

차단판에 의해 운동이 제한된 외팔보의 혼돈 진동

Chaotic Vibrations of a Cantilevered Beam with Stops to Limit Motions

최 봉 문* · 류 봉 조** · 김 영 식** · 구 경 완†
(Bong-Moon Choi · Bong-Jo Ryu · Young-shik Kim · Kyung-Wan Koo)

Abstract - The vibration of the structures with restrained motion has long been observed in various engineering fields. When the motion of vibrating structure is restrained due to the adjacent objects, the frequencies and the mode shapes of the structure change and its vibration characteristics becomes unpredictable, in general. Although the importance of the study on this type of vibration model increases in many engineering areas, most studies conducted so far are limited to the theoretical study on dynamic responses of the structure with stops, including some experimental works. Specially, the study on the nonlinear phenomena due to the impact between the structure and the stops have been mainly performed theoretically. In the paper, both numerical analyses and experiments are conducted to study the chaotic vibration characteristics of the nonlinear motion and the dynamic response of a cantilevered beam which has restrained motion at the free end by the stops. Results are presented for various magnetic forces and gaps between the beam and stops. The conclusions are as follows : Firstly, Numerical simulation results have a good agreement with experimental ones. Secondly, the effect of higher modes of beams are increased with increasing magnitude of exciting force, and displacement and velocity curves become more complicated shapes. Thirdly, nonlinear characteristics tend to appear greatly with increasing magnitude of exciting force, and fractal dimension is increased.

Key Words : Fractal dimension, Chaotic vibration, Limit motion, A cantilevered beam, Nonlinear motion

1. 서 론

제한된 운동을 갖는 구조물의 진동에 관한 연구는 공학의 여러 분야에서 많은 관심의 대상이 되어져 왔다. 예를 들어, 열교환기(heat exchanger)에서 파이프 구조물과 같은 파이프 시스템들은 내부 유동유체에 의해 진동을 하고, 차단판(stops)이나 튜브 간극 조절장치 등과 부딪혀 충돌하여 운동을 제한받게 되면, 구조물의 진동수와 모드형상(mode shape)이 변하게 되고 예측하기 힘든 무질서한 진동특성을 갖게 된다. 이러한 연구들의 초기 연구들은 비선형 스프링 지지된 보의 강제진동문제라든지, 구속조건을 갖는 시스템의 동적 응답연구들로서 주로 이론적인 연구가 대부분이었다[1]. 운동을 구속받는 구조물의 진동에 관한 본격적인 연구는 Chen 등에 의하여 이루어졌는데, 이들은 양단 고정보의 중간에 차단판을 설치하여 이를 단일모드로 다루었고[2], Rogers와 Pick는 차단판을 갖는 외팔보의 운동을 유한요소법으로 해석하였다[3].

Paidoussis는 운동을 구속받고 내부 유동유체가 흐르는 파이프 구조물의 안정성 문제에 있어 임계 유속을 구하였다[5]. Park 등은 카오스상태 기계의 특성이 카오스 특성과 같음을 증명하였고[6], Dumont는 한단이 고정되고 타단이 2개의 차단판에 의해 구속받는 보의 진동문제와 응답을 유한차분법(finite difference method)과 Runge-Kutta 방법 등 다양한 종류의 수치 해석적 방법을 이용하여 그 결과들을 비교하였다[7]. Lin과 Chang은 다수의 지지점(support points)을 갖는 연속보(continuous beam)의 자유진동 문제를 전달행렬법(transfer matrix method)을 이용하여 다루었는데, 지지 경간의 강성과 위치에 따른 수치해석을 행하였다[8]. Yin 등은 주기적인 외력을 받고 차단판에 충돌하는 외팔보의 천이응답(transient response)을 구하였다[9]. Dupac과 Beale는 기계시스템의 동적 거동에 미치는 간극과 크랙의 영향에 대한 연구를 하였다[10]. 그러나 이상의 연구들은 운동의 제한을 받는 구조물의 진동특성에 관한 연구들이었다 하더라도 대부분이 이론적 연구들이었거나 동적응답에 대한 실험적 검증 연구들이었고, 구조물과 차단판의 충격에 의한 비선형 진동특성들에 대한 체계적인 연구는 크게 부각되지 못하였다.

따라서 본 논문에서는 차단판에 의하여 운동의 제한을 받는 외팔보의 동적응답 뿐만 아니라 운동의 비선형성이 강한 경우의 혼돈진동 특성을 차단판의 간극변화, 자기력(magnetic force)의 변화에 따라 이론 및 수치해석과 실험을 병행하여 연구하는데 그 목적이 있다.

† Corresponding Author : Dept. of ICT Automotive Engineering, Hoseo University, Korea.

E-mail : alarmkoo@hoseo.edu

* Heller Industries Korea.

** Dept. of mechanical Engineering, Hanbat University, Korea

Received : November 14, 2017; Accepted : November 30, 2017

2. 이론해석

2.1 수학적 모델 및 운동방정식

보의 자유단에 설치된 차단판에 의해 운동이 제한되는 한단고정 타단자유 보 모델에 대한 그림은 Fig. 1에 나타난 바와 같다.

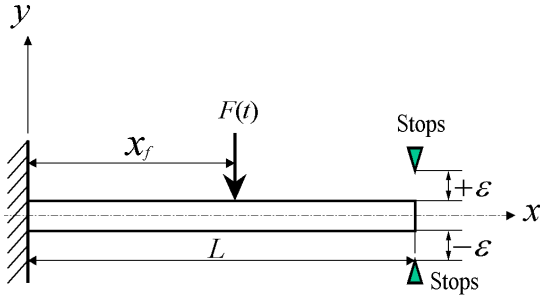


그림 1 차단판을 갖는 외팔보의 수학적 모델

Fig. 1 A mathematical model of a cantilevered beam with stops.

Fig. 1에서 $F(t)$ 는 외부의 가진력 (exciting force), L 은 보의 길이, ϵ 은 차단판과 보와의 간극을 나타낸다. Fig. 1 모델에 대한 운동방정식은 다음과 같은 강제진동방정식으로 귀결된다.

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C \frac{\partial y}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (1)$$

여기서, m 은 보의 단위 길이당 질량, C 는 감쇠계수, EI 는 보의 굽힘강성 계수, $F(x, t)$ 는 외부에서 가해지는 조화집중 가진력을 나타낸다. Fig. 1 모델에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$x = 0 \text{에서; } y(0, t) = 0, \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (2)$$

$$x = L \text{에서; 비접촉시 ; } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t) = 0, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L, t) = 0 \quad (3)$$

$$\text{접촉시; } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t) = 0, y(L, t) = \epsilon \text{ 또는 } -\epsilon \quad (4)$$

한편, 보의 자유단까지의 운동은 다음과 같은 구속조건

$$-\epsilon \leq y(L, t) \leq \epsilon \quad (5)$$

을 가지며, 초기조건들은 식 (6)과 같다.

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad -\epsilon \leq y_0(L) \leq \epsilon, \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad (6)$$

여기서 $y_0(x)$ 는 초기변위를, $v_0(x)$ 는 초기속도를 나타낸다. 경계조건 식(2~4), 구속조건 식(5) 그리고 초기조건식(6)에 의한

계의 해는 보가 차단판과 접촉되는 경우와 그렇지 않은 2가지 경우로 나눌 수 있다.

또한, 보가 차단판과 충돌한 후의 반발속도는 반발계수와외의 관계에 의해 다음과 같이 가정한다.

$$\dot{y}_r(x) = -e \dot{y}(x, t_s) \quad (7)$$

여기서 $\dot{y}_r(x)$ 는 충돌후의 반발속도, e 는 반발계수, $\dot{y}(x, t_s)$ 는 충돌속도 그리고 t_s 는 충돌하는 순간의 시간을 나타낸다.

2.2 접촉영역 및 비접촉영역

2.2.1 비접촉영역

차단판과 보가 접촉하지 않아 운동구속을 맞지 않는 경우, 식 (1)의 해는 외팔보 구조물에 대한 문제가 되므로 다음과 같이 모드합(mode summation)방법에 의해 가정할 수 있다.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \quad (8)$$

여기서, $q_n(t)$ 는 일반화된 좌표, $\phi_n(x)$ 는 계의 고유함수이다.

식 (8)을 식(1)에 대입하고 양변에 $\phi_m(x)$ 의 내적을 취하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \int_0^L m \phi_m(x) \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \phi_n(x) dx + \int_0^L C \phi_m(x) \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \phi_n(x) dx \\ & + \int_0^L EI \phi_m(x) \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \right] dx = \int_0^L \phi_m(x) F(x, t) dx \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)는 다음과 같은 고유함수(eigen function)의 성질

$$\begin{aligned} & \int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n), \\ & \int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx = L \quad (m = n) \end{aligned} \quad (10)$$

을 이용하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = Q_n(t) \quad (11)$$

여기서, ζ_n 은 모달 감쇠계수, ω_n 은 고유진동수, $Q_n(t)$ 은 n 번째 일반화된 힘을 나타내며, 다음과 같이 표현된다.

$$Q_n(t) = \frac{1}{mL} \int_0^L F(x, t) \phi_n(x) dx \quad (12)$$

한편, 외팔보에 대한 ω_n 과 ϕ_n 은 다음과 같다.

$$\omega_n = (\alpha_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

$$\phi_n(x) = \cosh \alpha_n x - \cos \alpha_n x - \frac{\sinh \alpha_n L - \sin \alpha_n L}{\cosh \alpha_n L + \cos \alpha_n L} (\sinh \alpha_n x - \sin \alpha_n x) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

여기서 $\alpha_n L$ 은 $1 + \cos \alpha_n L \cdot \cosh \alpha_n L = 0$ 을 만족하는 상수이다.

이제, 보와 차단판의 비접촉영역에서의 초기조건들의 관계된 식을 표현하자.

① 비접촉 구간에서의 초기조건 (처음 접촉이전)

식 (8)을 식 (6)에 대입한 후 식 (10)의 고유함수사이의 성질을 이용하면 다음과 같이 초기조건들이 표시된다.

$$q_n(0) = \frac{1}{L} \int_0^L \phi_n(x) y_0(x) dx, \quad \dot{q}_n(0) = \frac{1}{L} \int_0^L \phi_n(x) V_0(x) dx, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

② 비접촉 구간에서의 초기조건 (접촉 후)

이 경우는 보가 차단판과 접촉한 후 반발되는 경우로써, 이 때의 초기조건은 접촉직후 바로 보의 변형전의 상태로 복귀하는 경우와 짧은 시간이지만 보와 차단판이 충돌한 후 얼마의 지속시간(duration time)을 가진 후 복귀하는 두 가지 경우로 나누어 조건을 선택해야 한다.

(a) 충돌직후 바로 복귀하는 경우

이 경우는 차단판과 보가 충돌한 직후 바로 반발되어 복귀하는 경우로 이 때의 진입 조건들은 다음과 같다.

$$y_r(x) = \bar{y}(x, t_s), \quad \dot{y}_r(x) = -e \dot{\bar{y}}(x, t_s) \quad (16)$$

식 (8)을 식(16)에 대입하면 다음과 같은 초기조건을 얻는다.

$$q_n^r = q_n(t_s), \quad \dot{q}_n^r = -e \dot{q}_n(t_s), \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (17)$$

여기서 q_n^r 은 일반화된 좌표, \dot{q}_n^r 는 일반화된 속도벡터를 나타낸다.

(b) 충돌후 지속시간을 갖고 복귀하는 경우

이 경우는 차단판과 보가 충돌하여 순간적으로 한단고정 타단한지의 경계조건을 가진 후 반발되어 복귀하는 경우로써 진입조건은 다음과 같다.

$$y_f(x) = y(x, t_f), \quad \dot{y}_f(x) = \dot{y}(x, t_f) \quad (18)$$

여기서 $y_f(x)$ 와 $\dot{y}_f(x)$ 는 보가 비접촉영역으로 들어갈 때의 횡방향의 변위와 속도를 나타내며, t_f 는 보가 접촉상태로부터 떨어

질 때의 시간이다. 식 (8)을 식 (18)에 대입하면 다음과 같은 초기조건들을 얻을 수 있다.

$$q_n = \frac{1}{L} \int_0^L y_f(x) \phi_n(x) dx, \quad \dot{q}_n = \frac{1}{L} \int_0^L \dot{y}_f(x) \phi_n(x) dx, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (19)$$

2.2.2 접촉영역

보가 접촉된 상태에서는 고정-단순지지(clamped-pinned)의 경계조건을 만족하며 이에 대한 그림은 Fig. 2와 같다.

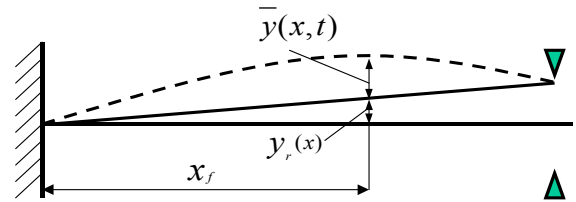


그림 2 접촉 형태에서의 보의 변위

Fig. 2 Displacement of beam at contact configuration.

그림에서 $y_r(x)$ 는 접촉순간의 변위, $\bar{y}(x, t)$ 는 접촉후의 발생하는 추가변위를 나타내며 전체변위 $y(x, t)$ 는 다음과 같이 나타내진다.

$$y(x, t) = y_r(x) + \bar{y}(x, t) \quad (20)$$

식 (20)을 식 (1)에 대입하면 $\bar{y}(x, t)$ 에 대한 식은 다음과 같이 된다.

$$m \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} + C \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial x^4} = \bar{F}(x, t) \quad (21)$$

$$\bar{F}(x, t) = F(x, t) - EI \frac{\partial^4 y_r}{\partial x^4} \quad (22)$$

한편, $\bar{y}(x, t)$ 에 대한 경계조건은 식(20)과 (2) 및 (4)에 의해 다음과 같이 된다.

$$\bar{y}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \bar{y}(L, t) = 0, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(L, t) = 0, \quad (23)$$

이 때의 복귀조건은 다음과 같다.

$$\bar{y}(x, t_s) = 0, \quad \dot{\bar{y}}(x, t_s) = \dot{y}(x, t_s) \quad (24)$$

식 (21)의 고유함수를 $\bar{\phi}_n(x)$, 일반화된 좌표를 $\bar{q}_n(t)$ 이라고 하면, 변위 $\bar{y}(x, t)$ 를 다음과 같이 모드의 합으로 표시할 수 있다.

$$\bar{y}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{q}_n(t) \bar{\phi}_n(x) \quad (25)$$

식 (25)를 식 (21)에 대입하면 다음과 같은 \bar{q}_n 에 대한 미분방정식을 얻는다.

$$\frac{d^2 \bar{q}_n}{dt^2} + 2\bar{\zeta}_n \bar{\omega}_n \frac{d\bar{q}_n}{dt} + \bar{\omega}_n^2 \bar{q}_n = \bar{Q}_n(t) \quad (26)$$

여기서, $\bar{\zeta}_n$, $\bar{\omega}_n$, \bar{Q}_n 는 한단고정-타단힌지의 경계조건에 대한 n 번째 모드의 모달감쇠계수, 고유진동수, 일반화된 힘을 나타내며 $\bar{Q}_n(t)$ 는 다음식과 같이 된다.

$$\bar{Q}_n(t) = \frac{1}{mL} \int_0^L F(x,t) \bar{\phi}_n(x) dx \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (27)$$

또한, 한단고정 타단힌지보에 고정-단순보에 대한 $\bar{\omega}_n$ 와 $\bar{\phi}_n(x)$ 를 표시하면 다음과 같다.

$$\bar{\omega}_n = (\bar{\alpha}_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_n(x) = & \cosh \bar{\alpha}_n x - \cos \bar{\alpha}_n x \\ & - \frac{\cosh \bar{\alpha}_n L + \cos \bar{\alpha}_n L}{\sinh \bar{\alpha}_n L + \sin \bar{\alpha}_n L} (\sinh \bar{\alpha}_n x - \sin \bar{\alpha}_n x) \end{aligned} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (29)$$

여기서, $\bar{\alpha}_n L$ 은 $\tanh \bar{\alpha}_n L = \tan \bar{\alpha}_n L$ 을 만족하는 상수이다.

초기조건은 식 (25)를 식 (24)에 대입하여 얻게 된다.

$$\bar{q}_n^r = 0, \quad \dot{\bar{q}}_n^r = \frac{1}{L} \int_0^L \dot{y}(s,t_s) \bar{\phi}_n(x) dx, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (30)$$

3. 동적 응답 수치해석

차단판에 의해 운동의 제한을 받는 보의 동적응답에 의한 수치해석은 상용 ANSYS Package에 의한 유한 요소 해석으로 이루어졌으며, 요소의 수는 20개로 나누었다. 또한, 수치결과는 차단판이 존재하지 않는 경우와 차단판이 존재하는 두가지의 경우에 대해 실험결과와 비교하였다. Fig. 3은 차단판이 존재하지 않는 경우, 보의 길이 $L=400\text{mm}$ 로 고정시킨 후, 가진력의 크기가 100mV 로 보의 1차 고유진동수(15.55Hz)로 가진된 경우의 동적응답에 대한 수치 시뮬레이션 결과와 실험결과를 비교한 것이다. 그림에 나타난 바와 같이 수치 결과와 실험결과는 실험적으로 잘 일치하고 있음을 알 수 있어 본 논문의 ANSYS 모델링의 타당성

이 검토되었다. Fig. 4는 차단판이 존재하는 경우에 있어, 보의 길이 $L=300\text{mm}$ 로 고정시킨 후, 차단판 간격 ϵ 이 $\epsilon=0.5\text{mm}$ 일 때 가진력의 크기를 1000mV 의 1차 고유진동수(27.25Hz)로 가진시켰을 경우에 대한 수치결과와 실험결과를 비교한 그림이다. 그림에 나타난 바와 같이 차단판이 존재하는 경우는 수치결과와 실험결과가 약간의 차이를 보이고 있음을 알 수 있다. 그 이유로는 양쪽 차단판과 보의 간격이 완전히 통일하지 않은 결과라고도 판단되며, 보는 강(steel)으로 제작된데 비해, 보와 충돌하는 차단판은 알루미늄으로 제작되었기 때문에 충돌로 인해 차단판의 끝이 다소 일그러지는 영향인 것으로 사료된다.

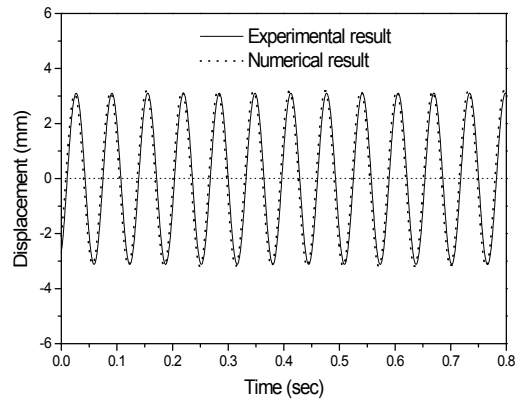


그림 3 차단판이 없는 시험보의 전체변위

Fig. 3 Total displacement of test beam without stops

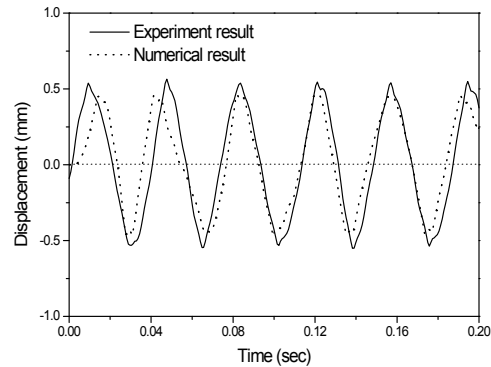


그림 4 차단판이 있는 시험 보의 전체변위

Fig. 4 Total displacement of test beam with stops.

4. 실험 및 실험결과

4.1 실험장치

Fig. 5와 Fig. 6은 각각 장치 개략도와 장치사진을 보여준다. Fig. 5에 나타난 차단판은 시험보와의 간격을 자유롭게 조정할

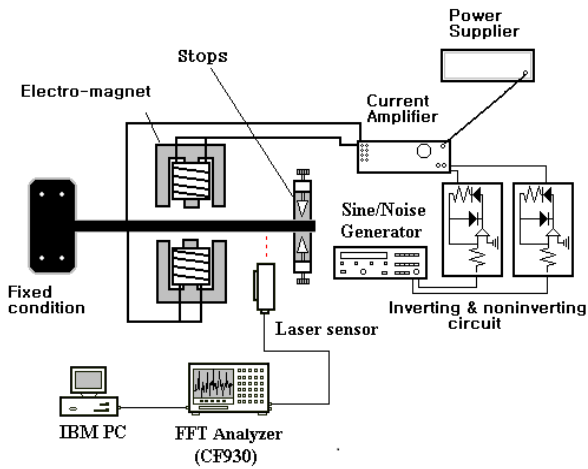


그림 5 실험장치의 개략도
 Fig. 5 Schematic diagram for experimental setup.

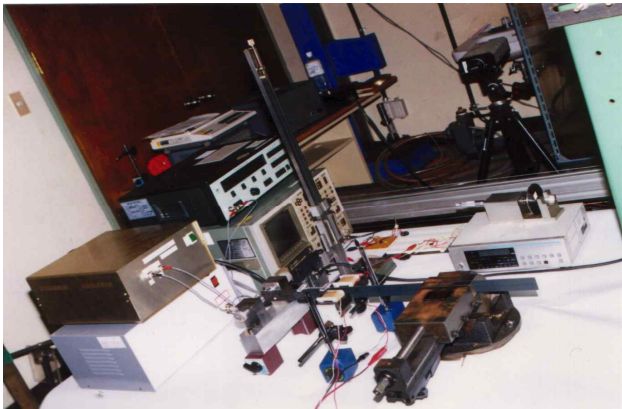


그림 6 실험장치
 Fig. 6 Photograph of experimental setup.

수 있도록 레버로 구성하였고, 전자석은 페라이트코어(ferrate core)에 직경 0.6(mm)의 에나멜 코일을 8겹으로 감아 저항이 3 Ω 되도록 제작하였다. 본 논문의 실험목적에 의해 한쪽 전자석은 반파정류회로, 다른 한쪽은 위상도 변화시키기 위해 반파 반전회로와 연결시켜 구성하였으며, 이 회로들에 대한 그림은 Fig. 7 및 Fig. 8과 같고, 시험보에 대한 제원은 Table 1과 같다.

4.2 실험

실험은 본 실험에 앞서, 예비실험으로 먼저 시험보가 차단판과 충돌할 수 있도록 하기 위해, 시험보의 동적 최대변위를 측정하였으며, 둘째, 가진력의 주파수를 시험보의 공진주파수로 가진하기 위해 시험보의 고유진동수를 구하였다. Table 2는 고유진동수의 이론값과 실험값을 보여주고 있다.

한편, 본 실험의 실험순서는 다음과 같다. 첫째, 시험보를 1차 고유진동수로 가진시켜 차단판이 존재하지 않는 경우에 대해, 보

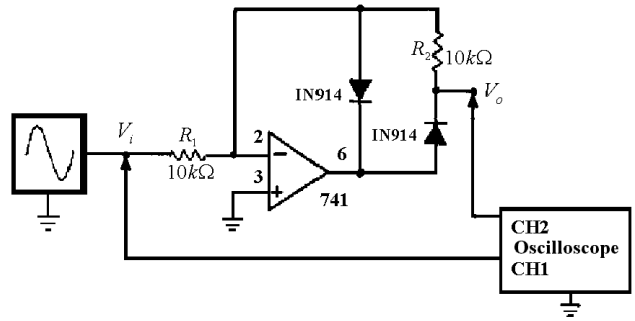


그림 7 반파전환회로
 Fig. 7 Half wave noninverting circuit.

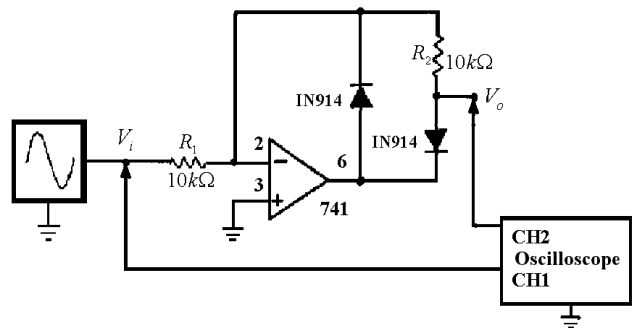


그림 8 반파 정류회로
 Fig. 8 Half wave inverting circuit.

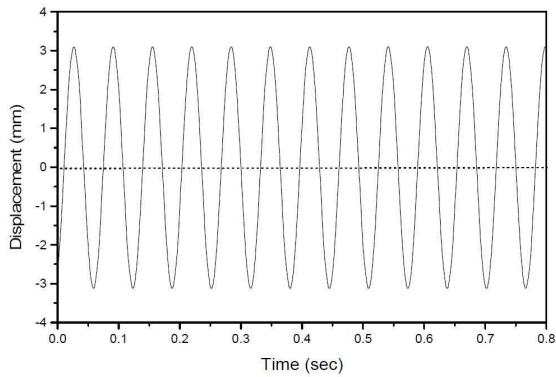
표 1 시험 보의 제원

Table 1 Details of the test beam.

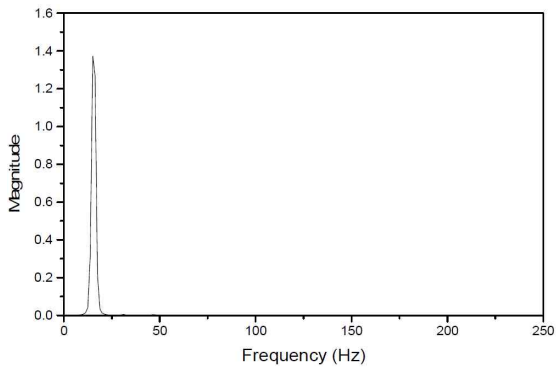
Description	Value	Unit
Length, L	300, 400	mm
Thickness, t	3	mm
Width, b	30	mm
Density, ρ	7,820	kg/m ³
Poisson's ratio, ν	0.29	
Shear modulus, G	8.0155×10 ¹⁰	N/m ²
Young's modulus, E	2.0680×10 ¹¹	N/m ²

표 2 가장 낮은 3개의 고유진동수의 이론값과 실험값 비교
 Table 2 Comparison theoretical values with experimental ones for the lowest three natural frequencies.

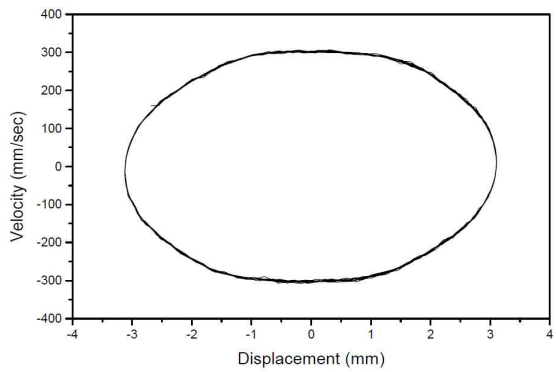
		Beam length
		$L = 300$ mm
Theory	First natural frequency	27.128 Hz
	Second natural frequency	170.0472 Hz
	Third natural frequency	476.063 Hz
Exp.	First natural frequency	27.25 Hz
	Second natural frequency	169.50 Hz
	Third natural frequency	473.75 Hz



(a) Time response



(b) Frequency response.

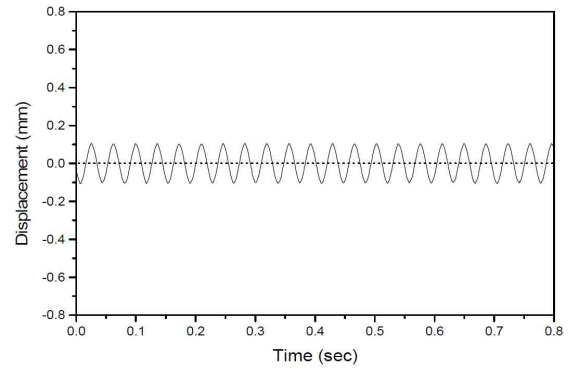


(c) Correlation curve

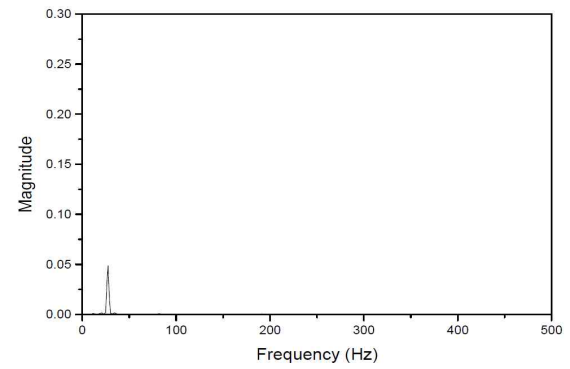
그림 9 차단판이 없는 경우 동적 특성 $\epsilon=0.1\text{mm}$, $F_0=100\text{mV}$,
(a)시간 응답, (b)주파수 응답, (c)상관 곡선

Fig. 9 Dynamic characteristics without stops. ($L=400\text{(mm)}$,
 $f=15.55\text{(Hz)}$, $\epsilon=\infty$, $F_0=100\text{mV}$)

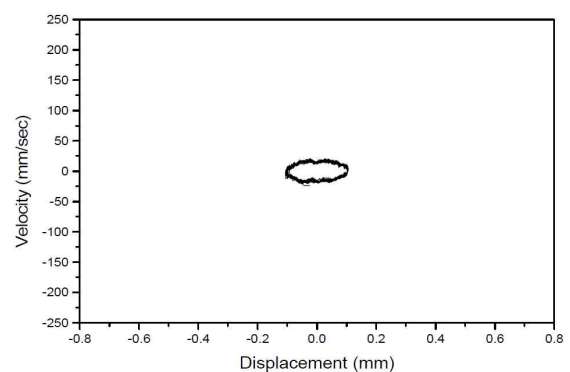
의 동적변위를 측정하였다. 둘째, 차단판이 존재하는 경우, 가진력의 크기를 고정시킨 상태에서 차단판과 시험보와의 간격을 0.1 mm, 0.5 mm의 두 종류로 변환시키면서 동적변위를 구하였다. 셋째, 차단판이 존재하는 경우, 차단판과 시험보와의 간격을 위의 두 종류로 고정시킨 상태에서 가진력의 크기를 250 mV, 500 mV, 1000 mV, 1500 mV, 2000 mV로 변화시키면서 동적변위를 구하였다.



(a) Time response.



(b) Frequency response.



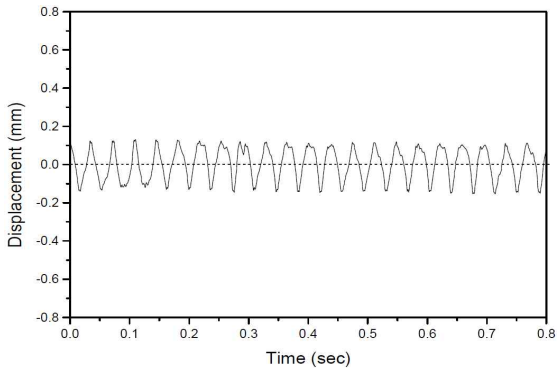
(c) Correlation curve

그림 10 차단판이 있는 경우 동적 특성 $\epsilon=0.1\text{mm}$, $F_0=250\text{mV}$,
(a)시간 응답, (b)주파수 응답, (c)상관 곡선

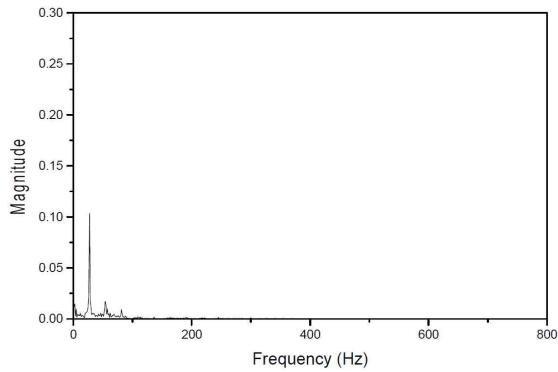
Fig. 10 Dynamic characteristics with stops. ($L=300\text{(mm)}$, $f=27.25\text{(Hz)}$, $\epsilon=0.1\text{mm}$, $F_0=250\text{mV}$)

4.3 동적응답 실험결과

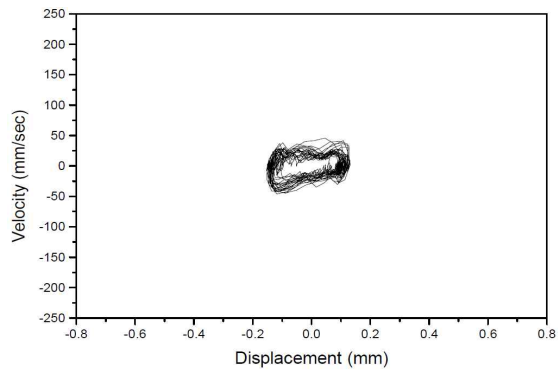
차단판이 존재하지 않는 경우와 차단판이 존재하는 경우에 대해, 차단판의 간격 변화, 가진력인 자기력의 크기변화에 따른 보의 동적응답 실험결과를 Fig. 9부터 Fig. 22에 나타내고 있다. 동적 응답의 계측은 보의 자유단에서 45mm되는 곳에서 이루어졌



(a) Time response



(b) Frequency response

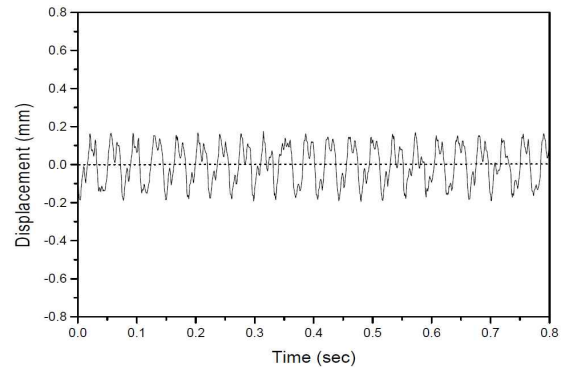


(c) Correlation curve

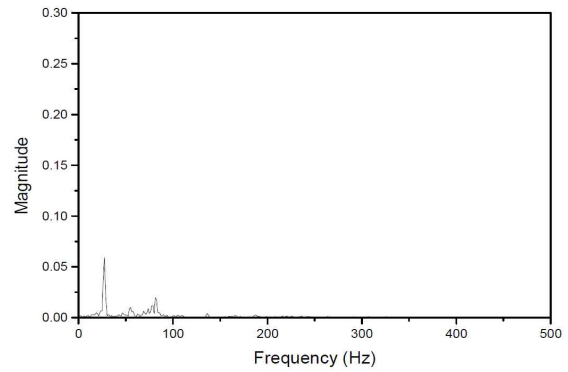
그림 11 차단판이 있는 경우 동적 특성 $\epsilon=0.1\text{mm}$, $F_0=1000\text{mV}$, (a)시간 응답, (b)주파수 응답, (c)상관 곡선
Fig. 11 Dynamic characteristics with stops. ($L=300\text{mm}$, $f=27.25\text{Hz}$, $\epsilon=0.1\text{mm}$, $F_0=1000\text{mV}$)

고, 샘플링시간(sampling time)은 0.8초 내에서 이루어졌다. 또한, 보의 가진은 1차 고유진동수인 $(f_1)_n=27.25\text{Hz}$ 에서 행해졌다. 먼저 차단판이 존재하지 않는 경우, 1차 고유진동수로 가진 하였을 경우에 대한 동적응답을 Fig. 9에 나타내었다.

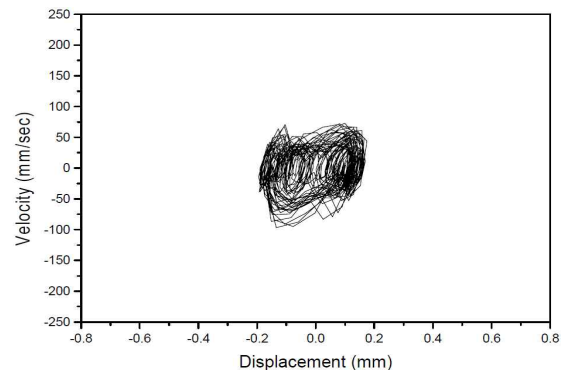
Fig. 10부터 Fig. 15까지는 보의 길이 L 을 $L=300\text{mm}$ 로 고정시킨 후 차단판의 간극 ϵ 의 값을 변화시켜 가면서 나타낸 그림들이다. Fig. 10부터 Fig. 12는 차단판의 간극 ϵ 이 $\epsilon=0.1\text{mm}$,



(a) Time response



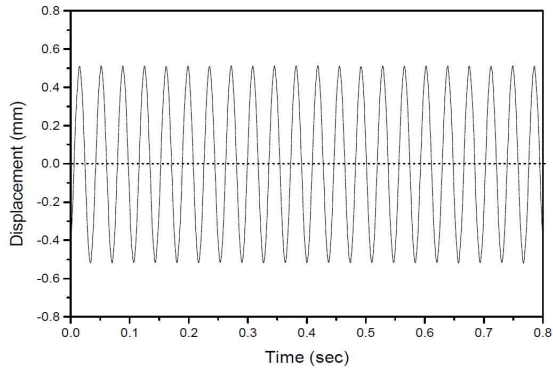
(b) Frequency response



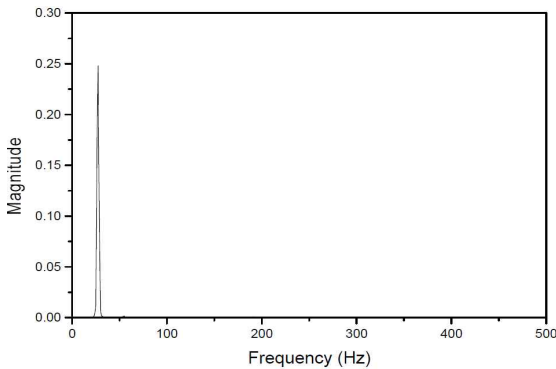
(c) Correlation curve

그림 12 차단판이 있는 경우 동적 특성 $F_0=2000\text{mV}$, (a)시간 응답, (b)주파수 응답, (c)상관 곡선
Fig. 12 Dynamic characteristics with stops. ($L=300\text{mm}$, $f=27.25\text{Hz}$, $\epsilon=0.1\text{mm}$, $F_0=2000\text{mV}$)

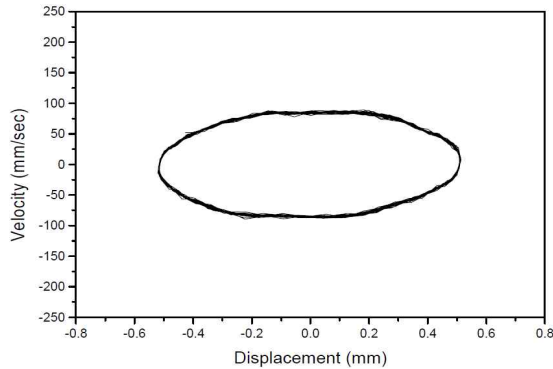
Fig. 13부터 Fig. 15까지는 $\epsilon=0.5\text{mm}$ 인 경우 가진력의 크기 증가에 따른 동적 변위, 주파수 반응, 변위와 속도의 관계 그래프(correlation curve)를 보여준다. 먼저 간극 ϵ 이 $\epsilon=0.1\text{mm}$ 인 경우는 변위와 속도 관계 그래프에 있어, 가진력의 크기 F_0 가 증가함에 따라 그래프의 복잡성이 증대되면서 어떤 두 개의 특정점 주위로 복잡성이 집중되는 현상을 보였다. 간극 ϵ 이 $\epsilon=0.5\text{mm}$ 의 경우에 있어서도 간격이 $\epsilon=0.1\text{mm}$ 의 경우와 마찬가지로 가진력



(a) Time response



(b) Frequency response



(c) Correlation curve

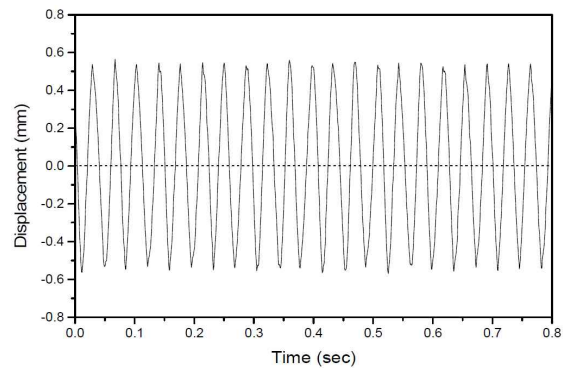
그림 13 차단판이 있는 경우 동적 특성 $\epsilon = 0.5\text{mm}$, $F_0 = 250\text{mV}$,
(a)시간 응답, (b)주파수 응답, (c)상관 곡선

Fig. 13 Dynamic characteristics with stops. ($L = 300\text{mm}$),
 $f = 27.25\text{Hz}$, $\epsilon = 0.5\text{mm}$, $F_0 = 250\text{mV}$)

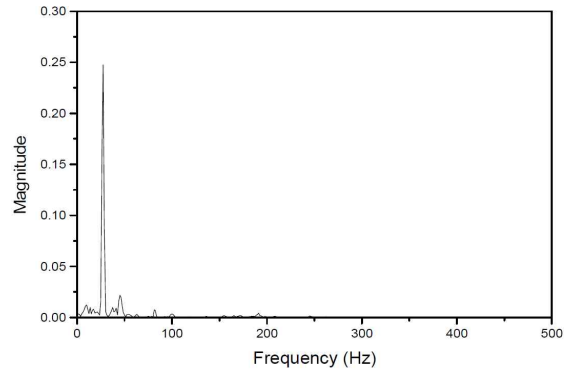
의 크기 F_0 가 증가됨에 따라 복잡성의 정도가 증가됨을 알 수 있었다.

4.4 비선형 응답에 대한 혼돈 진동해석

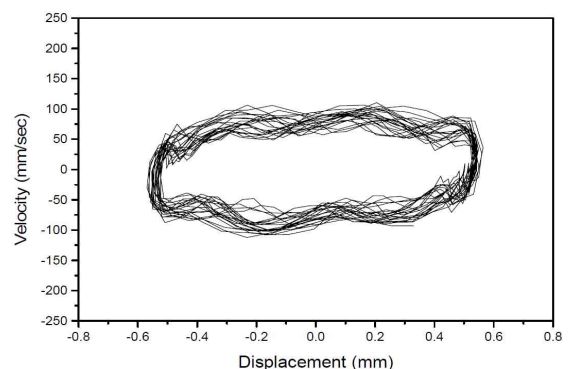
본 절에서는 가진력 크기가 증가됨에 따라 동적응답의 비선형



(a) Time response



(b) Frequency response

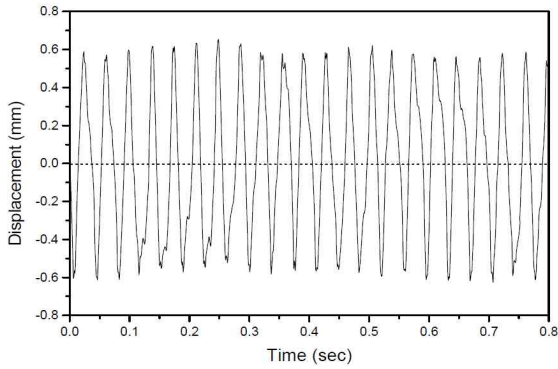


(c) Correlation curve

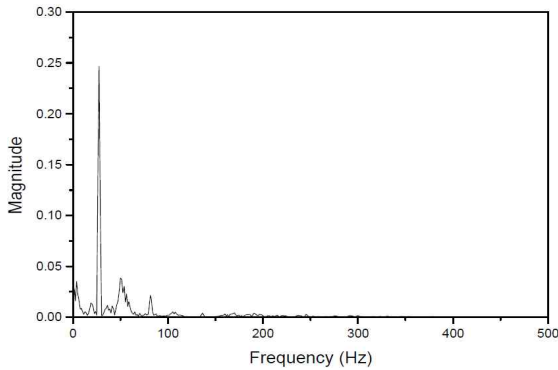
그림 14 차단판이 있는 경우 동적 특성 $\epsilon = 0.5\text{mm}$, $F_0 = 2000\text{mV}$,
(a)시간 응답, (b)주파수 응답, (c)상관 곡선

Fig. 14 Dynamic characteristics with stops. ($L = 300\text{mm}$),
 $f = 27.25\text{Hz}$, $\epsilon = 0.5\text{mm}$, $F_0 = 1000\text{mV}$)

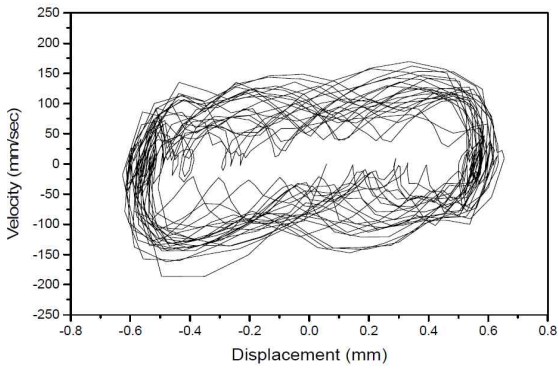
성이 비교적 크게 나타나는 응답에 대해 정량적 분석을 하고자 한다. 카오스 시스템에서 획득되는 신호는 비선형적이고 불규칙적이다. 비선형해석은 그 데이터가 가지고 있는 결정론적(deterministic) 규칙성을 찾아내는 특징추출이 가능하다. 이러한 특징추출은 프랙탈 차원(fractal dimension), 엔트로피(entropy), 리아프노프 지수(Lyapunov exponent)등을 통해 이루어질 수 있



(a) Time response



(b) Frequency response

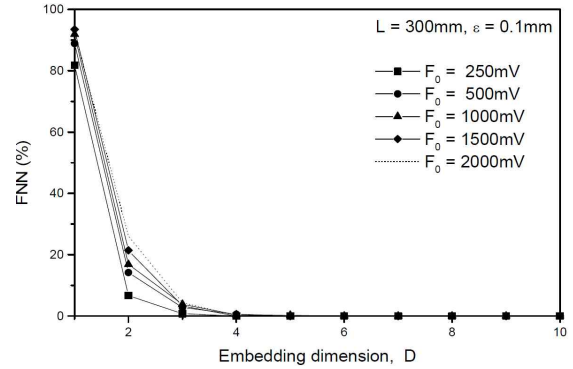


(c) Correlation curve

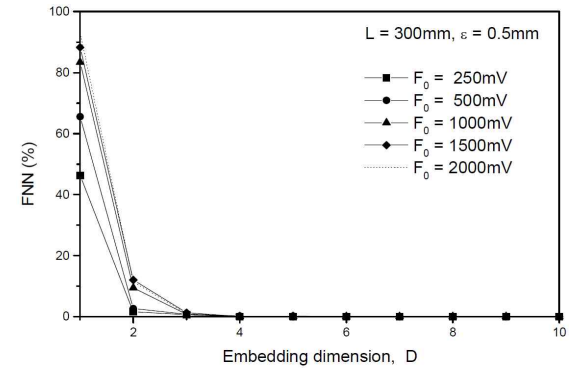
그림 15 차단판이 있는 경우 동적 특성 $\epsilon=0.5\text{mm}$, $F_0=2000\text{mV}$, (a)시간 응답, (b)주파수 응답, (c)상관 곡선
Fig. 15 Dynamic characteristics with stops. ($L=300(\text{mm})$, $f=27.25(\text{Hz})$, $\epsilon=0.5\text{mm}$, $F_0=2000\text{mV}$)

는데, 이는 시계열 데이터를 재구성(reconstruction)하는 것으로 가능하다. 이 재구성은 “고차원 역학계의 궤도는 그 속에 있는 임의의 한 성분 좌표 정보만으로 재구성이 된다.”라는 Tanken [4]의 이론에 의한 것이다.

센서로부터 획득한 스칼라 신호($s(j)$, $j=1, \dots$)를 매입차원(embedding dimension) 차원 D 의 차수와 τ 의 시간간격으로



(a)



(b)

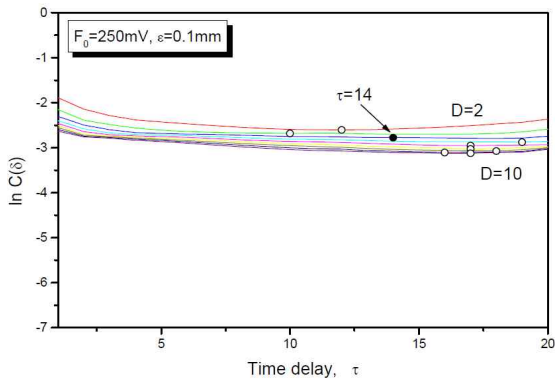
그림 16 가진력의 크기변화에 따른 FNN 비와 매입 차원

Fig. 16 FNN and embedding dimension depending on the magnitude of exciting force.

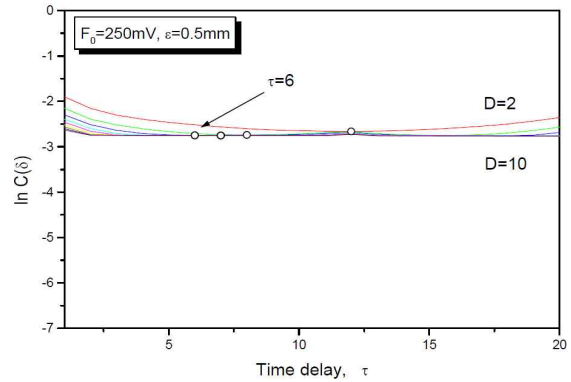
재구성할 때 재구성된 벡터 $\vec{X}(i)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{X}(1) &= (s(1), s(1+\tau), s(1+2\tau), \dots, s(1+(D-1)\tau)) \\ \vec{X}(2) &= (s(2), s(2+\tau), s(2+2\tau), \dots, s(2+(D-1)\tau)) \\ &\vdots \\ \vec{X}(i) &= (s(i), s(i+\tau), s(i+2\tau), \dots, s(i+(D-1)\tau)) \end{aligned} \quad (31)$$

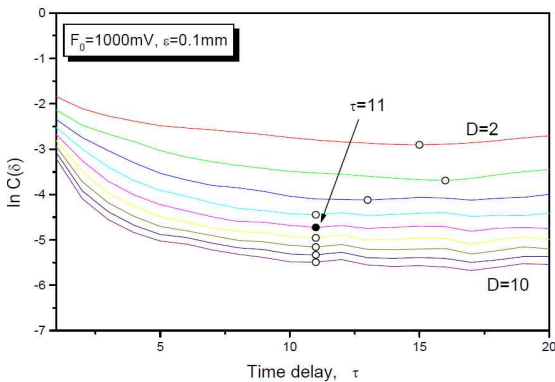
식 (31)과 같이 재구성된 벡터는 매입차원 D 의 공간에서 한 점을 형성하게 되고, i 을 변화시키면 궤도(trajjectory)를 나타낼 수 있으며, 이는 원래의 고차원 역학계(차원 l)의 궤도를 매끄럽게 변형한 것이 된다. 즉 재구성된 궤도가 끌개(attractor)를 형성하면, 스칼라 신호상에서 변형된 끌개가 나타난다. 여기서, 매입차원 D 는 원래의 역학계가 이 공간으로 매입된다는 것을 의미하며 $D=2 \cdot l+1$ 로 선정하면 매입차원에 대한 해석이 충분하다는 것이 증명된 바 있다. 위의 벡터를 재구성하기 위하여는 시간간격 τ 와 매입차원 D 를 구하는 것이 무엇보다 중요하다. 매입차원을 구하는데는 FNN(false nearest neighbor) 방법을 적용하였다. 이 방법은 임의의 차원에서 두 끌개 점은 근접점이지만 차원을 증가시키면 두 점은 서로 근접점이 되지 않는다는 점을



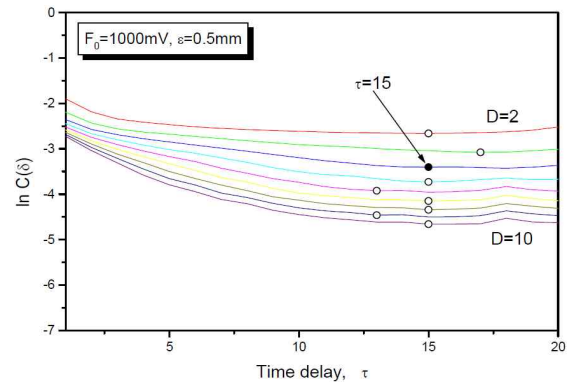
(a)



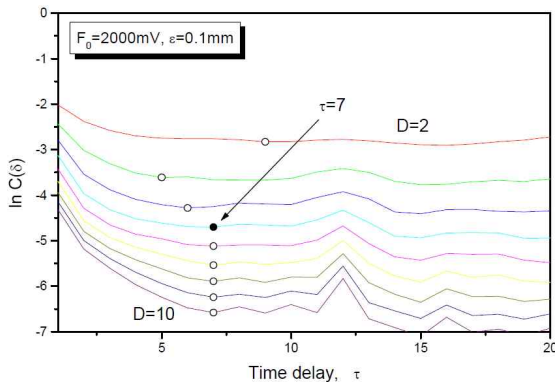
(a)



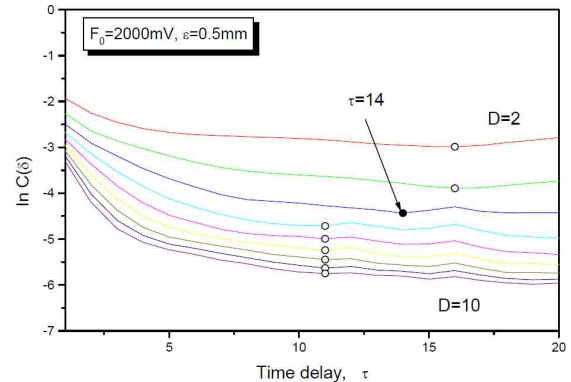
(b)



(b)



(c)



(c)

그림 17 가진력과 간극 거리에 따른 시간 지연 ($\epsilon=0.1\text{mm}$)

Fig. 17 The time delay depending on exciting force and gap distance ($\epsilon=0.1\text{mm}$).

그림 18 가진력과 간극 거리에 따른 시간 지연 ($\epsilon=0.5\text{mm}$)

Fig. 18 The time delay depending on exciting force and gap distance ($\epsilon=0.5\text{mm}$).

의미하는 것으로 예를 들어 FNN의 비가 0%인 차원을 매입차원으로 결정하는 방법이다. Fig. 16은 차단판의 간극 ϵ 를 0.1mm, 0.5mm로 고정시킨 상태에서 가진력의 크기 F_0 를 변화시켜가면서 얻은 매입차원과 FNN비를 나타낸 그림들이다.

Table 3은 보의 1차 고유진동수로 가진한 경우, 가진력의 크기와 차단판의 간격변화에 따라 결정된 매입차원을 나타내고 있

는 표이다. Table 3에서 매입차원이 결정된 후, 시간지연 τ 에 대한 값을 구하는 것이 또한 중요하다. 시간지연 τ 를 구하기 위해서는 식 (32)의 상관적분(correlation integral)값을 매입차원에 대하여 구하여 첫 번째 국부최소점이 되는 점을 시간지연으로 선정한다.

표 3 매입차원의 결정

Table 3 Determination of embedding dimensions.

Beam length (L)	1st natural frequency	F_0					
		ϵ	250 mV	500 mV	1000 mV	1500 mV	2000 mV
300 mm	27.25 Hz	0.1mm	4	5	6	4	5
		0.5mm	4	6	4	4	4

표 4 시간 지연의 결정

Table 4 Determination of time delay.

Beam length (L)	1st natural frequency	F_0			
		ϵ	250mV	1000mV	2000mV
300 mm	27.25 Hz	0.1mm	14	11	7
		0.5mm	6	15	14

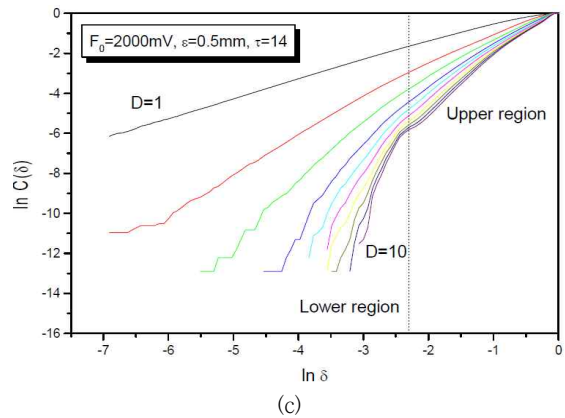
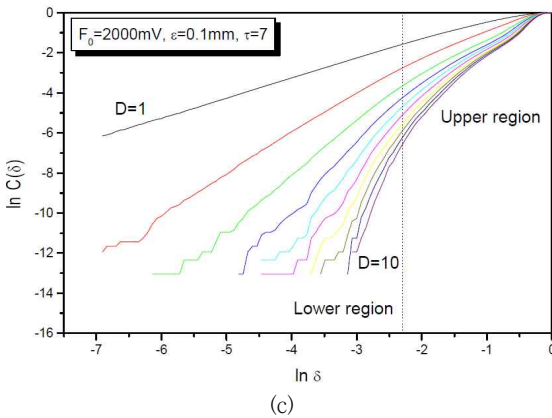
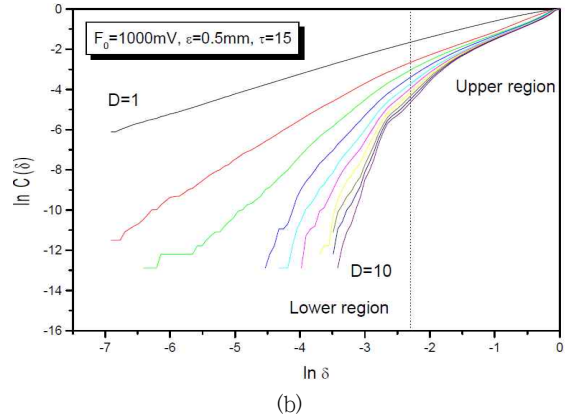
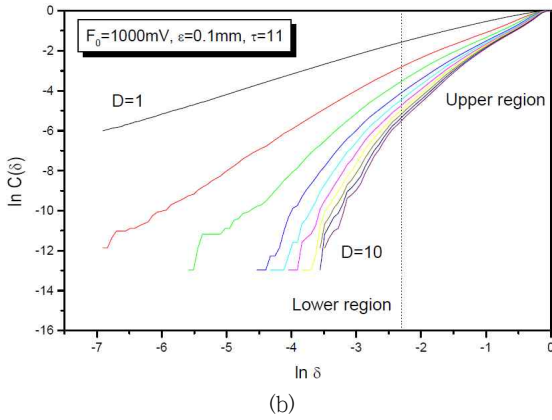
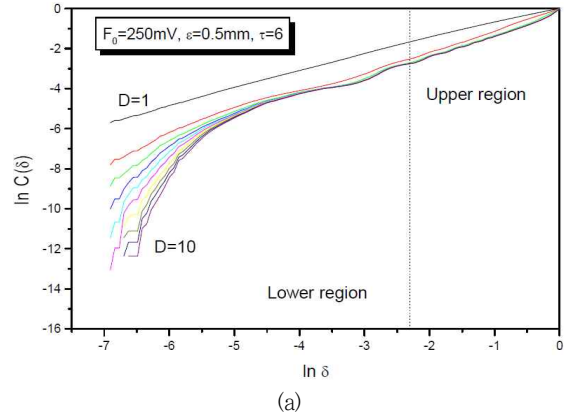
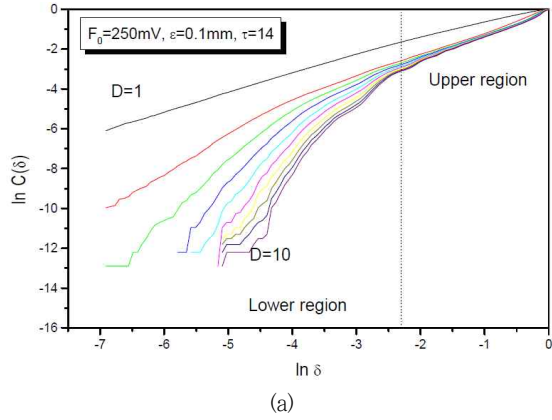
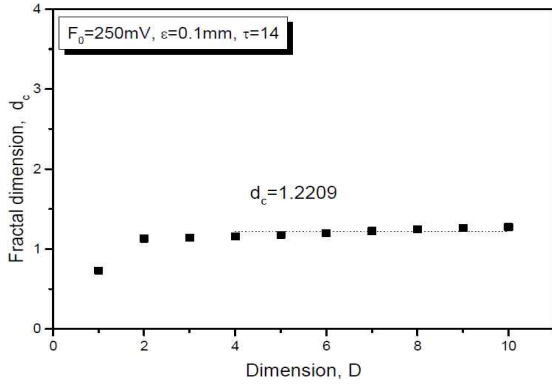


그림 19 프랙탈 차원의 평가($\epsilon=0.1\text{mm}$)

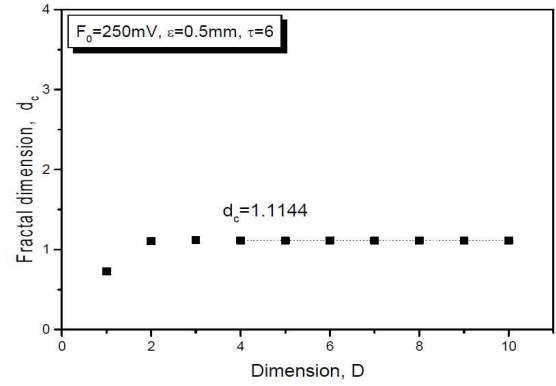
Fig. 19 Estimation of Fractal Dimension($\epsilon=0.1\text{mm}$)

그림 20 프랙탈 차원의 평가($\epsilon=0.5\text{mm}$)

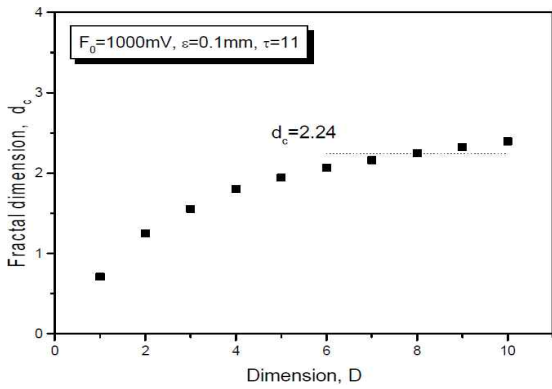
Fig. 20 Estimation of Fractal Dimension($\epsilon=0.5\text{mm}$)



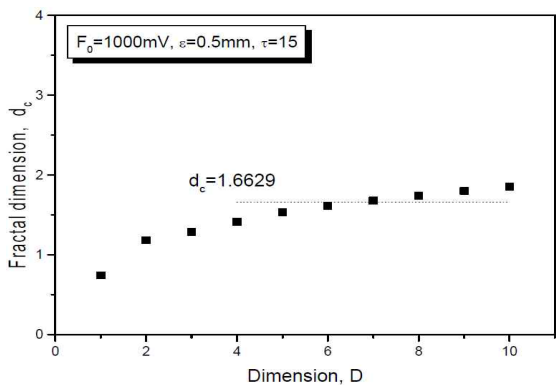
(a)



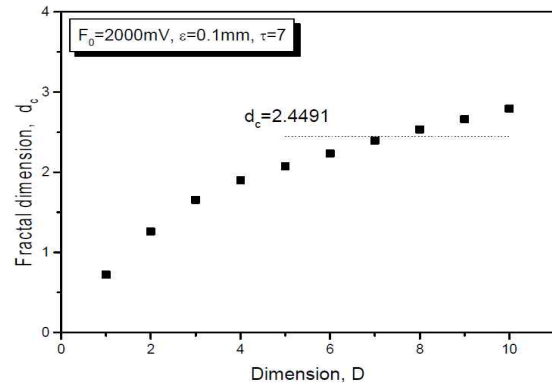
(a)



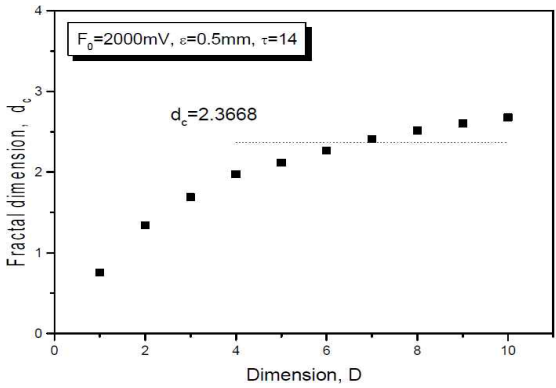
(b)



(b)



(c)



(c)

그림 21 가진력의 변화에 따른 프랙탈 차원($\epsilon=0.1\text{mm}$)

Fig. 21 The fractal dimension depending on exciting force ($\epsilon=0.1\text{mm}$)

그림 22 가진력의 변화에 따른 프랙탈 차원($\epsilon=0.5\text{mm}$)

Fig. 22 The fractal dimension depending on exciting force ($\epsilon=0.5\text{mm}$).

$$C_1(\delta) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \theta(\delta - |\vec{X}(i) - \vec{X}(j)|) \quad (32)$$

여기서, θ 는 step function이며, $|\vec{X}(i) - \vec{X}(j)|$ 는 끝개 i 와 j 번째를 구성하는 두 점 사이의 유클리디안(euclidian)거리를 나타낸다. 즉 상관적분은 반경 δ 인 구(sphere)를 설정한 후,

구 내부점의 수를 각 점에서 반복하여 구하여 평균을 취한다.

Fig. 17(a)-(c)의 그림들은 보의 1차 고유진동수로 가진하는 상태에서 차단판의 간극은 0.1mm로 일정하게 하고 가진력의 크기를 각각 $F_0=250\text{mV}$, 1000mV , 2000mV 로 변화시킬 때마다 Table 3에서 결정되었던 매입차원에서의 시간지연 τ 를 구한 것이다. 이 경우 가진력의 크기 변화에 따라 매입차원 D 에 상응하

는 시간지연 τ 는 $\tau=14, 11, 7$ 로 나타났다. Fig. 18(a)-(c)의 그림들은 보의 1차 고유진동수로 가진하는 상태에서 차단판의 간격은 0.5mm로 일정하게 하고, 가진력의 크기를 각각 $F_0 = 250\text{mV}, 1000\text{mV}, 2000\text{mV}$ 로 변화시킬 때마다 Table 3에서 결정되었던 매입차원에서의 시간지연 τ 를 구한 것이다. 이 경우 가진력의 크기 변화에 따라 매입차원 D 에 상응하는 시간지연 τ 는 $\tau=6, 15, 14$ 로 나타났다.

Table 4는 실험에서 얻어진 데이터를 기초로 하여 구해진 시간지연값을 가진력의 크기와 차단판의 간격변화에 따라 나타난 Fig. 17~18의 결과를 정리한 표이다.

상관 적분값을 구하기 위해 처음에 설정한 δ 값이 0.1인 부분에서 매입차원들을 구하였으므로 그때의 δ 를 기준으로 하여 윗부분을 상위부분(upper region)이라 칭하고 그 아래부분을 하위부분(lower region)이라 칭한다. δ 를 자연로그한 값과 그 δ 에 대한 상관관계(correlation)의 자연로그한 값을 각 차원에 대해 Fig. 19~20에 나타내고 있다. 본 연구에서 얻어진 곡선들의 하위부분은 매입차원 D 의 변화에 대한 기울기가 일정치가 않으므로 상위부분만을 line-fitting 하여, 정량적으로 복잡성의 정도를 표시하는 프랙탈 차원을 구하였다. Fig. 19와 20은 각각 차단판의 간격을 0.1mm과 0.5mm로 고정시킨 후 가진력의 크기를 $F_0 = 250\text{mV}, 1000\text{mV}, 2000\text{mV}$ 로 변화시켜 가면서 그린 그림들이다. Fig. 19와 Fig. 20의 그림들은 가진력의 크기가 증가함에 따라 점차 기울기가 증가함을 알 수 있다.

Fig. 21과 22는 Fig. 19와 20의 상관적분 그래프들의 상위부분만을 가지고 line-fitting하여 각 차원에서의 기울기를 구한 후에 각 복잡성들의 매입차원 이상에서는 차원의 증가가 큰 의미를 지니고 있지 않으므로 자신의 매입차원 이상의 차원에서 line-fitting 한 기울기의 값을 평균하여 프랙탈 차원(fractal dimension)을 얻어낸 그림들이다. Fig. 21은 차단판의 간격이 0.1mm로 고정된 상태에서 가진력의 크기 $F_0 = 250\text{mV}, 1000\text{mV}, 2000\text{mV}$ 로 증가시켜 가면서 나타난 그림들이다. 가진력의 크기가 증가함에 따라 프랙탈차원 d_c 는 1.2209, 2.2400, 2.4491으로 나타났다. 즉, 가진력의 크기가 증가함에 따라 프랙탈 차원도 증가되는 경향을 보이고 있다. Fig. 22는 차단판의 간격이 0.5mm로 고정된 상태에서 가진력의 크기 $F_0 = 250\text{mV}, 1000\text{mV}, 2000\text{mV}$ 로 변화시켜 가면서 나타난 그림들이다. 가진력의 크기가 증가함에 따라 프랙탈 차원 d_c 는 1.1144, 1.6629, 2.3668으로 나타났다. 가진력의 크기가 커짐에 따라 프랙탈차원도 역시 증가하는 경향을 보이고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

한단고정-타단자유보 자유단에 설치된 차단판에 의해 운동의 제한을 받는 보 모델의 동적응답 및 혼돈 진동특성에 관한 수치 해석 및 실험결과로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

- 차단판이 없는 경우의 한 예와 차단판의 간격 ϵ 이 $\epsilon = 0.5\text{mm}$ 인 경우의 동적응답에 대한 수치 시뮬레이션과 실험

결과는 비교적 근사한 일치치를 보이고 있음을 알 수 있어, 모델링의 타당성이 검토되었다.

- 보와 차단판의 간격을 고정시킨 상태에서 가진력의 크기를 증가시킴에 따라 고차 진동모드의 영향이 증가하며, 변위와 속도관계 그래프도 점점 복잡한 형태를 나타내었다.
- 보와 차단판의 간격을 고정시킨 상태에서 가진력의 크기가 증가됨에 따라, 비선형적 특성이 크게 나타나는 경향이 있었으며, 프랙탈 차원이 증가함을 알 수 있었다.

References

- [1] J. P. Den Hartog and R. M. Heiles, "Forced Vibrations with Nonlinear Spring Constants", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 3, pp. 127-130, 1936.
- [2] S. S. Chen, G. S. Rogenberg and M. W. Wambganss, "Vibration of a Beam with Motion-Constraint Stops", Argonne National Laboratory, Report ANL-7619, 1970.
- [3] R. J. Rogers and R. J. Pick, "On the Dynamic Spatial Response of a Heat Exchanger Tube with Intermittent Baffle Contacts", Nuclear Engr. and Design 36, pp. 81-90, 1976.
- [4] F. Takens, "Detecting Strange Attractors in Turbulence", Springer lecture notes in mathematics, Vol. 898, pp. 366-381, 1981.
- [5] M. P. Paidoussis, "Fluid-Structure Interactions Slender Structures and Axial Flow", Academic Press, 1998.
- [6] K. H. Park, J. S. Hwang and C. E. Chung, "Implementation of Chaotic State Machine using Deterministic Chaos Function", Journal of Electrical Engineering and Information Science, Vol. 3, No. 2, pp. 145-150, 1998.
- [7] Y. Dumont, "Vibrations of a Beam between Stops : Numerical Simulations and Comparison of Several Numerical Schemes", Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 60 pp. 45-83, 2002.
- [8] H. P. Lin and S. C. Chang, "Free Vibration Analysis of Multi-span Beams with Intermediate Flexible Constraints", Journal of Sound and Vibration, Vol. 281, pp. 155-169, 2005.
- [9] X. C. Yin, Y. Qin and H. Zou, "Transient Responses of Repeated Impact of a Beam against a Stop", International Journal of Solids and Structures", Vol. 44, pp. 7323-7339, 2007.
- [10] M. Dupac and D. G. Beale, "Dyanamic Analysis of a Flexible Linkage Mechanism with Cracks and Clearance" Mechanism and Machine Theory, Vol. 45, pp. 1909-1923, 2010.

저 자 소 개



최 봉 문(Bong-Moon Choi)

1974년 4월 26일생. 1998년 한밭대학교 기계설계공학과 졸업(학사). 2000년 동 대학원 기계설계공학과 졸업(석사). 2000년~2001년 순환엔지니어링(주), 2002년~2008년 포톤 다이나믹스 코리아, 2008년 2010년 오보텍 코리아, 2011년~현재 Heller Industries Korea (주) 차장

Tel : 010-6405-3872

E-mail : leipholz@gmail.com



류 봉 조(Bong-Jo Ryu)

1959년 11월 19일생. 1981년 연세대학교 기계공학과 졸업(학사). 1988년 동 대학원 기계공학과 졸업(박사). 1989년 삼성종합기술원 전자기기연구소 선임연구원. 1991년~1992년 오사카부립대학 항공우주공학과 객원교수. 1989년~현재 한밭대학교 기계공학과 교수.

Tel : 042-821-1159, Fax : 042-821-1587

E-mail : bjryu701@hanbat.ac.kr



김 영 식 (Youngshik Kim)

2003년 5월 : University of Utah, 대학원 기계공학과(석사). 2008년 8월 : University of Utah, 대학원 기계공학과(박사). 2009년 11월~2011년 1월 : DGIST선임연구원. 2011년 2월~현재 : 한밭대학교 기계공학과 교수

Tel : 042-821-1163

E-mail : youngshik@hanbat.ac.kr



구 경 완(Kyung-Wan Koo)

1961년 2월 5일생. 1983년 충남대학교 전자공학과(학사). 1992년 충남대학교 전자공학과(박사). 1987년~1989년 현대전자 반도체연구소 선임연구원. 1989년~1994년 충청전문대학 전자과 조교수. 1994년~2005년 영동대학교 전자·정보공학부 부교수. 2005년~현재: 호서대학교 자동차ICT공학과 교수

Tel : 041-360-4851, Fax : 041-360-4815

E-mail : alarmkoo@hoseo.edu