

# 확률진폭 스위치에 의한 양자게이트의 함수 임베딩과 투사측정

박동영\*

## Function Embedding and Projective Measurement of Quantum Gate by Probability Amplitude Switch

Dong-Young Park\*

요약

본 논문은 양자게이트의 모든 제어 동작점에서 양자들의 확률진폭, 확률, 평균 기댓값 및 정상상태 단위행렬의 행렬요소 등을 수학적 투사로 측정할 수 있는 새로운 함수 임베딩 방법을 제안하였다. 본 논문의 함수 임베딩 방법은 디랙 기호와 크로네커델타 기호를 사용해 각 제어 동작점에 대한 확률진폭의 직교 정규화조건을 2진 스칼라 연산자에 임베딩 한 것이다. 이와 같은 함수 임베딩 방법은 양자게이트 함수를 단일양자들의 텐서 곱으로 표현하는 유니터리 변환에서 유니터리 게이트의 산술 멱함수 제어에 매우 효과적 수단임을 밝혔다. Ternary 2-qutrit cNOT 게이트에 본 논문이 제안한 함수 임베딩 방법을 적용했을 때의 진화연산과 투사 측정 결과를 제시하고, 기존의 방법들과 비교 검토하였다.

### ABSTRACT

In this paper, we propose a new function embedding method that can measure mathematical projections of probability amplitude, probability, average expectation and matrix elements of stationary-state unit matrix at all control operation points of quantum gates. The function embedding method in this paper is to embed orthogonal normalization condition of probability amplitude for each control operating point into a binary scalar operator by using Dirac symbol and Kronecker delta symbol. Such a function embedding method is a very effective means of controlling the arithmetic power function of a unitary gate in a unitary transformation which expresses a quantum gate function as a tensor product of a single quantum. We present the results of evolutionary operation and projective measurement when we apply the proposed function embedding method to the ternary 2-qutrit cNOT gate and compare it with the existing methods.

### 키워드

Function Embedding, Probability Amplitudes, Projective Measurement, Orthogonal Normalization Condition, Ternary cNOT Gate

함수 임베딩, 확률 진폭, 투사 측정, 직교 정규화 조건, Ternary cNOT 게이트

### 1. 서론

양자라 일컫는 전자나 광자는 측정 전까지는 파동

성의 중첩 상태로 존재하지만, 일단 측정을 하게 되면 파동성의 중첩 상태는 입자성을 띠는 고유상태 벡터 중의 한 가지로 붕괴하게 된다. 양자에 대한 측정은

\* 교신저자 : 강릉원주대학교 정보통신공학과  
• 접수 일 : 2017. 10. 17  
• 수정완료일 : 2017. 11. 15  
• 게재확정일 : 2017. 12. 15

• Received : Oct 17, 2017, Revised : Nov 15, 2017, Accepted : Dec 15, 2017  
• Corresponding Author : Dong-Young Park  
Dept. of Information and Telecommunication Eng., Gangneung-Wonju National University  
Email : kouksundo@gwnu.ac.kr

물리적 측정과 힐버트 공간이라는 가상의 복소수 벡터 공간에서 중첩과 얽힘 상태에 있는 양자에 대한 수학적 측정인 투사측정(projective measurement)이 있다. 본 논문은 후자 방법에 의한 양자 시스템의 수학적 모델링을 다룬다. 양자 역학의 게이트 연산은 고전역학과 다르게 양자게이트에 입력되는 상태벡터 신호에 따라 양자게이트가 진화하여 변하는 진화연산(evolutionary operation)이다. 양자컴퓨팅의 기본 연산은 부정(NOT)과 항등(identity) 연산이다. 부정 연산자인 단일 exclusive-OR 게이트는 제어입력을 한 개 부가하면 유니터리 연산(unitary operation)이 가능한 cNOT(controlled-NOT) 게이트로 그리고 두 개 부가하면 Toffoli 게이트로 확장될 수 있다. 또한 양자논리 회로의 정보가역성(information reversibility) 보전을 위해서는 얽힘을 방지하고 복소공액(complex conjugate)과 에르미트(Hermit) 성질을 이용한 항등연산이 되도록 설계되어야 한다[1].

양자논리함수의 실현 방법에는 함수 임베딩(embedding) 실현 방법[1-7]과 직접적 실현[8-10] 방법이 있다. 가장 많이 사용되는 함수 임베딩 방법은 행렬 임베딩 방법[1-2]이지만 최근에 산술 멱함수에 의한 유니터리 게이트 제어방법[3-7]이 발표되었다. 본 논문은 1개 표적입력 상태벡터에 대한  $r \times r$ 차원 유니터리 연산을  $n$ 개 제어입력 상태벡터로 제어하는 다치논리 양자게이트의 함수 임베딩 방법을 연구하였다. 이와 관련하여 본 논문이 참조한 연구 방법은  $r^{n+1} \times r^{n+1}$ 차원 행렬연산 방법[1-2]와  $r \times r$ 차원 유니터리 행렬의 산술 멱함수(arithmetic power function) 연산 방법[3-7]이다.  $r^{n+1} \times r^{n+1}$ 차원 행렬연산 방법은 치수  $r$ 과 양자 수  $n$ 의 증가에 따른 행렬 크기가 지수함수적으로 증가하므로 직관적 해석에 제한적이다. 또한 표적출력을 구하기 위해서는 전체 행렬연산을 수행해야만 하고, 게이트 내부의 제어 동작점에 대한 제어함수 정보가 제공되지 않는다. 산술 멱함수 연산 방법은 행렬 크기가  $r$ 과  $n$ 의 확장에 독립적인  $r \times r$ 차원 행렬이며, 표적출력만을 추출하여 구할 수 있고, 임베딩 함수에 게이트 내부의 제어함수 정보가 포함되어 있어 게이트에 대한 직관적 분석에 유용하다. 본 논문은  $r \times r$ 차원 행렬의 산술 멱함수 연산 방법을 함수 임베딩의 기본 틀로 사용하며, 각 측정 점에서 양자게이트의 진화연산 결과들에 대해 직교 정규화조건을

만족하는 양자역학적 2진 스위치를 디랙(Dirac) 기호와 크로네커델타(Kronecker delta) 기호를 사용한 수학적 임베딩에 의해 투사측정 파라미터들을 직접적으로 구할 수 있는 함수임베딩 방법을 제안한다. 본 논문의 구성은 II장에서 양자컴퓨팅을 위한 디랙 연산의 기본 성질들을 논하고, III장에서 산술 멱함수 제어법에 적용이 가능한 새로운 양자역학적 2진 스위치를 개발하였다. IV장은 본 논문이 제안한 양자역학적 2진 스위치를 ternary cNOT에 임베딩 한 후 진화연산과 투사측정 결과를 비교 고찰하였다. V장은 본 논문의 결론이다.

## II. 양자컴퓨팅을 위한 디랙 연산

양자컴퓨팅 연산에 사용되는 디랙 기호는 브라켓(braket,  $\langle \rangle$ )에서 유래된 브라(bra,  $\langle |$ )와 켓(ket,  $| \rangle$ )이다. 양자역학의 모든 물리량들은 행렬로 나타낼 수 있는데 그 행렬 연산에 디랙 기호를 추가함으로써 단순 행렬연산을 넘어 양자역학적 물리 작용에 대한 의미 부여가 가능해졌다. 브라와 켓 기호를 적절히 조합하면 양자컴퓨팅에 필요한 다양한 스칼라와 벡터 연산자가 생성된다.

성질 1.  $|\Psi\rangle$ 는 열벡터로서 ‘켓 프사이’라 읽는다. 열벡터는 고유상태 벡터(eigenstate vector)들의 중첩 상태에 있다.

$$|\Psi\rangle = a_1|0\rangle + a_2|1\rangle + \dots + a_n|n-1\rangle \quad (1)$$

$$= (a_1 a_2 \dots a_n)^T.$$

성질 2.  $|\Psi\rangle$ 에 전치공액(transpose and conjugate) ( $|\Psi\rangle$ )<sup>†</sup>을 취하면 행벡터인 ‘브라 프사이’ $\langle \Psi|$ 가 된다. 이때  $\Psi = \Psi^\dagger$  또는  $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}^*$ 이면  $\Psi$ 는 에르미트이다.

$$\langle \Psi| = (|\Psi\rangle)^\dagger = (a_1^* a_2^* \dots a_n^*) \quad (2)$$

성질 3. 디랙 기호를 브라켓 순으로 합친 연산은 내적의 스칼라 연산이고, 켓브라 순으로 합친 연산은 외적의 벡터 연산이다.

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Psi \rangle &= (a_1^* a_2^* \cdots a_n^*) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= a_1^* a_1 + a_2^* a_2 + \cdots + a_n^* a_n \end{aligned} \quad (3)$$

내적 연산은 식(4)과 같이 파동함수가 입자로 발견될 정규화조건에 사용된다.

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1. \quad (4)$$

식(5)의 외적 연산은 수학적 측정을 위한 투사기(projector)  $P_\Psi$ 로 사용된다. 즉  $P_\Psi$ 는  $|\Psi\rangle$ 상의 직교 투사를 통해 특정 행렬요소만 정규화 조건을 만족하는 입자 상태로 만들 수 있는 벡터 행렬 연산자이다.

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle \langle \Psi| &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (a_1^* a_2^* \cdots a_n^*) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_1^* & a_1 a_2^* & \cdots & a_1 a_n^* \\ a_2 a_1^* & a_2 a_2^* & \cdots & a_2 a_n^* \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_n a_1^* & a_n a_2^* & \cdots & a_n a_n^* \end{pmatrix} = P_\Psi \end{aligned} \quad (5)$$

성질 4.  $|\Psi\rangle$ 와  $|\Phi\rangle$ 가 일반적 편광상태(polarization state)를 나타낼 때  $\Psi$ 에서  $\Phi$ 을 발견할 확률진폭(probability amplitude)  $a(\Phi \rightarrow \Psi)$ 과 확률  $p(\Phi \rightarrow \Psi)$ 의 디랙 기호는 각각 식(6) 및 식(7)로 표현된다.

$$a(\Phi \rightarrow \Psi) = \langle \Psi | \Phi \rangle, \quad (6)$$

$$p(\Phi \rightarrow \Psi) = |a(\Phi \rightarrow \Psi)|^2 = |\langle \Psi | \Phi \rangle|^2. \quad (7)$$

성질 5.  $P_\Psi |\Phi\rangle$ 은  $|\Phi\rangle$ 에 대한 투사 측정이다.

투사란 물리적 측정에 대응하는 수학적 연산으로서 테스트 후의 양자 시스템은 상태  $|\Psi\rangle$ 에 있으므로 수학적 관점에서  $|\Psi\rangle$ 에 직교 투사를 행한다.

$$\begin{aligned} |P_\Psi \Phi\rangle &= P_\Psi |\Phi\rangle \\ &= |\Psi\rangle \langle \Psi | \Phi \rangle \\ &= (|\Psi\rangle \langle \Psi |) |\Phi\rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

$P_\Psi |\Phi\rangle$ 은 상태벡터  $|\Phi\rangle$ 에 대한 확률진폭  $P_\Psi$ 의 작용을 나타내며, 이 벡터 연산 결과가 행렬  $P_\Psi$ 의  $|\Phi\rangle$ 열 고유벡터이다. 이것은 파동 중첩상태인 행렬  $P_\Psi$ 가  $P_\Psi$  상의  $|\Phi\rangle$ 열 고유벡터로의 진화연산이기 때문에 일반적 정규화가 아니다.

성질 6.  $P_\Psi |\Phi\rangle$ 에 대한 일반적 정규화는 (평균)기댓값(average expectation value)이라 부르는  $\langle \Phi | P_\Psi | \Phi \rangle$ 이다.

$$\begin{aligned} p(\Phi \rightarrow \Psi) &= |\langle \Psi | \Phi \rangle|^2 = \langle \Psi | \Phi \rangle^* \langle \Psi | \Phi \rangle \\ &= \langle \Phi | \Psi \rangle \langle \Psi | \Phi \rangle = \langle \Phi | P_\Psi | \Phi \rangle \\ &= \langle \Phi | P_\Psi | \Phi \rangle = p(\Psi) \end{aligned} \quad (9)$$

$|\Phi\rangle$ 에 대한 일반적 정규화는  $\langle \Phi | \Phi \rangle$ 이므로  $P_\Psi |\Phi\rangle$ 에 대한 일반적 정규화는  $\langle \Phi | \Phi \rangle$ 에 대한  $P_\Psi$ 의 투사인  $\langle \Phi | P_\Psi | \Phi \rangle$ 이다.  $\langle \Phi | P_\Psi | \Phi \rangle$ 는 테스트 후의 양자상태  $\Psi$ 에서  $\Phi$ 을 발견할 확률이므로  $\Phi$ 에 대한  $P_\Psi$ 의 기댓값이다.

성질 7.  $\sqrt{\langle \Phi | P_\Psi | \Phi \rangle}$ 와  $P_\Psi$ 는 각각 정규화와 비정규화 투사 측정 시의 확률진폭이므로 정규화에 의한 투사 측정 후의 상태를  $|\Psi'\rangle$ 라 하면 식(10)에서  $\frac{P_\Psi}{\sqrt{\langle \Phi | P_\Psi | \Phi \rangle}}$ 는 상태  $|\Psi'\rangle$ 에서 상태  $|\Phi\rangle$ 을 발견할 확률진폭이다.

$$\begin{aligned} |\Psi'\rangle &= \frac{P_\Psi |\Phi\rangle}{\sqrt{\langle \Phi | P_\Psi | \Phi \rangle}} \\ &= \frac{P_\Psi}{\sqrt{\langle \Phi | P_\Psi | \Phi \rangle}} |\Phi\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

다중 상태벡터의 투사측정은 텐서 곱 연산을 이용해 측정 대상 상태벡터에 대해서는  $P_\Psi$ 을 적용해 투사측정을 실시하고, 측정대상이 아닌 상태벡터에 대해서는 항등연산을 실행한다. 일반적으로 정규화에 의해 수행되는 상태벡터의 투사측정을 양자역학에서는 역설적으로 ‘상태벡터 또는 파동패킷(wave-packet) 붕괴’로 해석한다.

### III. 스위치 함수의 양자역학적 임베딩

임계 동작점  $d$ 을 갖는 ternary  $cNOT_3$  게이트는 그림 1과 같다.

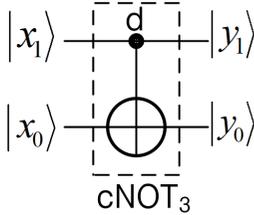


그림 1.  $cNOT_3$  게이트  
Fig. 1  $cNOT_3$  gate

식(11)과 같이 대각선 행렬이 아닌  $3^2 \times 3^2$  차원  $cNOT_3$  행렬은 부분행렬  $1_3$ 과  $NOT_3$ 을 이용하여  $3 \times 3$ 차원 대각선 행렬로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 cNOT_3 &= \begin{bmatrix} 100000000 \\ 010000000 \\ 001000000 \\ 000100000 \\ 000010000 \\ 000001000 \\ 000000100 \\ 000000001 \\ 000000010 \\ 000000010 \\ 000000100 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1_3 & 0 \\ 0 & 0 & NOT_3 \end{bmatrix} = diag(1_3, 1_3, NOT_3)
 \end{aligned} \tag{11}$$

,where  $1_3 = \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix}$ ,  $NOT_3 = \begin{bmatrix} 001 \\ 010 \\ 100 \end{bmatrix}$ .

$cNOT_3$  행렬이 대각선 행렬이 되면 식(12)과 같이 단일입자 양자상태들의 텐서 곱에 의한 유니터리 변환이 가능하다.

$$\begin{aligned}
 |y_1 y_0 \rangle &= \begin{bmatrix} 100000000 \\ 010000000 \\ 001000000 \\ 000100000 \\ 000010000 \\ 000001000 \\ 000000100 \\ 000000001 \\ 000000010 \\ 000000010 \\ 000000100 \end{bmatrix} |x_1 x_0 \rangle \\
 &= |x_1 \rangle \otimes \begin{bmatrix} 1_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1_3 & 0 \\ 0 & 0 & NOT_3 \end{bmatrix} |x_1 \rangle |x_0 \rangle
 \end{aligned} \tag{12}$$

식(13)은 산술 멱함수 제어법[4-7]에서 산술 멱함수로 리터럴스위치  $d^{f(x)}$ 을 사용한 방법[6,7]이다.

$$\begin{aligned}
 |y_1 y_0 \rangle &= |x_1 \rangle \otimes (diag(1_3, 1_3, NOT_3) |x_1 \rangle) |x_0 \rangle \\
 &= |x_1 \rangle \otimes NOT_3^S |x_0 \rangle \\
 &\text{, where } diag(1_3, 1_3, NOT_3) |x_1 \rangle \equiv NOT_3^S \\
 &\text{, } S = d^{f(x_1)}, f(x_1) = x_1 \\
 &\text{, } d^{f(x_1)} = \begin{cases} 1, & \text{iff } d = f(x_1) \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{13}$$

그림 2는 그림 1에 식(13)의 리터럴스위치를 임베딩한 실현도이다.

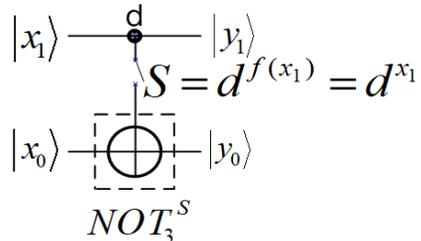


그림 2. 리터럴스위치에 의한 산술 멱함수 제어  
Fig. 2 Arithmetic power function control by literal switch

그림 2의 제어선 상에 제어연산자  $A$ 를 추가하면 제어함수는 그림 3과 같이  $f(x_1) = A|x_1 \rangle = |Ax_1 \rangle$ 의 진화연산을 수행할 수 있다.

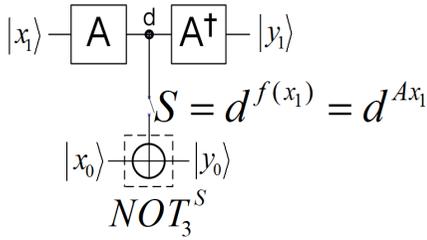


그림 3. 제어 연산자를 갖는 리터럴스위치 임베딩  
Fig. 3 Embedding Literal Switches with Control Operators

양자게이트 내부의 모든 제어 동작점에 대해 리터럴스위치 임베딩이 가능하다. 이때 리터럴스위치의 2진 값은 양자역학적 물리량이 아니다. 본 논문은 리터럴스위치를 양자역학적 확률진폭 파라미터로 변환함으로써 식(9)의 일반적 투사측정에 의한 확률 측정이 가능하도록 확장하고자 한다. 그림 3에서 제어입력 상태벡터  $|x_1\rangle$ 의 제어함수  $f(x)$ 가  $f(x) = Ax_1$ 일 때 동작 임계값이  $d = r - 1$ 인 제어 동작점  $d$ 에서  $f(x)$ 가 발견될 확률진폭은 식(6)에 의해  $\langle d|f(x)\rangle = \langle d|Ax_1\rangle$ 이다.  $\langle d|Ax_1\rangle$ 에 대한 식(4)의 정규화 조건 만족 여부는  $d$ 와  $Ax_1$ 이 직교 관계일 경우에 정리 1을 만족하는 2진 스칼라 연산이다.

정리 1. 제어점  $d$ 에서 상태벡터  $|Ax_1\rangle$ 이 발견될 확률진폭  $\langle d|Ax_1\rangle$ 에 대한 정규화 조건은  $d = Ax_1$ 이고, 기댓값은  $\langle Ax_1|P_d|Ax_1\rangle$ 이다.

(증명) 확률진폭인  $\langle d|Ax_1\rangle$ 에  $Ax_1 = d$  조건을 적용하면  $\langle d|Ax_1\rangle = \langle d|d\rangle = 1$  과 같이 정규화 조건을 만족하므로  $Ax_1 = d$ 은 동작 임계점  $d$ 에서 상태벡터  $|Ax_1\rangle$ 이 발견될 직교 정규화조건이다. 동작 임계점  $d$ 에서  $|Ax_1\rangle$ 에 대한 투사측정은  $P_d|Ax_1\rangle$ 이며,  $P_d|Ax_1\rangle$ 의 일반적 정규화가 기댓값은

$$\begin{aligned} |\langle d|Ax_1\rangle|^2 &= \langle d|Ax_1\rangle^* \langle d|Ax_1\rangle & (14) \\ &= \langle Ax_1|d\rangle \langle d|Ax_1\rangle \\ &= \langle Ax_1|P_d|Ax_1\rangle. \end{aligned}$$

식(14)에서  $Ax_1 = d$  일 때 기댓값은 1이므로 동작점  $d$ 에서 상태벡터  $|Ax_1\rangle$ 은 100% 발견된다(증명 끝).

투사 측정 후의 상태 값은 식(15)과 같다.

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= \frac{P_d|Ax_1\rangle}{\sqrt{\langle Ax_1|P_d|Ax_1\rangle}} & (15) \\ &= \frac{P_d}{\langle d|Ax_1\rangle} |Ax_1\rangle \\ &= P_d|Ax_1\rangle \\ &= |Ax_1\rangle. \end{aligned}$$

식(16)은 동작 임계값이  $d$ 인 제어점에서  $|Ax_1\rangle$ 의 진화연산이 발견될 확률진폭의 정규화조건을 투사한 양자역학적 2진 스위치로서 이를 확률진폭스위치라 명칭한다.

$$S = \langle d|Ax_1\rangle \tag{16}$$

식(16)의 단일 확률진폭스위치는 AND 논리에 의한 다중 확률진폭스위치로  $\bigwedge_{i=n}^1 \langle d|Ax_i\rangle$  과 같이 확장될 수 있다. 식(17)은  $n$ 과  $n'$ 이 각각 행과 열인 크로네커 델타  $\delta_{nn'}$ 에 정리 1의 정규화조건을 적용한 양자역학적 2진 스위치로서 이를 크로네커델타 스위치라 명칭한다.

$$S = \delta_{d,Ax_i} = \begin{cases} 1, & \text{iff } d = Ax_i \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{17}$$

크로네커델타 스위치는 확률진폭스위치와 동일한 정규화조건 감지 기능을 갖는 2진 스위치이지만 확률진폭스위치보다 표현이 간결하고  $\bigwedge_{i=n}^1 \delta_{d,Ax_i}$  과 같이 AND 논리로의 확장이 용이하다.  $\forall d = Ax_i$  일 때  $\bigwedge_{i=n}^1 \delta_{d,Ax_i} = 1$ 은 대각선 행렬이므로 시간 독립적인 정상상태를 나타낼 수 있다.

그림 4와 식(18)은 양자역학적 2진 스위치들로 임베딩한 ternary  $cNOT_3$  게이트이다.

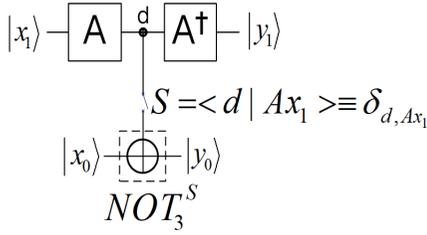


그림 4. 제어 연산자가 있는 ternary  $cNOT_3$  게이트의 양자역학적 2진 스위치 임베딩

Fig. 4 Quantum mechanical binary switch embedding of the ternary  $cNOT_3$  gate with control operator

$$\begin{aligned}
 |y_1 y_0\rangle &= |x_1\rangle \otimes NOT_3^S |x_0\rangle & (18) \\
 , \text{ where } S &= \langle d | f(x_1) \rangle \equiv \delta_{d, f(x_1)} \\
 , f(x_1) &= Ax_1 \\
 , S &= \begin{cases} 1, & \text{iff } f(x_1) = d \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

#### IV. 투사 측정 및 비교 고찰

본 장에서는 양자역학적 2진 스위치를 2-qutrit ternary  $cNOT_3$  게이트의 산술 멱함수 임베딩에 적용하고,  $|x_1 x_0\rangle = |10\rangle$  인 경우에 그림 5의  $|\Psi_1\rangle \sim |\Psi_6\rangle$  진화연산과 두 지점에서의 투사측정을 실시하였다.

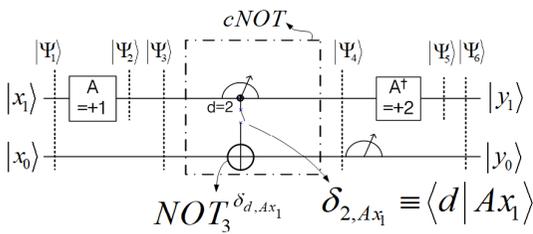


그림 5. 2-qutrit ternary  $cNOT_3$  게이트의 투사 측정  
Fig. 5 Projective measurement of the 2-qutrit ternary  $cNOT_3$  gate

식(19-21)에서  $|\Psi_1\rangle$  과  $|\Psi_3\rangle$  가 2-qutrit 상태벡터 텐서 곱 연산일 때 1-qutrit 상태벡터  $|\Psi_2\rangle$  는  $|x_1\rangle$  에 대한  $A|x_1\rangle = +1|1\rangle$  의 진화연산이다.

$$|\Psi_1\rangle = |x_1\rangle \otimes |x_0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [00010000]^T \quad (19)$$

$$|\Psi_2\rangle = A|x_1\rangle = +1|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |2\rangle \quad (20)$$

$$|\Psi_3\rangle = |\Psi_2\rangle \otimes |x_0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [000000100]^T \quad (21)$$

다중 상태벡터  $|\Psi_4\rangle$  는 제어선 상의  $|\Psi_2\rangle$  을 항등 연산으로 통과시키고, 표적선 상의 상태벡터  $|0\rangle$  에 대해서는 식(22)과 같이 양자역학적 2진 스위치를 멱함수로 갖는 식(18)의 진화연산을 실행한다.

$A = +1$  일 때  $A|x\rangle = +1|1\rangle$  진화연산으로 발생한 쓰레기 qutrit  $|\Psi_2\rangle$  는  $|\Psi_6\rangle$  에서의 정보가역성 유지를 위해 식(23)의  $|\Psi_5\rangle$  에서  $A^\dagger A = 1$  을 항등 성질을 만족하는  $A^\dagger = +2$  의 진화연산을 실행한다.

$$\begin{aligned}
 |\Psi_4\rangle &= cNOT_3 |\Psi_3\rangle = cNOT_3 (|\Psi_2\rangle \otimes |0\rangle) & (22) \\
 &= |\Psi_2\rangle \otimes NOT_3^{<2\Psi_2>} |0\rangle \\
 &= |2\rangle \otimes NOT_3 |0\rangle \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |2\rangle \otimes |2\rangle \\
 &= [000000001]^T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\Psi_5\rangle &= +2|\Psi_2\rangle = +2|2\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & (23) \\
 &= |1\rangle
 \end{aligned}$$

최종 출력  $|\Psi_6\rangle$  에서  $|y_1\rangle$  은 최초의 입력 상태벡터와 항등이며, 표적 상태벡터  $|y_0\rangle$  는  $NOT_3|0\rangle$  진화연산에 의해  $NOT_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  가  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |2\rangle$  로 진화한 연산 결과를 보여 준다.

$$\begin{aligned}
 |\Psi_6\rangle &= |y_1 y_0\rangle = cNOT_3 |x_1 x_0\rangle & (24) \\
 &= |x_1\rangle \otimes NOT_3^{\delta_{2,\Psi_2}} |x_0\rangle \\
 &= |1\rangle \otimes |2\rangle = [000001000]^T
 \end{aligned}$$

다음으로 그림 5의  $|\Psi_3\rangle$  제어선과  $|\Psi_4\rangle$  표적선 상의 투사측정에 본 논문 방법과 Moraga[2] 방법을 적용하고자 한다. 먼저 본 논문 방법에서는 대각선 행렬 상의 모든 상태벡터들이 직교조건을 만족하면  $\langle df(x) \rangle \in \{0,1\}$  이므로 확률진폭, 확률, 그리고 평균 기댓값의 스칼라 연산 결과가 동일하다. 따라서 제어선 상의 측정 점에서 2를 발견하기 위한 확률 기댓값은 확률진폭스위치로부터  $p(2) = \langle 2|\Psi_2\rangle = 1$  과 같이 직접 구할 수 있다. Moraga[2] 방법은 다중상태벡터  $|\Psi_3\rangle$  상의 제어선 측정이므로 식(25)의  $M_2$  연산자를 사용하며,  $P_2$ 의 선행 연산이 요구된다.

$$M_2 = P_2 \otimes 1_3 = \text{diag}[000000111] \quad (25)$$

식(26)의 Moraga[2] 투사측정 결과는 2가 100% 발견됨을 나타낸다.

$$p(2) = \langle \Psi_3 | M_2 | \Psi_3 \rangle \quad (26)$$

$$= [000000100] \text{diag}[000000111] [000000100]^T = 1$$

식(27)은 제어 동작점이 아닌  $|\Psi_4\rangle$ 의 표적선 상에서 2를 발견하기 위한 본 논문의 투사측정이다.

$$|\langle 2|y_0\rangle|^2 = \langle y_0 | P_2 | y_0 \rangle = \langle 2|y_0\rangle \quad (27)$$

$$= \langle 2|NOT_3^{\langle 2|\Psi_2\rangle} |x_0\rangle = \langle 2|2\rangle = 1$$

Moraga[2] 방법으로 표적선 상의  $p(2)$ 을 구하려면 식(28)의  $M'_2$  연산자를 식(29) 투사측정에 적용한다.

$$M'_2 = 1_3 \otimes P_2 = \text{diag}[001001001]. \quad (28)$$

$$p(2) = \langle \Psi_4 | M'_2 | \Psi_4 \rangle \quad (29)$$

$$= [000000001] \text{diag}[001001001] [000000001]^T = 1$$

위의  $cNOT_3$  게이트에 대한 투사측정에서 본 논문 방법은 유니터리 게이트의 산술 멱함수로 임베딩된 측정 점의 확률진폭이 확률진폭스위치에 임베딩되어 있어 확률과 평균 기댓값을 추가 연산 없이 직접 구할 수 있었다. 반면에 Moraga[2]의 행렬연산 방법은 확률의 투사측정에  $P_\psi$ ,  $M_\psi$ ,  $p(\Psi)$ 의 3단계 연산이 수반되었다. AND 논리로 확장된 양자게이트의 투사측

정에서 본 논문 방법의 확장은 확률진폭스위치의 단순 AND 곱 연산이며, 이때 유니터리 행렬은 제어입력 상태벡터들에 독립적인  $r \times r$  차원이다. 반면에 Moraga[2] 방법은 제어입력 상태벡터 수가  $n$ 일 때 다중 상태벡터 연산자  $M_\psi$ 에 대한 항등연산자의 텐서 곱도 증가하여  $r^{n+1} \times r^{n+1}$  차원의 3단계 행렬 연산이 요구된다. 그밖에 본 논문 방법은 표적출력의 단독 연산이 가능하지만, Moraga[2] 방법은 표적출력을 구하기 위해  $r^{n+1} \times r^{n+1}$  차원의 전체 행렬연산이 요구된다.

## VI. 결 론

본 논문은 양자게이트의 임의 측정 점에서 확률진폭, 확률, 평균 기댓값 및 정상상태 단위행렬의 행렬 요소 등의 수학적 투사가 용이한 새로운 함수 임베딩 방법을 제안하였다. 본 논문에서는 측정 점에 대한 정규화조건을 디랙 기호와 크로네커델타 기호로 표현한 확률진폭스위치와 크로네커델타 스위치와 같은 양자역학적 2진 스위치들을 유니터리 게이트의 산술 멱함수로 사용함으로써 측정 점에 대한 확률진폭, 확률, 평균 기댓값 등의 투사측정이 단일 스칼라 연산으로 가능함을 보였다. 아울러 제안한 양자역학적 2진 스위치들은 대각선 행렬의 행렬요소 정보를 포함하므로 정상상태 양자의 정보를 제공할 수 있는 부수적 이점도 기대된다. 본 논문이 제안한 양자역학적 2진 스위치들은 AND 논리에 의해 다중 상태벡터로 확장이 용이하며, 함수 표현상의 적층 문제와 지수 함수와의 혼동 문제가 발생하지 않는다. 따라서 본 논문이 제안한 양자역학적 2진 스위치들에 의한 함수 임베딩 방법은 중첩상태 양자의 측정, 양자게이트의 설계, 모델링, 고장 탐지 및 직관적 해석 등 물리적 측정이 어려운 상황에서의 다양한 투사 측정에 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

## References

- [1] M. Bellac. *A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computing.* :

Cambridge University Press, 2006.

- [2] C. Moraga, "On some Basic Aspects of Ternary Reversible and Quantum Computing," *IEEE 44th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic*, Bremen, Germany, May 2014, pp. 178-183.
- [3] D. Park and Y. Jeong, "A New Functional Synthesis Method for Macro Quantum Circuits Realized in Affine-Controlled NCV-Gates," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Science*, vol. 9, no. 4, 2014, pp. 447-454.
- [4] D. Park and Y. Jeong, "Realizing Mixed-Polarity MCT gates using  $NCV-|v_1\rangle$  Library," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Science*, vol. 11, no. 1, 2016, pp. 29-35.
- [5] D. Park and Y. Jeong, "For new Duality Structure and its Application in the  $NCV-|v_1\rangle$  Library," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Science*, vol. 11, no. 2, 2016, pp. 165-170.
- [6] D. Park, "A New Function Embedding Method for the Multiple-Controlled Unitary Gate based on Literal Switch," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Science*, vol. 12, no. 1, 2017, pp. 101-107.
- [7] D. Park, "A Study on the Information Reversibility of Quantum Logic Circuits," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Science*, vol. 12, no. 1, 2017, pp. 189-194.
- [8] Z. Zilic, K. Radecka, and A. Khazamiphur, "Reversible circuit technology mapping from non-reversible specifications," *Proc. Design Automation and Test in Europe*, Nice, France, Apr. 2007, pp. 558-563.
- [9] S. Sultana and K. Radecka, "Rev-Map: A Direct Gateway from Classical Irreversible Network to Reversible Network," *IEEE 41th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic*, Tuusula, Finland, May 2011, pp. 147-152.
- [10] D. Park and Y. Jeong, "Gate Cost Reduction Policy for Direct Irreversible-to-Reversible Mapping Method without Reversible Embedding," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Science*, vol. 9, no. 11, 2014, pp. 1233-1240.

## 저자 소개



### 박동영(Dong-Young Park)

1980년 인하대학교 전자공학과 졸업(공학사)

1985년 인하대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)

1995년 인하대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사)

2017년 현재 강릉원주대학교 정보통신공학과 교수

※ 관심분야 : 다치논리시스템 설계, 양자컴퓨팅, 양자정보통신