 2017 /  
Accepted: 8 December, 2017

\*Corresponding Author: um@hansei.ac.kr

Dept. of Information Technology, Hansei University, Korea

## I. 서 론

중력장 내에서 운동하는 물체의 운동 상태를 기술하기 위하여 기준 방향을 설정해야 한다. 한 예로서, 좌표계를 설정하고 있는 GPS 는 육상, 항공등에서 위성에서 발사되는 전파를 이용하여 수신기의 위치까지 도달하는 전파의 시간을 측정하여 위치를 측정한다<sup>[1]</sup>.

일정 시간 동안 운동하는 물체의 위치를 예측하고, 속도와 가속도를 측정하기 위하여 벡터 물리량의 상태방정식을 세우고 풀어서 해를 구해야 한다.

자유 낙하운동의 경우 연직하방 +y 로, 연직 상방으로 던져 올린 물체를 해석할 때 연직상방 +y 로, 연직 아래로 던져 내린 물체의 운동 상태를 기술할 때 연직하방을 +y 으로 선택하여 해석하고 있다. 이 논문에서는 두 벡터의 스칼라 곱 (즉, 도트 곱)을 이용하여 물체의 초속도의 방향에 무관하게 연직 상방 또는 하방 두 경우를 임의의 기준 방향으로 선택하여 해석한 결과가 서로 일치함을 제시한다. 이 결과를 이용하면, 수평 방향 또는 빗각을 이루는 초속도로 던져 올리거나 던져 내린 물체의 운동 상태를 해석하기 위하여 연직 기준 방향을 상방 또는 하방, 임의로 선택할 수가 있다.

중력장에서 운동하는 물체의 운동 방정식에서 연직하방을 기준 +y으로 선택했을 때, 초기 위치를 원점으로 선택하고, 연직 투하한 물체의 운동 상태를 기술하는 운동 상태 방정식은 다음과 같은 형태로 이용되고 있다

$$v = v_0 + at \quad (1)$$

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2gy \quad (3)$$

식 (1),(2) 및(3)은 스칼라 물리량으로 표시된 상태 방정식이다. 이들 식을 일반적으로 표현하기 위하여 우리는 벡터 운동 상태 방정식(vector kinematics equations)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \quad (4)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 \quad (5)$$

$$\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2 = 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{y} \quad (6)$$

을 제시한다. 식 (6)에서,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}$  는 벡터  $\mathbf{a}$  와 벡터  $\mathbf{y}$  의 도트 곱(dot product)을 나타낸다<sup>[2]</sup>.

## II. 자유 낙하하는 물체의 운동 방정식

중력장 내에서 자유 낙하하는 물체의 운동 상태를 기술하기 위해서 연직 하방을 +y-방향으로 선택하거나 연직 상방을 +y-방향으로 선택하는 두 가지 방법을 사용한다<sup>[2,3]</sup>.

어느 방향을 기준 방향(+y방향) 으로 선택하든지 중력가속도는 지구의 등가 중심방향으로 향한다.

### 1. 연직 하방을 +y-방향으로 선택

벡터 물리량들

$$\text{낙하 물체의 초속도 : } \mathbf{v}_0 = 0 \text{ m/sec}$$

$$\text{낙하를 시작한 지 } t \text{ 초 후의 속도 : } \mathbf{v} = v \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}$$

$$\text{낙하 물체의 가속도 : } \mathbf{a} = g \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}^2$$

$$\text{물체의 변위 : } \mathbf{y} = y \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}$$

을 벡터 운동 상태 방정식(4),(5) 및(6) 에 대입하면

$$v \hat{\mathbf{y}} = 0 + g \hat{\mathbf{y}} \cdot t \quad (7)$$

$$y \hat{\mathbf{y}} = 0 + \frac{1}{2} g \hat{\mathbf{y}} \cdot t^2 \quad (8)$$

$$(v \hat{\mathbf{y}})^2 - (0)^2 = 2(g \hat{\mathbf{y}}) \cdot (y \hat{\mathbf{y}}) \quad (9)$$

와 같다. 식 (7),(8) 및 (9)을 벡터의 성분으로 표시하면 각각

$$v = gt \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{2} gt^2 \quad (11)$$

$$v^2 = 2gy \quad (12)$$

과 같다<sup>[4]</sup>. 그림 1 에서 식 (10),(11) 및 (12)를 나타내었다.

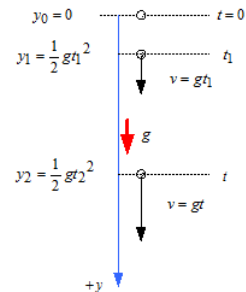


그림 1. 자유낙하하는 물체, 연직하방이 +y방향이다.

Fig. 1. Motion of Freely-falling object, with downward direction +y axis.

## 2. 연직 상방을 +y-방향으로 선택

벡터 물리량들

낙하 물체의 초속도 :  $\mathbf{v}_0 = 0$  m/sec

낙하를 시작한 지  $t$ 초 후의 속도 :  $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{y}}$  m/sec

낙하 물체의 가속도 :  $\mathbf{a} = -g \hat{\mathbf{y}}$  m/sec<sup>2</sup>

물체의 변위 :  $\mathbf{y} = y \hat{\mathbf{y}}$  m/sec

을 벡터 운동 상태 방정식(4),(5) 및(6) 에 대입하면

$$v \hat{\mathbf{y}} = 0 - g \hat{\mathbf{y}} \cdot t \quad (13)$$

$$y \hat{\mathbf{y}} = 0 + \frac{1}{2}(-g \hat{\mathbf{y}}) \cdot t^2 \quad (14)$$

$$(v \hat{\mathbf{y}})^2 - (0)^2 = 2(-g \hat{\mathbf{y}}) \cdot (y \hat{\mathbf{y}}) \quad (15)$$

와 같다. 식 (13),(14) 및 (15)를 벡터의 성분으로 표시하면 각각 벡터의 성분으로 표시하면

$$v = -gt \quad (16)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (17)$$

$$v^2 = -2gy \quad (18)$$

과 같다<sup>[4]</sup>. 그림 2 에서 식 (16),(17) 및 (18)을 나타내었다.

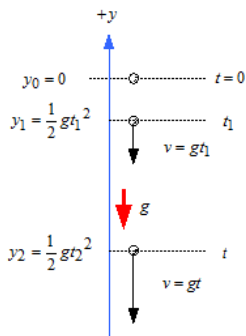


그림 2. 자유낙하하는 물체, 연직상방이 +y방향이다.  
 Fig. 2. Motion of Freely-falling object, with upward direction +y axis.

## II. 연직 투상된 물체의 운동 방정식

중력장 내에서 연직 투상된 물체의 운동 상태를 기술하기 위해서 연직 하방을 +y-방향으로 택하거나 연직 상방을 +y-방향으로 선택하는 두 가지 방법을 사용한다

다<sup>[1,5]</sup>. 어느 방향을 기준 방향(+y방향) 으로 선택하든지 중력가속도는 지구의 등가 중심방향으로 향한다. 기준방향에 따라 외력이 생성하는 초속도의 크기는 같으나, 방향이 180° 달라지게 된다.

## 1. 연직 하방을 +y-방향으로 선택

벡터 물리량들

초속도 :  $\mathbf{v}_0 = -v_0 \hat{\mathbf{y}}$  m/sec

$t$ 초 후의 속도 :  $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{y}}$  m/sec

낙하 물체의 가속도 :  $\mathbf{a} = g \hat{\mathbf{y}}$  m/sec<sup>2</sup>

물체의 변위 :  $\mathbf{y} = y \hat{\mathbf{y}}$  m/sec

을 벡터 운동 상태 방정식 (4),(5) 및(6) 에 대입하면

$$v \hat{\mathbf{y}} = -v_0 \hat{\mathbf{y}} \cdot t + g \hat{\mathbf{y}} \cdot t \quad (19)$$

$$y \hat{\mathbf{y}} = -v_0 \hat{\mathbf{y}} \cdot t + \frac{1}{2}(g \hat{\mathbf{y}}) \cdot t^2 \quad (20)$$

$$(v \hat{\mathbf{y}})^2 - (-v_0 \hat{\mathbf{y}})^2 = 2(g \hat{\mathbf{y}}) \cdot (y \hat{\mathbf{y}}) \quad (21)$$

와 같다. 식 (19),(20) 및 (21)을 벡터의 성분으로 표시하면 각각

$$v = -v_0 + gt \quad (22)$$

$$y = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (23)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2gy \quad (24)$$

과 같다. 그림 3 에서 식 (22),(23) 및 (24)을 나타내었다.

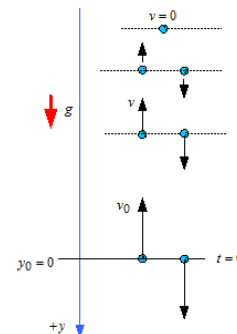


그림 3. 연직투상한 물체, 연직하방이 +y방향이다.  
 Fig. 3. Motion of object thrown upward, with downward direction +y.

## 2. 연직 상방을 +y-방향으로 선택

벡터 물리량들

$$\text{초속도 : } \mathbf{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}$$

$$t \text{ 초 후의 속도 : } \mathbf{v} = v \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}$$

$$\text{낙하 물체의 가속도 : } \mathbf{a} = -g \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}^2$$

$$\text{물체의 변위 : } \mathbf{y} = y \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}$$

을 벡터 운동 상태 방정식 (4),(5) 및(6) 에 대입하면

$$v \hat{\mathbf{y}} = v_0 \hat{\mathbf{y}} \cdot t - g \hat{\mathbf{y}} \cdot t \quad (25)$$

$$y \hat{\mathbf{y}} = v_0 \hat{\mathbf{y}} \cdot t + \frac{1}{2}(-g \hat{\mathbf{y}}) \cdot t^2 \quad (26)$$

$$(v \hat{\mathbf{y}})^2 - (v_0 \hat{\mathbf{y}})^2 = 2(-g \hat{\mathbf{y}}) \cdot (y \hat{\mathbf{y}}) \quad (27)$$

와 같다. 식 (25),(26) 및 (27)을 벡터의 성분으로 표시하면 각각

$$v = v_0 - gt \quad (30)$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (31)$$

$$v^2 - v_0^2 = -2gy \quad (32)$$

과 같다. 그림 4 에서 식 (30),(31) 및 (32)을 나타내었다.

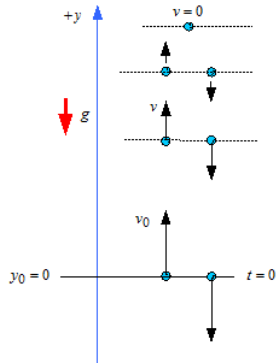


그림 4. 연직투상한 물체, 연직상방이 +y방향이다.  
Fig. 4. Motion of object thrown upward, with upward direction +y.

### III. 연직 투하된 물체의 운동 방정식

중력장 내에서 연직 투하된 물체의 운동 상태를 기술

하기 위해서 연직 하방을 +y-방향으로 택하거나 연직 상방을 +y-방향으로 선택하는 두 가지 방법을 사용한다.<sup>[2,7,9]</sup>

## 1. 연직 하방을 +y-방향으로 선택

벡터 물리량들

$$\text{초속도 : } \mathbf{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}$$

$$t \text{ 초 후의 속도 : } \mathbf{v} = v \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}$$

$$\text{낙하 물체의 가속도 : } \mathbf{a} = g \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}^2$$

$$\text{물체의 변위 : } \mathbf{y} = y \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}$$

을 벡터 운동 상태 방정식(4),(5) 및(6) 에 대입하면

$$v \hat{\mathbf{y}} = v_0 \hat{\mathbf{y}} \cdot t + g \hat{\mathbf{y}} \cdot t \quad (33)$$

$$y \hat{\mathbf{y}} = v_0 \hat{\mathbf{y}} \cdot t + \frac{1}{2}(g \hat{\mathbf{y}}) \cdot t^2 \quad (34)$$

$$(v \hat{\mathbf{y}})^2 - (v_0 \hat{\mathbf{y}})^2 = 2(g \hat{\mathbf{y}}) \cdot (y \hat{\mathbf{y}}) \quad (35)$$

와 같다. 식 (33),(34) 및 (35)을 벡터의 성분으로 표시하면 각각

$$v = v_0 + gt \quad (36)$$

$$y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (37)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2gy \quad (38)$$

과 같다.<sup>[8,9]</sup> 그림 5 에서 식 (36),(37) 및 (38)을 나타내었다.

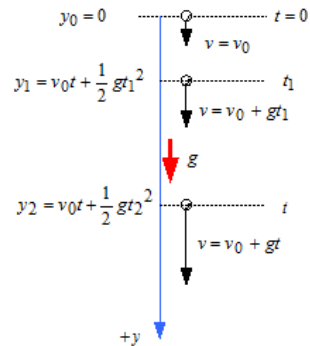


그림 5. 연직투하한 물체, 연직하방이 +y방향이다.  
Fig. 5. Motion of object thrown downward, with downward direction +y.

## 2. 연직 상방을 +y-방향으로 선택

벡터 물리량들

$$\text{초속도 : } \mathbf{v}_0 = -v_0 \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}$$

$$t \text{ 초 후의 속도 : } \mathbf{v} = v \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}$$

$$\text{낙하 물체의 가속도 : } \mathbf{a} = -g \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}^2$$

$$\text{물체의 변위 : } \mathbf{y} = y \hat{\mathbf{y}} \text{ m/sec}$$

을 벡터 운동 상태 방정식(4),(5) 및(6) 에 대입하면

$$v \hat{\mathbf{y}} = -v_0 \hat{\mathbf{y}} \cdot t - g \hat{\mathbf{y}} \cdot t \quad (39)$$

$$y \hat{\mathbf{y}} = -v_0 \hat{\mathbf{y}} \cdot t + \frac{1}{2}(-g \hat{\mathbf{y}}) \cdot t^2 \quad (40)$$

$$(v \hat{\mathbf{y}})^2 - (-v_0 \hat{\mathbf{y}})^2 = 2(-g \hat{\mathbf{y}}) \cdot (y \hat{\mathbf{y}}) \quad (41)$$

와 같다. 식 (39),(40) 및 (41)을 벡터의 성분으로 표시하면 각각

$$v = -v_0 - gt \quad (42)$$

$$y = -v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (43)$$

$$v^2 - v_0^2 = -2gy \quad (44)$$

과 같다. 그림 6 에서 식 (42),(43) 및 (44)을 나타내었다.

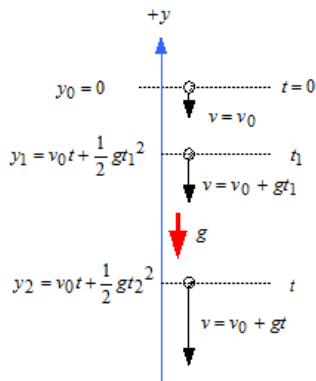


그림 6. 연직투하한 물체, 연직상방이 +y방향이다.

Fig. 6. Motion of object thrown downward, with upward direction +y.

## V. 결론

이 논문에서는 두 벡터의 스칼라 곱 (즉, 도트 곱)을

이용하여 중력장 내에서 연직 상방 또는 하방의 초속도로 운동하는 물체의 운동 상태를 기술하기 위한 벡터 운동 상태 방정식(vector kinematics equations)을 제시하였고, 응용 방법을 소개하였다. 이 결과를 이용하면, 수평면의 방향 또는 빗각을 이루는 초속도로 던져 올리거나 던져 내린 물체의 운동 상태를 해석하기 위하여 연직 기준 방향을 상방 또는 하방으로 임의 선택할 수가 있다.

## References

- [1] J. S. Kim, D. C. Jung, and Y. K. Kim, "A Study on LED Distance Recognition Measure Using Distance Measurement Correction Algorithm", Journal of the The Institute of Internet, Broadcasting and Communication, vol.17, no. 2, pp. 63-68, Apr. 30, 2017. <https://doi.org/10.7236/JIIBC.2017.17.2.63>.
- [2] K. Um, "University Physics," Bogdoo Publishing Company, ISBN 979-11-5906-287-793560, pp.134-186, 2017.
- [3] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker, "Fundamentals of Physics, 4 th ed." John Wiley & Sons, Inc. ISBN 0-471-57578-x, pp.25-29, 1974.
- [4] S. K. Foong, "From Moon-fall to motions under inverse square laws". European Journal of Physics. 29(5): 987. doi:10.1088/0143-0807/29/5/012, 2008.
- [5] B. Barlow, M. Niemirska, R. P. Gandhi, and W. Leblanc, "Ten years of experience with falls from a height in children", Journal of pediatric surgery, 18(4):509 - 511. doi:10.1016/S0022-3468(83)80210-3, PMID6620098, 1983.
- [6] J. D. Cutnel, K.W. Johnson, " Physics, 2nd ed." John Wiley & Sons ,Inc. ISBN 0-471-52919-2, pp.39-47, 1998.
- [7] P. M. Fishbane, S. Gasiorowicz, and S. T. Thornton, "Physics for Scientists and Engineers, 2nd ed." Prentice Hall, ISBN 0-13-231176-3, pp.34-43, 1996.

- [8] S. Salvia, " Galileo's Machine': Late Notes on Free Fall, Projectile Motion, and the Force of Percussion (ca. 1638 - 1639)". Physics in Perspective. 16(4): 440 - 460. Bibcode: 2014 PhP....16..440S, doi:10.1007/s00016-014-0149-1, 2014.
- [9] P. A. Tipler, G. Mosca, "Physics for Scientists and Engineers", Chapter 2 (5th edition), W. H. Freeman and company: New York and Basing stoke, 2003.

### 저자 소개

#### 엄 기 홍(정회원)



#### 학력

- BS: 한양대학교 전자공학과
- MS: Dept. of Electrical & Computer Engineering, Polytechnic Institute of Engineering, NYU (New York University), New York, USA
- Ph.D: Dept. of Electrical & Computer Engineering, New Jersey Institute of Technology (NJIT), New Jersey, USA

#### 경력

- TA, RA, and Lecturer at NJIT (New Jersey, USA)
  - Researcher at RS Microwave Company Inc. (New Jersey, USA)
  - Researcher at Physics Department, Princeton University (New Jersey, USA)
  - Adjunct Professor at NJIT (New Jersey, USA)
  - 강남대, 상명대, 한양대 강사
  - 현재 한세대학교 IT 학부 교수
- <주관심분야 : 안테나, 마이크로파, 전기전자재료>

※ Remark:

This work is from the presentation at IPACT 2017 Conference, held at Milyang Campus, Pusan National University.