

<https://doi.org/10.7236/IIBC.2017.17.6.59>

IIBC 2017-6-8

감쇄지수함수 확률분포에 의한 가우스, 레일리, 나카가미 확률 밀도 분포

The Gauss, Rayleigh and Nakagami Probability Density Distribution Based on the Decreased Exponential Probability Distribution

김정수*, 이문호**

Jeong-Su Kim*, Moon-Ho Lee**

요약 무선 통신시스템에서 Random 과정을 해석적으로 표현할 수 있으며 적당한 확률분포를 구할 수 있다. 감쇄지수함수 확률분포에 의한 가우스, 레일리, 나카가미 확률분포를 쉽게 유도했으며 시뮬레이션을 그림으로 보인다. 시간의 개념을 포함한 과정의 집합에 의한 확률적 표현이 Random과정(or Stochastic Process)인데 이를 무선환경의 조건에 따라 유도한다. 또한 가시거리 통신과 비가시거리 채널환경을 Rayleigh와 Rician 채널로 구체적인 예를 SISO, MIMO 환경에서 보인다. 또한, 본 논문에서 채널이 송신 블록 동안 일정하고 연속적인 송신 블록 사이에서 독립적으로 변하는 블록 페이딩 채널 모델을 가정함으로써 i.i.d 채널을 갖는 높은 SNR 영역에서 더 나은 성능을 얻을 수 있다는 동기를 부여한다. 이러한 변환을 실현하기 위한 알고리즘은 크로네 커 MIMO 채널에 적용 할 수 있다.

Abstract Random process plays a major role in wireless communication system to analytically derive the probability distribution function of the various statistical distribution. In this paper, we derive the decreasing function of the exponential distribution under the given condition which is expressed as wireless channel condition. The probability distribution function of Gaussian, Laplacian, Rayleigh and Nakagami distribution are also derived. Extensive simulation results of these statistical distributions are provided to prove that random process has a significant role in the wireless communications. In addition, the Rayleigh and Rician channels show specific examples of visible distance communication and invisible distance channel environment. This paper is motivated by that we assume a block fading channel model, where the channel is constant during a transmission block and changes independently between consecutive transmission block, can achieve a better performance in high SNR regime with i.i.d channel. This algorithm for realizing these transforms can be applied to the Kronecker MIMO channel.

Key Words : Random Process, Probability distribution, Rayleigh and Nakagami Rician Probability Distribution.

1. 서론

통신시스템 확률과 통계의 개념을 신호처리에 응용함

에 있어서 우리가 흔히 접하는 불규칙 과정이나 예측하기 어려운 잡음의 시간적 변화 등을 들 수 있다. 실제로 예를 들면 강연이나 음악멜로디의 과정, 저항단자간에

*정희원, 숭실사이버대학교 컴퓨터정보통신학과(주저자)

**정희원, 전북대학교 전자공학부(교신저자)

접수일자: 2016년 12월 14일, 수정완료: 2017년 11월 25일

게재확정일자: 2017년 12월 8일

Received: 14 December, 2016 / Revised: 25 November, 2017 /

Accepted: 8 December, 2017

**Corresponding Author: moonho@jbnu.ac.kr

Dept: Division of Electronic Engineering, Chonbuk National University, Korea

발생하는 전압잡음, 태양계로부터 전자방사, TV 신호, 진공관에서 전자의 순시전류, 전진, 전화 등에서의 신호는 고유의 랜덤특성을 갖고 있다. 이와 같은 유형의 과형에 대한 이론 및 처리분석과정으로서 결과를 확실히 예측할 수 없다는 점에서는 랜덤변수와 같으나 시간의 개념을 포함하기 때문에 과형의 집합(앙상블)에 의한 확률적 표현을 랜덤과정(random process) 또는 확률과정(stochastic process)이 된다. 랜덤과정의 정밀한 분석은 매우 어려울 뿐만 아니라 많은 수학적 기초를 필요로 하므로 여기서는 입력신호가 불규칙할 때 보통의 통신시스템에서 입·출력을 계산할 수 있게 하며 신호대 잡음비의 계산 및 통신시스템의 이득, 대역폭 등의 매개상수나 신호잡음비에 미치는 영향 등을 해석할 수 있다.

본 논문 II장 랜덤과정에 이어 III장서는 감쇄지수함수의 확률분포, IV장에서는 Gaussian 확률분포, V장에서는 Rayleigh 확률분포, VI장에서는 Nakagami 확률분포를 유도하고 VII장에서 결론을 맺는다.

II. 랜덤과정(Random Process)

랜덤과정은 랜덤신호의 집합이라고 할 수 있다. 확률실험의 각 랜덤결과를 표본점(sample point) ζ 로 표시하자. 모든 표본점의 집합을 확률실험에 대한 표본공간(sample space)이라고 칭하며 표본공간에서 각 표본점 ζ 에 어떤 확률규칙을 적용하여 실수 X 를 부여한다면 $X=X(\zeta)$ 과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

표본공간에서 이와 같이 정의된 함수를 랜덤변수 X 라고 한다. 랜덤과정은 랜덤변수의 개념을 확장해서 응용한 것이다. 랜덤변수의 경우에는 주어진 실험의 표본공간에서 표본점에 실수를 배당하여 정의하였으나 랜덤과정의 경우에는 각 표본점 ζ 에 시간의 함수인 과형 $X(t)$ 를 어떤 확률 규정에 따라서 부여함으로써 $X=X(t, \zeta)$ 과 같이 나타낼 수 있다.

즉, 랜덤과정에서 표본공간은 여러 가지 과형들의 집합으로 표현된다. 이 과형들이 집합을 앙상블(ensemble)이라 하고 이 앙상블에 포함되어 있는 각각의 과형을 표본함수(sample function)라고 한다. 이와 같이, 각 표본함수는 각각의 표본점에 대응되는 함수이다. 또, 표본공간에 대한 각 표본점의 확률분포는 앙상블에 대한 표본함수의 확률분포로 대응될 것이다. 확률이론에서 표본공간의 앙상블(과형들의 집합)과 이들의 확률분포함수를 묶

는 확률체계(probability system)를 랜덤과정이라고 한다 [1-4].

예를 들어, 동전을 두 개씩 연속적으로 던지는 경우를 생각해 보자. 만약 결과로 앞면(H)와 뒷면(T)만 가정하면 네 가지 가능한 결과가 나올 수 있는데 HH, HT, TH, TT가 될 것이고, 이런 결과에 대하여 각 표본점 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ 을 대응시킬 수 있다. 그렇다면 이 표본점에 대한 각각의 과형은 $X(t, \zeta_1), X(t, \zeta_2), X(t, \zeta_3), X(t, \zeta_4)$ 로 나타낼 수 있다. 예를 들면, $X(t, \zeta_k)=\sin kt$ 인 경우에 대한 앙상블은 네 개의 표본함수 $\sin t, \sin 2t, \sin 3t, \sin 4t$ 로 대응시키는 것이고 각 과형에 대한 확률은 1/4이 될 것이다. 주어진 표본공간에 대한 표본점의 수는 유한하거나 아주 많거나 아예 셀 수 없을 정도로 무한개를 갖는 것들로 구성되고 있다.

$X(t, \zeta)$ 는 랜덤과정을 나타낸다. 그러나, 편의상 ζ 를 빼고 $X(t)$ 로 랜덤과정을 표시하기도 하며 이러한 랜덤과정의 특별한 표본함수는 이탤릭체 $X(t)$ 로 나타내기로 한다. 여기서 우리는 다음과 같은 세 가지 개념에 유의해야 한다. (i) 시험의 결과, (ii) 이 결과에 대한 표본점, (iii) 이 표본점에 대한 표본함수(과형). 특히, 랜덤실험의 결과는 주로 과형으로 나타난다. 이러한 경우 결과의 개념과 이 결과에 대한 표본함수는 자주 혼동하는 경우가 있다. 예를 들면, 어떤 전기적 시스템의 출력에 잡음신호를 생각해 보자. 이 시스템은 각각의 시간에 대해 어떤 잡음과형의 집합을 이 랜덤과정에 대한 앙상블로 생각할 수 있다.

우리는 이 앙상블을 같은 시스템에 대해 되풀이 해서 관찰함으로써 얻을 수도 있다.

여러 가지 과형이 각 표본점(결과)에 대해 관련되어 있다는 것은 매우 중요하다. 여기서 과형 그 자체는 결정신호(deterministic signal)이므로 표본함수의 과형은 랜덤하게 나타나지 않으며 불규칙성은 어떤 특별한 표본함수에 대해 일어난다. 또, 표본공간에 대한 확률분포는 특별한 표본함수를 관찰함으로써 얻어질 수 있다. 어떤 랜덤과정은 해석적 표현으로 나타내기에 너무 복잡한 것도 있다. 전기적 시스템의 잡음신호가 이런 경우의 한 예라고 할 수 있다. 다른 경우에 대해서는 랜덤과정을 해석적으로 표현할 수 있으며 적당한 확률분포를 구할 수 있다. 예를 들면, 어떤 방송국에 의해 전송된 반송파신호를 받고 있는 수신기들의 집합을 고려해 보자. 송신기에서 수신기까지 반송파는 각 수신기마다 다른 통로를 거쳐서 들어 온다. 왜냐하면, 수신기가 모두 다른 지점에 위치하

고 있기 때문이다. 이것은 각 수신기에서 들어오는 신호의 위상 차이를 만들게 되며 안테나의 이득도 각 수신기 위치에 따라 다를 것이다. 결과적으로 수신된 신호파형의 집합을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$X(t)=A \cos(\omega_0 t+\theta) \quad (1)$$

여기서 진폭 A와 위상 θ 는 둘 다 랜덤변수이다. 우리는 A와 θ 의 확률분포함수를 결정하여야 한다. 예를 들면, 진폭 A는 가우시안 확률밀도 함수이고 θ 는 구간 $(0, 2\pi)$ 에서 균일한 분포를 갖는 다음과 같은 가우시안 랜덤변수라고 할 수 있다.

$$p_A(A) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(A-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (2)$$

$$p_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & (0 < \theta < 2\pi) \\ 0 & \text{그 이외의 구간} \end{cases} \quad (3)$$

주어진 표본함수에 대해 진폭 A와 위상 θ 는 상수이지만 다른 표본함수에 대해서는 변화하고 있다. 앙상블에 대한 이 변수의 확률밀도 함수가 식(2)와 식(3)에 나타나 있고 이 식에서 측정된 확률을 가진 앙상블은 랜덤과정의 일 예이다.

랜덤과정에 대한 다른 예를 들면 $X(t)=at+b$, 여기서 a와 b는 앙상블에 대한 어떤 확률분포를 갖는 랜덤변수이다. 마찬가지로 주어진 표본함수에 대해 a와 b는 상수이지만 다른 표본함수에 대해서는 변화한다[2, 4].

III. 감쇄지수함수의 확률분포

A. $p(x)=A \cdot \exp[-(\alpha x)^r]$ 이라고 하면, 확률의 합은

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-(\alpha x)^r} dx = 1$$

$$2A \int_0^{\infty} e^{-(\alpha x)^r} dx = 1 \quad (5)$$

$$(\alpha x)^r = t$$

윗 식을 x에 대해 미분하면

$$r\alpha(\alpha x)^{r-1} = \frac{dt}{dx}$$

이것은 $r\alpha(\alpha x)^{r-1}dx = dt$ 이 된다.

$$dx = \frac{dt}{r\alpha(\alpha x)^{r-1}} \quad (6)$$

$\Gamma(n)$ 의 정의는 다음과 같다.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \quad (7)$$

(5)식과 (6)식을 (4)식에 대입하면

$$2A \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{1}{\alpha r (\alpha x)^{r-1}} dt$$

$$= \frac{2A}{\alpha r} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{1}{(\alpha x)^{r(1-\frac{1}{r})}} dt$$

$$= \frac{2A}{\alpha r} \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\frac{(1}{r}-1)} dt$$

(7)식에 의해서

$$= \frac{2A}{\alpha r} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) = 1 \quad \text{따라서 } A = \frac{\alpha r}{2} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \quad (8)$$

(8)식을 p(x)에 대입하면

$$p(x) = \frac{\alpha r}{2} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) e^{-(\alpha x)^r} \quad (9)$$

$p(x)$ 의 분산을 구하면

$$\sigma^2 = 2 \int_0^{\infty} p(x) x^2 dx = 2 \frac{\alpha r}{2} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \int_0^{\infty} e^{-(\alpha x)^r} x^2 dx$$

$$= \frac{\alpha r}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \frac{1}{r\alpha^3} \Gamma\left(\frac{3}{r}\right) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}} \quad (10)$$

(10)식을 (9)식에 대입하면

$$p(x) = \frac{r}{2\sigma} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^r \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}\right)^{\frac{r}{2}}\right]$$

IV. Gaussian 확률분포

1. Gaussian distribution

$r=2$ 이면, $p(x)$ 는

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{2}{2\sigma} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{2}{2}}\right] \\ &= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right) \\ = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

따라서, $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}$

위 식은 그림 1과 같이 PDF(Probability density function)로 나타낸다.

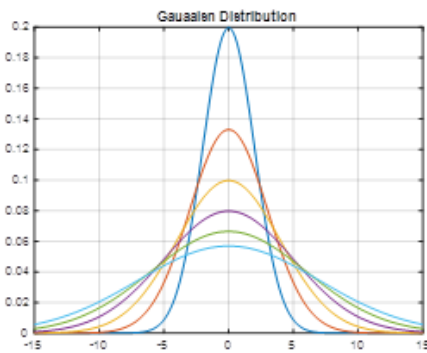


그림 1. Gaussian distribution
Fig. 1. Gaussian distribution.

2. Laplacian distribution

$r=1$ 이면, $p(x)$ 는

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2\sigma} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^1 \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &= \frac{1}{2\sigma} \cdot \sqrt{\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right) \cdot \sqrt{\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)}}\right] \\ &= \frac{1}{2\sigma} \cdot \sqrt{2} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right) \cdot \sqrt{2}\right] \Leftrightarrow (\Gamma(3) = 2, \Gamma(1) = 1) \\ p(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \cdot e^{-\sqrt{2} \cdot \frac{x}{\sigma}} \end{aligned}$$

위 식은 그림 2과 같이 PDF(Probability density function)로 나타낸다.

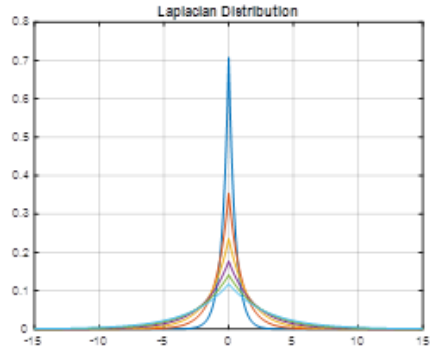


그림 2. Laplacian distribution
Fig. 2. Laplacian distribution.

3. Uniform distribution

$r=\infty$ 이면, $p(x)$ 는

$$p(x) = \frac{\infty}{2\sigma} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\infty} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\infty}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\infty}\right)}\right)^{\frac{\infty}{2}}\right]$$

$$p(x) = \frac{1}{a-b} \quad (b \leq x \leq a)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{3}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}} = 1, \Gamma\left(\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{3}{2}} = 1$$

위 식은 그림 3과 같이 PDF(Probability density function)로 나타낸다.

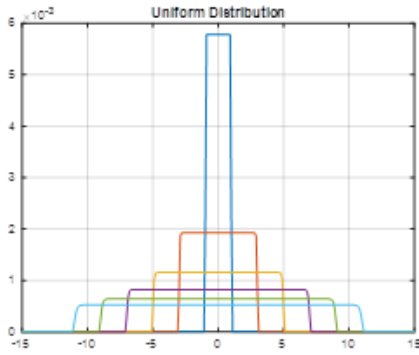


그림 3. Uniform distribution
 Fig. 3. Uniform distribution.

V. Rayleigh 확률분포

① Rayleigh Density Function(Nonline of sight 무선 채널) Rayleigh 밀도함수는 2개의 Gaussian 분포를 갖는 랜덤 변수에서 유도된다. [5] 부록에 실용 예를 보임.

2개의 Gaussian 분포를 갖는 랜덤 변수를 다음과 같이 정의하면,

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{2}\right]$$

$$p(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{2}\right]$$

$$p_{xy}(x, y) = p_x(x)p_y(y) = \frac{1}{2\sigma^2\pi} \exp[-(x^2 + y^2/2\sigma^2)]$$

여기에서, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 라 놓으면 윗 식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{2\sigma^2\pi} \exp[-(x^2 + y^2/2\sigma^2)] r dr d\theta, \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$p_{r_\theta}(r, \theta) dr d\theta$$

$$p_{r_\theta}(r, \theta) = \frac{r}{2\sigma^2\pi} \exp[-(x^2 + y^2/2\sigma^2)]$$

$$p_r(r) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{r_\theta}(r, \theta) d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{2\sigma^2\pi} \exp[-(r^2/2\sigma^2)] d\theta$$

$$= \frac{r}{\sigma^2} \exp[-(r^2/2\sigma^2)]$$

따라서,

$$p_r(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp[-(r^2/2\sigma^2)] \quad (\text{단 } r \geq 0)$$

$$p_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 < \theta < 2\pi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

위 식은 그림 4과 같이 PDF(Probability density function)로 나타낸다.

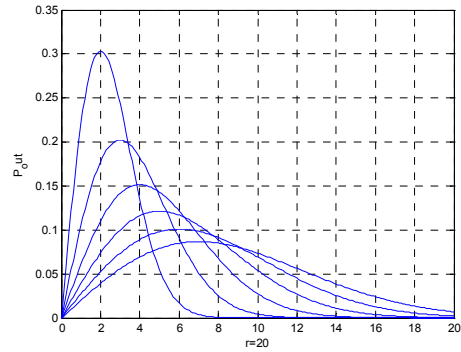


그림 4. Rayleigh Density Function
 Fig. 4. Rayleigh Density Function.

② Gamma distribution

$p(x) = A \cdot e^{-(a \cdot x)} \cdot x^{n-1}$ 일 때 다음 식을 유도한다.
 확률의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{x=-\infty}^{\infty} p(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-(\alpha \cdot x)} \cdot x^{n-1} dx = 1 \\ &= 2 \cdot A \int_0^{\infty} e^{-(\alpha \cdot x)} \cdot x^{n-1} dx \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \right] \text{이다.}$$

$$p(x) = \left[\frac{\alpha^n}{2 \cdot \Gamma(n)} \right] \cdot e^{-(\alpha x)} \cdot x^{n-1} \text{ 이 된다.}$$

$$\text{분산}(\sigma^2) = 2 \int_0^{\infty} p(x) \cdot x^2 dx$$

$$= \left[\frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \right] \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cdot x^{n+1} dx$$

$$= \left[\frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \right] \left[\frac{\Gamma(n+2)}{\alpha^{n+2}} \right]$$

$$\alpha = \frac{1}{\sigma} \sqrt{n(n+1)}$$

따라서,

$$p(x) = \left[\frac{1}{2 \cdot \Gamma(n)} \cdot \frac{1}{\sigma^n} \right] \cdot [n(n+1)]^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{\sigma} [n(n+1)]^{\frac{1}{2}}} \cdot x^{n-1}$$

분모, 분자에 $n-1$ 을 곱하면

$$p(x) = \frac{[n(n+1)]^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot \Gamma(n) \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{x}{\sigma} [n(n+1)]^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{n-1}$$

위 식은 그림 5과 같이 PDF(Probability density function)로 나타낸다.

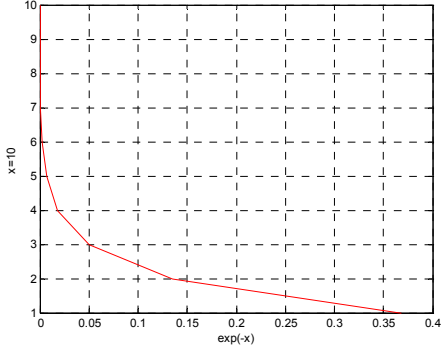


그림 5. Gamma distribution
Fig. 5. Gamma distribution.

VI. Nakagami 확률분포

$p(x) = A \cdot x^{2m-1} \cdot \exp[-\alpha x^2]$ 이라고 하면, 일반적으로 확률의 합은 1이므로, 그 식을 수학적으로 다시 표현하면 다음과 같다. [6]

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A \cdot x^{2m-1} \cdot e^{-\alpha x^2} dx = 1$$

$$2A \int_0^{\infty} x^{2m-1} \cdot e^{-\alpha x^2} dx = 1$$

$$\alpha x^2 = t \quad (12)$$

이고,

$$x = \sqrt{\frac{t}{\alpha}}, \quad 2\alpha x = \frac{dt}{dx}$$

이것은 $2\alpha x dx = dt$ 이 된다.

$$dx = \frac{dt}{2\alpha x} \quad (13)$$

이고, $\Gamma(n)$ 의 정의는

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \quad (14)$$

이다. (12)식과 (13)식을 (11)식에 대입하면,

$$\begin{aligned} & 2A \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{t}{\alpha}}\right)^{2m-1} e^{-t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} dt \\ &= \frac{2A}{\sqrt{\alpha^{2m-1}} \cdot 2\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} \sqrt{t}^{2m-1} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{A}{\alpha^m} \int_0^{\infty} t^{m-1} \cdot e^{-t} dt = 1 \end{aligned}$$

(14)식에 의해서

$$= \frac{A}{\alpha^m} \cdot \Gamma(m) = 1 \quad (15)$$

따라서 $A = \frac{\alpha^m}{\Gamma(m)}$

(15)식을 $p(x)$ 에 대입하면

$$p(x) = \frac{\alpha^m}{\Gamma(m)} \cdot x^{2m-1} \cdot \exp[-\alpha x^2] \quad (16)$$

$p(x)$ 의 분산을 구하면

$$\sigma^2 = 2 \int_0^{\infty} p(x) x^2 dx = 2 \cdot \frac{\alpha^m}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cdot x^{2m-1} dx$$

$$= \frac{2 \cdot \alpha^m}{\Gamma(m) \alpha^{m+1}} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^m dx$$

$$= \Gamma\left(\frac{m+1}{\Gamma(m)}\right) \cdot \alpha = \frac{m}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{m}{\sigma^2} = \frac{m}{\Omega} \quad (\sigma^2 = \Omega) \quad (17)$$

(17)식을 (16)식에 대입하면

$$p_R(r) = \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \cdot r^{2m-1} \cdot e^{-\frac{m r^2}{\Omega}}$$

위 식은 그림 6과 같이 PDF(Probability density function)로 나타낸다.

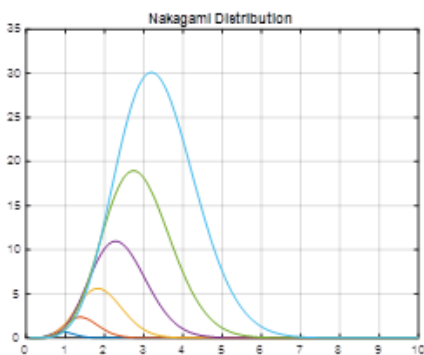


그림 6. Nakagami distribution
 Fig. 6. Nakagami distribution.

VII. 결론

본 논문은 Random Process의 지수함수의 감쇄 확률 분포를 기반으로 ①라플라스 확률분포, ②가우스 확률분포, ③Uniform 확률분포, ④Gamma 확률분포, ⑤Rayleigh 확률분포, ⑥Nakagami 확률분포를 쉽게 유도하고, 시뮬레이션을 보였다. 본 확률분포는 무선이동 통신 환경 조건에 따른 채널 확률 분포에 요긴하게 쓰이는 중요한 확률분포임을 확인했다. 응용예로 무선채널에 Rayleigh 확률분포를 적용하고 Block Circulant Jacket 행렬과 기존 Toeplitz 행렬을 비교 했을때 high SNR에 성능이 우수했다.

정확한 채널 모델을 생성하기 위해서는 특정 시간에 주어진 환경에서 반사체(reflector)의 위치, 반사체로부터 수신되는 신호의 전력, 반사체의 이동성 등 모든 반사체(reflector)들의 속성을 알고 있어야 한다. 그러나, 이러한 모든 정보를 수집하는 것은 실제로 불가능하기 때문에 ‘전형적(typical)’이거나 ‘평균적(average)’인 채널 상황을 나타내는 채널모델이 개발되어 왔다.

References

[1] Moon Ho Lee, Practical Information Theory, BokDu, 1998.
 [2] Marvin K. Simon, Probability Distribution Involving Gaussian Random variables, Springer 2006.
 [3] Moon Ho Lee, Over the Shannon (1948), KICS,

Vol.28. No.11. 2011.11

[4] John G.Proakis, Digital Communications, McGrawHill, 2011.
 [5] http://en.wikipedia.org/wiki/John_Strutt,_3rd_Baron_Rayleigh, Rayleigh(영국, 1842-1919 : 물리학자)는 1904년 노벨상을 수상하였다, Rayleigh 확률분포 발견.
 [6] Nakagami M. The m-Distribution, a general formula of intensity of rapid fading; in William C Hoffman, editor, Statistical Methods in Radio wave Propagation ; Proceeding of a symposium held June 18-20 1958 page 3-36; Pergamon press.
 [7] MoonHoLee et al “The Golden Ratio Jacket Code of MIMO Wireless Communications” <http://doi.org/10.7236/JIIBC.2017.17.4.83>, JIIBC 2017-4-11

부록

본 논문이 제안한 확률 분포를 SISO, MIMO 채널에 응용예를 보인다.

1. SISO(Simple Input Single Output)채널 모델링

1-1. Rayleigh 페이딩 채널과 Rician 페이딩 채널

옥내 채널 또는 옥외 채널에 상관없이 일반적인 무선 채널은 그림 7에 나타난 바와 같이 NLOS(Non Line-of-Sight) 환경과 LOS(Line-of-Sight) 환경으로 구분할 수 있다.

앞 장에서 설명한 바와 같이 NLOS 환경에서 수신되는 신호의 확률밀도함수(Probability Density Function)는 Rayleigh 분포로 유도되며, LOS 환경에서 수신되는 확률밀도함수는 Rician 분포로 유도된다.

확률 변수 x 에 대하여 Rayleigh 확률밀도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (18)$$

여기서 x 의 평균 전력은 $2\sigma^2$ 이다. 식 (18)의 Rayleigh 확률밀도함수는 Gaussian 분포를 갖는 두 랜덤 변수를 자

승하여 합한 후 제곱근은 취하여 새로운 랜덤 변수를 생성할 채널의 전파 환경 경우 그 랜덤 변수의 분포가 된다.

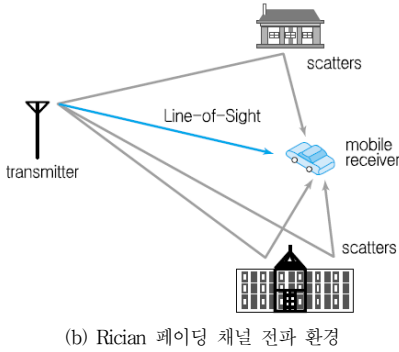
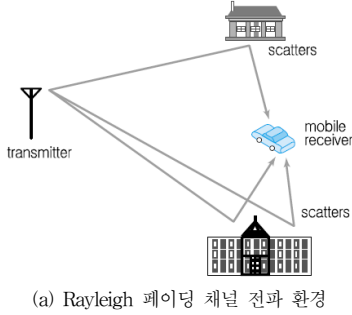


그림 7. Rayleigh 페이딩 채널과 Rician 페이딩
Fig. 7. Rayleigh fading and Rician fading.

즉, 각각 $N(0, \sigma^2)$ 의 분포를 갖는 w_1 과 w_2 랜덤 변수의 자승의 합은 x^2 (chi-square) 분포가 되며, 이 값의 제곱근은 Rayleigh 분포를 갖는다.

$$\sqrt{w_1^2 + w_2^2} \quad (19)$$

여기서 x 는 식 (17)에 주어진 평균 전력인 $2\sigma^2$ 인 Rayleigh 분포를 갖는다. MATLAB에 내장된 Gaussian 랜덤 변수를 생성하는 함수는 'randn'로서 $N(0,1)$ 의 분포를 갖기 때문에 프로그램 작성 시 이를 쉽게 사용하기 위하여 식 (19)를 다음과 같이 수정할 수 있다.

$$x = \sigma \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \quad (20)$$

여기서 새로운 변수 z_1 과 z_2 는 $N(0,1)$ 의 분포를 갖는 Gaussian 확률 변수이다.

일반적으로 무선 통신 시스템에서 무선 채널은 실수부와 허수부를 갖는 복소 채널로 주어진다. 이러한 복소

채널에서 실수부와 허수부는 독립적이며 $N(0, \sigma^2/2)$ 의 Gaussian 분포를 갖는다. 이 복소 채널 계수의 크기는 실수부와 허수부의 자승의 합이며, 평균 전력이 σ^2 인 Rayleigh 분포를 갖게 된다. 이러한 복소 채널은 다음과 같이 모델링된다.

– 무선 채널 모델링과

$$h = z_1 + jz_2 \quad (21)$$

여기서 h 는 평균 전력이 σ^2 인 Rayleigh 분포를 갖는다. $|h| = \beta$ 이라고 한다면 β 는 다음과 같이 Rayleigh 분포를 갖는다.

$$p(\beta) = \frac{2\beta}{\sigma^2} e^{-\beta^2/\sigma^2} \quad (22)$$

Rician 페이딩 채널은 그림 7에서 나타난 바와 같이 송신한 신호가 반사, 산란, 굴절 등에 의하여 손실되지 않고 직접 수신되는 신호인 LOS가 존재하는 무선 채널의 경우에 해당한다. 이러한 경우 확률 변수 x 에 대하여 Rician 확률밀도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+c^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{xc}{\sigma^2}\right) \quad (23)$$

여기서 $I_0(\cdot)$ 는 수정된 제1종 0차 Bessel 함수를 나타낸다. 또한, c^2 은 LOS 성분의 전력을 나타내고, σ^2 은 식 (18)에 주어진 Rayleigh 확률밀도함수에서 산란 성분들의 전력의 합을 나타낸다. 이 때, Rician K-factor는

$K = \frac{c^2}{2\sigma^2}$ 에 주어져 있다. 총 전력이 1인 경우에, K 가 0이면 LOS 성분이 존재하지 않기 때문에 크기 분포는 Rayleigh 확률밀도함수를 갖게 되며, K 가 증가할수록 Gaussian 분포에 접근한다. 일반적으로 K 가 -40dB정도이면 Rayleigh 채널로 가정하고, K 가 15dB 이상이면 Gaussian 채널로 가정한다. 채널을 모델링할 때에 Rician 페이딩은 LOS 환경에서 발생되며 이러한 환경에서는 반사 없이 신호가 도착하기 때문에 일반적으로 첫 번째 텀 채널을 모델링할 때에 적용된다. 그림 8은 Rayleigh 페이딩 채널과 Rician 페이딩 채널의 확률 분포를 보여주는 데, 이 그림에서 확인할 수 있듯이 이 페이딩 채널은 K 가 -40dB일 때 Rayleigh 분포에 근접하며, K 가 15dB일 때 Gaussian 분포를 갖게 된다(그림 8).

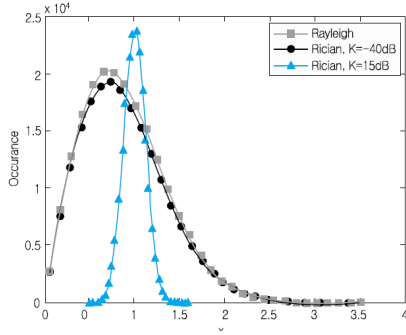


그림 8. Rayleigh 페이딩 채널과 Rician 페이딩 채널의 확률 분포
 Fig. 8. Probability distribution of Rayleigh fading and Rician fading.

2. MIMO 채널의 상관관계에 따른 Rayleigh 채널 용량 변화

Deterministic 채널 용량 수식으로부터, SNR이 높을 때 다음 식으로 근사화 할 수 있다[7].

$$C \approx \max_{R_{xx}} \log_2 \det(R_{xx}) + \log_2 \det\left(\frac{E_x}{N_0 N} H_w H_w^H\right) \quad (24)$$

위 수식으로부터 $\det(R_{xx})$ 가 최대가 되기 위해서는 조건 $R_{xx} = I_N$ 이 만족되어야 함을 알 수 있다. 상관관계가 있는 MIMO 채널을 식 (25)과 같이 모델링하면, 해당 채널 용량은 식 (26)와 같이 표현된다.

$$H = R_r^{1/2} H_w R_t^{1/2} \quad (25)$$

$$C = \log_2 \det\left(I_{N_r} + \frac{E_x}{N_0 N_T} R_r^{1/2} H_w R_t^{1/2} H_w^H R_r^{1/2}\right) \quad (26)$$

여기서 H_w 는 i.i.d Rayleigh fading 채널 계인 행렬이다. 식 (26)로 부터 $N_T = N_R = N$, R_r 과 R_t 가 full rank이고 SNR이 높을 때, 다음의 근사식을 얻는다.

$$C \approx \log_2 \det\left(\frac{E_x}{N_0 N_T} H_w H_w^H\right) + \log_2 \det(R_r) + \log_2 \det(R_t) \quad (27)$$

식 (27)와 관계식 (28) 및 (29)에 의해, 상관관계가 있는

때 MIMO 채널 용량이 감소함을 알 수 있다.

$$\det(R_r) = \prod_{i=1}^N \lambda_i(R_r) \leq 1 \quad (28)$$

$$\log_2 \det(R_r) \leq 0 \quad (29)$$

송신 안테나 사이와 수신 안테나 사이에 모두 상관관계가 있을 때 아래 수식으로 표현되는 만큼 용량이 감소된다.

$$\log_2 \det(R_r) + \log_2 \det(R_t) \quad (30)$$

Determinant와 eigenvalue의 관계는 아래와 같다.

$$\det(R) = \prod_i \lambda_i(R) \quad (31)$$

또한, 산술평균과 기하평균의 관계에 의해 아래 관계가 성립한다.

$$\left(\prod_i \lambda_i\right)^{\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{n} \sum_i \lambda_i = 1 \quad (32)$$

위의 두 관계식을 결합하면 아래의 관계를 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{N} \log_2 \det(R) \leq 0 \quad (33)$$

$$\log_2 \det(R) \leq 0 \quad (34)$$

그림 8은 채널 상관관계에 따른 용량 감소를 나타낸다. 송신단 안테나간에는 상관관계가 있고 수신단 안테나간에는 $R_r = I_r$ 와 같이 상관관계가 없다고 가정하였다. SNR=18dB에서 약 3.3 bps/Hz의 용량이 상관관계에 의해서 감소함을 관찰할 수 있다. 상관관계가 높다는 것은 modal decomposition에 의해 표현되는 여러 모드들 중 낮은 SNR을 갖는 모드가 존재할 확률이 높다는 의미이다.

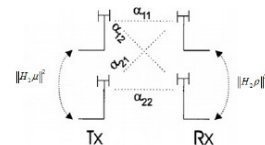


그림 9. 2 X 2 블록 MIMO 상관 채널: μ 과 ρ 는 Tx-Rx 상관 계수

Fig. 9. 2 X x block MIMO correlated channel; μ and ρ are Tx-Rx correlation

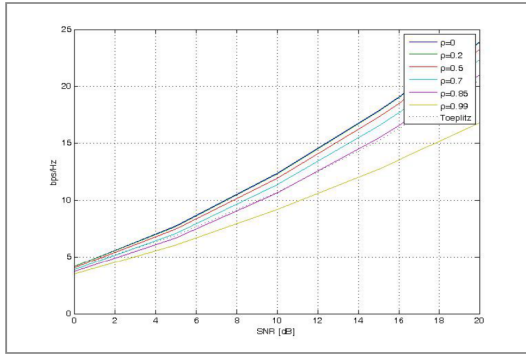


그림 10. 채널 용량 대 SNR.
Fig. 10. Channel capacity versus SNR.

그림 9. 채널 캐퍼시티와 SNR 또한, R_t 가 다음과 같이 Toeplitz 행렬과 Block Circulant 행렬 (36)일 때, BER과 E_b/N_0 와 CDF의 시뮬레이션도 보인다.

$$R_t = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & & \\ t_2 & t_1 & t_0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ t_{n-1} & & & & t_0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

따라서,

$$R_t = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \rho \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \rho \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad 0 < \rho < 1. \quad (36)$$

Toeplitz 채널 행렬에 비해 제안한 채널 블록 회전 Jacket 행렬이 High SNR에 우수함을 보였다.

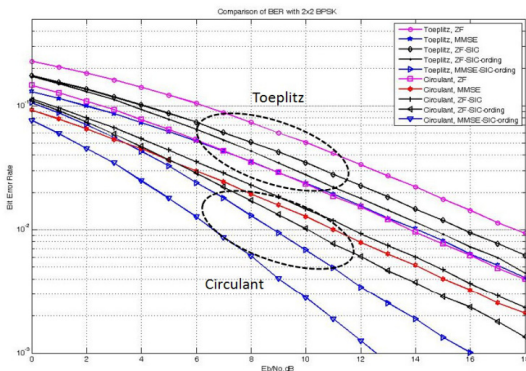


그림 11. 4 X 4 MIMO와 대각 블록 4 X 4 MIMO 심볼 에러율.
Fig. 11. Comparison of 4 X 4 MIMO and Block Diagonal 4 X 4 MIMO Symbol Error Rate.

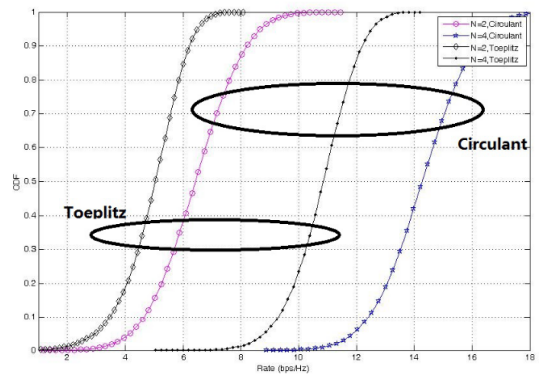


그림 12. 2 X 2, 4 X 4 MIMO 채널 상관 CDF.
Fig. 12. CDFs of the correlate 2 X 2 and 4 X 4 MIMO channel.

저자 소개

김 정 수 (정회원)



- 1998년 : 전북대학교 정보통신공학과 석사
- 2003년 : 전북대학교 컴퓨터공학과 박사
- 2002년 6월 ~ 현재 : 숭실사이버대학교 컴퓨터정보통신학과 부교수
- <주관심분야 : 이동통신, IoT>

이 문 호 (정회원) 교신저자



- 1984년 전남대학교 전기공학과 박사, 통신기술사
- 1985년~1986년 미국 미네소타 대학 전기과 포스트닥터
- 1990년 일본동경대학 정보통신공학과 박사
- 1970년~1980년 남양MBC 송신소장
- 1980년 10월~2010년 2월 전북대학교 전자공학부 교수
- 2009년 4월~2013년 월 WCU-2 연구책임교수
- 2015 국가연구개발 우수성과 100선
- 현재 전북대학교 전자공학부 초빙교수
- <주관심분야 : 무선이동통신, 통신이론, Molecular communication>

※ 본 논문은 2017년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No.2015R1A2A1A05000977)