韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
https://doi.org/10.7468/mathedu.2017.56.4.387
2017. 11. 제 56권, 제 4호, 387-405.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
November. 2017, Vol. 56, No. 4, 387-405.

거리함수와 속력함수의 관계에서 거리함수의 상수항에 대한 학생들의 인식과 표현

이동근(문정고)

Ⅰ. 서론

미적분 학습에서 미적분 개념에 대한 이해보다는 기계적인 계산에 치우친 학습이 이루어지고 있다는 문제가 제기되고 있다(권오남, 박재희, 조경희, 박정숙, 박지현, 2015; 이현주, 류중현, 조완영, 2015; 정연준, 이경화, 2009a; 최영주, 홍진곤, 2014). 이는 학생들이 미적분 관련 문제를 해결하는 과정에서, 계산을 통하여 문제가 요구하는 값을 구할 수는 있지만 정작 자신이 제시한 답의 의미나 문제가 내포하고 있는 의미에 대하여는 고민하고 있지 못하다는 점을 지적한 것으로 볼 수 있다. 한대희(1999)는 미적분학의 기본정리에 대한 학생들의 인식을 언급하면서, 정리를 이용한 계산에 능숙하기 이전에 '정리' 자체에 대하여 의미 있게 이해하는 것이 중요하다고 지적하였다.

이에 대하여 민숙・최성원(2016)은 교수자 중심의 일방향성 강의가 학생들로 하여금 시험을 대비한 단편적 지식의 획득이나 지엽적 공식의 암기에 치우치도록 만든다고 하였다. 또한 이러한 문제를 탈피하기 위해서는 학습자 자신이 주체가 되는 교육 경험의 제공이 필요하다고 주장하였다. 이러한 맥락에서 볼 때, 학습할 개념에 대하여 학생들 스스로가 고민할 수 있는 기회를 제공하는 것은 중요하다고 볼 수 있으며, 이는 '학습자가 주체가 되는 경험을 제공하는 것'에도 도움이 될 것으로 보인다.

학생들이 미적분 학습에서 스스로 고민할 수 있도록 기회를 제공하기 위해서는 '학생들이 가지고 있는 그들만의 독특한 미적분 개념에 대한 이해방식'에 대한 연구가 선행되어야한다. 이때 연구자는 학생들이 어떠한 생각을 하고 있는지 정확하게 알 수 없다. 이러한 이유에서 연구자와 연구대상 학생들이 지속적인 관계를 맺으면서 교수실험을 진행하고 이를 통하여 교사가 관찰한 '학생들의 수학'에 대한 자료를 축적하는 것이 필요하다(Steffe & Gale, 1995). 지속적인 교수실험을 통하여 얻은 학생들의 미적분 개념 학습에 대한 정보는 학생들로 하여금 미적분 학습에서 고민할 수 있는 기회를 제공하는데 도움이 될 수 있기 때문이다.

Gravemeijer & Doorman(1999)은 물체의 운동에 대한 연구에서 '속력과 거리 관계'의 모델링을 미적분의 출발점으로 간주하였다. 학생들의 미적분 개념 관련 연구에서도 속력과 거리의 관계 혹은 속력함수와 거리함수의 관계를 소재로 연구를 진행한 경우가 있다(신보미, 2009; 정연준, 이경화, 2009a; 이동근, 안상진, 김숙희, 신재홍, 2016; 이동근, 2017)[1]

거리함수와 속력함수의 관계에서 '거리함수에서 속력함수를 구성하는 것'은 미분과 관련지어 살펴볼 수 있고, '속력함수에서 거리함수를 구성하는 것'은 적분과 관련지어 살펴볼 수 있다. 특히 속력함수에서 특정 구간에서 이동한 거리를 구한 다음 얻어진 거리 값들의 변화를 이용하여 거리함수를 구성(이동근 외, 2016)한다고 할 때, 학생들은 속력함수의 부정적분을 구해서 정적분을 이용하여 거리에 해당하는 값을 구할 것으로 보인다(정연준,

* 접수일(2017년 9월 21일), 수정일(2017년 10월 9일), 게재확정일(2017년 11월 27일)
* ZDM분류 : C30
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 거리함수, 속력함수, 원시함수, 부정적분, 정적분, 적분상수

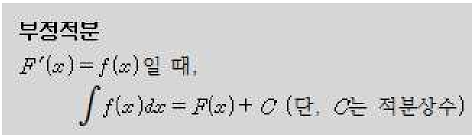
1) 이때 학생들을 대상으로 속력과 거리의 관계를 도입하는 연구에서 '속도와 속력' 혹은 '위치와 거리'에 대한 구분을 엄밀하게 하지 않은 경우가 있는데, 이는 학생들의 개념 발달 과정에서 해당 개념들에 대한 구분이 엄격하게 필요한 상황이 관찰되기 이전까지는 학생의 관점에서 용어를 혼용하여 사용한 것으로 보인다.

이경화, 2009b). 이러한 과정은 적분 관련 개념 중에서 ‘부정적분과 정적분의 관계’와 관련되어 있으며, 이때 적분 상수를 고려해야할 필요가 발생한다. 그런데 정연준・이경화(2009b)는 선행 연구들에서 학생들을 대상으로 한 적분 개념 이해와 관련된 연구가 드물다고 지적하였으며, 이러한 지적을 참고해보면 적분 상수 와 관련된 학생들의 이해에 관련된 연구는 더욱 드문 편임을 알 수 있다.

적분 상수에 대한 학생들의 이해를 살펴보기 위해서는 학생들이 처음 적분 상수에 대하여 접하게 되는 교과서 내용을 살펴볼 필요가 있다. 이러한 필요에 따라 2009 개정 교육과정에서 적분 상수의 내용을 포함하고 있는 미적분Ⅰ 교과서 9종의 적분 상수에 대한 기술을 조사하였다. 2009 개정 교육과정에서의 총 9종의 미적분Ⅰ 교과서에서는 함수 $F\ x)$의 도함수 $f(x)$에서 부정적분을 구할 때 하나의 함수로 정할 수 없다는 점에서,

$$f(x)dx = F(x) + C$$

와 같이 표현하고 적분 상수 C의 필요성을 언급하고 있다.


부정적분
$F'(x) = f(x)$일 때,
$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

[그림 1] 미적분Ⅰ교과서에서의 부정적분(황선욱 외, 2014)
[Fig 1] Indefinite integral in Calculus I textbooks

교과서에서의 구성을 따르면 적분 상수 C는 미분과 그 역과정의 계산 결과를 맞춰주기 위한 절차적인 도구로서의 의미를 갖는다. 즉, 미분의 역과정으로서 부정적분을 도입할 때, 미분의 역과정의 결과가 하나로 정하여지지 않는다는 문제를 해결하기 위하여 적분 상수를 넣어주는 것으로 볼 수 있으며, 이때 학생들은 적분 상수 C의 계산적인 역할에만 주목하여 학습하게 될 가능성이 있다. 절차적인 도구로서의 적분 상수 C에 대한 학습은 학생들로 하여금 그 의미에 대한 고민을 하기 보다는 미분의 역과정에 해당하는 계산을 하고나서 맨 마지막에 기계적으로 덧붙여주는 역할밖에 하지 못한다. 따라서 적분 상수 C에 역할과 관련된 다양한 적분 관련 개념적 논의가 진행되기 힘들뿐만 아니라, 부정적분과 정적분을 제대로 구분하지 못하는 일이 발생하기도 한다(정연준, 이경화, 2009b; Zandieh, 1998).

그런데 이동근(2017)의 연구에서는 학생들이 물체의 운동에서 거리함수와 속력함수의 관계를 이용하여 물체의 운동을 해석하는 장면에서 미적분 개념 학습과 관련된 의미 있는 통찰을 제시하고 있다. 이에 따르면 학생들이 물체의 운동을 해석하는 과정에서 적분 상수 C를 단순하게 절차적인 도구로서만 생각하는 것이 아닐 수 있음을 보여준다. 이러한 가정 하에 물체의 운동과 관련지어 적분 상수 C에 대한 고민이 학생들에게서 어떻게 나타나는지 살펴보는 것은 미적분 학습에 의미 있는 시사점을 제공하여줄 수 있다.

이러한 측면에서 본 연구에서는 미적분 관련 지식이 없는 학생들을 대상으로 거리함수와 속력함수의 관계 속에서 물체의 운동을 해석하는 과제를 통하여 적분 상수 C에 대한 학생들만의 독특한 인식과 표현에 대하여 주목할 것이다. 이를 위하여 총 20차시의 교수실험 중 본 연구 주제와 관련된 차시(14차시)의 교수실험을 살펴볼 것이다. 특히 본 연구 주제와 관련하여 14차시의 교수실험 자료를 그 이전 차시의 교수실험(8차시, 10차시)에서의 반응과 함께 집중적으로 분석하여 논의하고자 한다. 지금까지의 논의에 따라 본 연구는 다음과 같은 연구 문제를 갖는다.

첫째, 거리함수 $y=\frac{x}{3}$ 과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$를 따르는 물체의 운동에 대한 학생들의 인식과 표현은 어떠한가?

둘째, 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 속력함수를 구성하는 과정과 그 역의 과정을 구성하는 과정에서 학생들의 거리함수와 속력함수에 대한 인식과 표현은 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

본 연구는 학생들의 거리함수와 속력함수의 관계에 대한 인식과 표현 속에서 미분과 부정적분의 관계에 대한 학습에서 교수학적으로 의미 있는 통찰을 얻는 것에 목적을 두고 있다. 이러한 목적에 따라 본 장에서는 부

정적분에 대한 선행연구를 조사하여 교수실험의 필요성을 확인할 것이다. 또한 거리함수와 속력함수라는 용어를 도입하여 학생들의 시간, 속력, 거리의 관계에 대한 인식과 표현을 조사한 연구들을 중심으로 거리함수와 속력함수의 관계에서 적분 상수에 대한 시사점을 얻고자 할 것이다.

1. 부정적분

학교 수학에서는 적분 학습의 시작 단계에서 부정적분을 미분의 역으로 도입한다(정연준, 이경화, 2009a). 그러나 Toepliz(1963)가 '역사적으로 적분과 미분의 관계에 대한 고민이 미적분의 핵심적인 문제였지만 해결하기가 매우 어려운 과제였다.'고 평가하였던 것을 고려하면, 지금과 같이 '부정적분을 미분의 역'으로 도입하여 적분 개념 학습을 시작하기까지 많은 고민이 있었음을 알 수 있다. 학교 수학에서의 적분 학습의 구성 방식은 미적분 개념에 대한 역사발생 과정을 고려하여 재구성하였을 것으로 보인다.

한대희(1999)는 Toeplitz의 'Calculus- A Genetic Aproach'에서 미적분학의 기본정리의 발달 단계를 제시한 다음, 미적분학의 기본정리가 넓이를 구하는 문제에서부터 발달하였다는 점과 역학 연구와 관련이 깊음을 언급하였다. 또한 미적분 개념의 발달 과정에서 Barrow가 미적분학의 기본정리를 이해하는 방식과 오늘날 우리가 이해하는 방식에 차이가 있음을 지적하면서, 현재 고등학교 과정에서 지도되는 내용이 어떻게 구성되어 온 것인지에 대하여 논하고 있다. 한대희(1999)의 연구가 발표된 시기는 6차 교육과정을 따르고 있고, 본 연구가 진행되는 시기의 연구대상 학생들은 2009 개정교육과정을 따른다. 그러나 두 교육과정에서 적분 학습에 대한 구성은 1) 미분을 학습한 이후, 2) 미분의 역과정으로 부정적분을 도입한 이후, 3) 구분구적법을 소개하여 정적분을 구분구적법의 일반화로 정의해서 4) 미적분학의 기본정리를 증명(정연준, 이경화, 2009a)하는 것으로 동일한 구성을 따르고 있다.

2009 개정 교육과정에서의 미적분Ⅰ 교과서들은 공통적으로 함수 $x)$에 대하여 $F'(x)=f(x)$일 때, 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라 하고 $f(x)dx$로 나타낸다. 교과서의 표현에 오류가 없다하더라도 학생들은 자신들의 방법으로 교과서의 표현을 해석할 수 있음을 가정할 때, 교과서에서 도입한 부정적분에 대하여 그들만의 다양한 질문들을 하는 것은 자연스러운 현상으로 볼 수 있다. 그리고 이러한 학생들의 질문은 적분 상수 C와 관련이 있는 경우가 많다.

예를 들어 $\int f(x)dx=F(x)+C$를 소개할 때 일부 교과서는 '함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$라고 하면, 부정적분을 $F(x)+C$로 나타낼 수 있다.'고 소개하고 있다.

따라서 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면
$f(x)$의 부정적분은 적당한 상수 C에 대하여
$F(x)+C$
로 나타낼 수 있고,

[그림 2] 미적분Ⅰ교과서에서의 부정적분(황선욱 외, 2014)
[Fig 2] Indefinite integral in Calculus I textbooks

이때 일부 학생들은 이 표현에 대하여, 부정적분들을 원소로 가지는 집합을 부정적분으로 표현한 것처럼 해석하기도 한다. 이러한 해석상의 문제는 부차적으로 교과서에서 다루는 관계식 중

$$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)dx \text{ (단, } k\text{는 상수)}$$

에서 $k=0$일 때 이해의 어려움에 대한 원인이 되기도 한다.

앞서 언급한 $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)라는 표현에서 $k=0$일 때 우변은 0이지만, 좌변의 결과는 적분 상수 C가 된다. 즉, 좌변은 정해지지 않은 값이 되고 우변은 0이라는 값으로 정해진 값이 나오는데 이 두 값이 같다는 문제가 발생할 수 있기 때문에 학생들이 혼란을 겪는 경우가 있다.

한편 Courant & Robbins(1996)은 미분의 역을 부정적분으로 정의하는 것에 대하여 미적분 이론의 핵심을 감추는 일이라고 지적하였다. 또한 Courant(1970)은 부정적분을 $\int f(x)dx$로 표현하는 것 대신 아래 끝이 상수로 정해진 $\int^{x} f(t)dt$로 도입할 필요가 있다고 하였다. 이는 부정적분을 미분의 역과정으로 도입하는 것이 아니라 정적분을 이용하여 부정적분을 도입하려는 것으로 볼 수 있다. 더불어서 Courant(1970)은 미분의 역과정에 해

당하는 개념으로 원시함수 $x)$를 도입할 필요가 있다고 하였으며, 원시함수와 부정적분이 상수만큼의 차이가 발생하므로 이를 $F(x)=C+ \quad ^{x}f(t)dt$ (단, C와 a는 상수이다.)와 같이 적분 상수를 이용하여 보정해주는 것으로 설명하였다.

이러한 논의를 거쳐 Courant은

$$F(x)=C+\int_{a}^{x}f(t)dt=\int f(x)dx$$

의 결론을 주장하였는데, 이는 처음에는 부정적분과 원시함수를 구분하였으나 결과적으로는 적분 상수 C의 의미를 통하여 원시함수와 부정적분을 같은 것으로 보겠다는 것을 뜻한다. 또한 이를 통하여 원시함수가 부정적분으로 대체된 것에 의미를 둔 것으로 보인다(정연준, 이경화, 2009b).

Courant(1970)의 원시함수와 부정적분 그리고 부정적분과 정적분 사이의 관계 속에는 대수적으로 등호가 성립할 수 있도록 해주기 위하여 주어지는 상수가 있는데 이는 적분 상수와 관련이 깊다. 정연준・이경화(2009b)는 Courant(1970)의 주장을 소개하면서 동시에 학생들이 부정적분을 구간이 결정되지 않은 정적분으로 간주한다는 점을 지적하면서, 미분과 적분의 관계에 대하여 간단하고 형식적인 접근이 아니라 각각의 의미와 구조를 풍부하게 파악하는 기회를 제공하는 것이 필요하다고 하였다. 이때 학생들의 적분 상수에 대한 이해를 살펴보는 연구를 통하여, 미분과 적분에 대한 형식적 접근이 아닌 의미와 구조를 풍부하게 하는데 도움이 될 것으로 보인다.

2. 시간, 속력, 거리의 관계

시간, 속력, 거리의 관계는 물체의 운동을 해석하는 활동과 미적분 학습을 연결하는데 중요한 역할을 한다. 이동근(2017)은 미적분 학습 경험이 없는 고등학교 1학년 학생 3명에 대한 교수실험을 통하여, 학생들이 시간, 속력, 거리의 관계를 '거, 속, 시'로 표현되는 학생들만의 독특한 표현으로 이해하고 있음을 드러내고, 이때 학생들이 인식하는 시간, 속력, 거리의 관계 속에서 각 변수에 해당하는 '시간', '속력', '거리'는 학생들에게 있어서 변화의 의미를 담고 있다기보다는 하나의 정해진 값으로 인식되고 있음을 관찰하였다. 또한 이동근(2017)은 학생들이 값으로 인식되던 시간, 속력, 거리의 관계에서 변화를 담고 있는 양으로 인식의 변화가 생긴 이후에 다양한 물체의 운동을 해석하는 상황에서 거리함수와 속력함수를 구성하고 미적분 관련 개념들이 학생들의 방식으로 구성되어가는 과정을 소개하였다. 이를 통하여 물체의 운동과 미적분 개념을 연결하는 학생들의 독특한 방식이 존재할 수 있음을 보여주었으며, 이는 교육과정에서 제시되는 방식과 다를 수도 있다. 따라서 학생들이 물체의 운동을 거리함수와 속력함수의 관계 속에서 이해할 수 있는 과제 상황에서 학생들의 반응을 실험적인 관점[2)]에서 관찰하는 것은 미적분 관련 연구에 유의미한 시사점을 제시하여줄 수 있다.

운동학적 관점에서 시간의 변화에 따른 속력과 거리의 관계에 대한 논의는 Newton 이전 시기에서도 발견되고 있으나, 정적분과 부정적분의 관점에서의 논의는 Newton에 의하여 확립되었다(정연준, 이경화, 2009a). 이때 주된 관심사는 속력함수의 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계였는데, 자유낙하 운동에서 나타난 등가속도 운동의 속력함수 그래프 아래의 넓이와 거리에 대한 이해의 과정에서 적분 개념에 대한 이해가 발견된다고 하였다(Toeplitz, 1963).

Boyer(1959)는 Newton 이전에도 Oresme이 14세기 중반 무렵 Merton 학파의 연구 결과를 이어받아 속도가 변하는 운동에 대한 분석을 하였다는 점을 밝히고, 이때 Oresme이 최초로 속력함수의 그래프 아래의 넓이를 기하적인 관점에서 거리 개념으로 연결하였음을 주장하였다. 특히 Boyer(1959)는 Oresme이 평면 도형의 넓이로 속도라는 물리적 양을 나타낸 첫 번째 사례라고 평가하였는데, 이는 Oresme 이전에는 거리를 일차원적인 양에 해당하는 선분의 길이로 보던 것에서 벗어난 이차원적인 양으로 표현한 것에 의미를 부여한 것으로 볼 수 있다.

그러나 이동근(2017)에서의 학생들의 거리함수와 속력함수의 관계를 구성하는 과정과, Newton 혹은 Oresme이 속력이 변하는 물체의 운동에 대하여 연구한

2) 본 연구에서 '실험적 관점'이라고 표현한 것은 연구자의 예상대로 학생들의 반응이 나올 것이라고 생각하고 다음 과제를 사전에 준비하였다가 제시하는 것이 아니라, 학생들의 반응을 중심으로 교수실험을 진행하는 것을 나타낸 표현으로 볼 수 있다.

내용들 속에는 속력이 변하는 상황에 주목하였다는 공통점은 있지만, 물체의 운동에서 출발점에 대한 인식에 대한 논의는 생략되어있다. 이는 변하는 속력에 대하여 관심을 가지고 있는 상황에서 운동을 비교하기 위해서는 출발점을 동일하게 하거나 또는 출발점이 다른 상황을 굳이 설정할 필요가 없었기 때문이었을 것으로 추정된다. 그러나 물체의 운동에서 출발점에 대한 차이는 분명히 물체의 운동이 다르다는 것을 뜻하며 이러한 차이점에 대한 인식이 미적분 개념으로 어떻게 연결되는지에 대하여 학생들의 반응을 살펴보는 것은 의미 있을 것으로 보인다.

3. 거리함수와 속력함수의 관계에 대한 연구

정연준・이경화(2009a)는 속력함수에서 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계에 대한 역사발생과정에 근거하여 고등학교 2학년 학생 124명을 대상으로 정적분에 대한 이해와 관련된 연구를 하였다. 신보미(2009)도 역사발생적 관점에서의 미적분 개념 발달 과정을 조사한 다음, 고등학교 2학년 학생 108명을 대상으로 속력함수에서 거리를 구하는 것에서 '구분구적에 대한 학생들의 이해 방식'에 대하여 연구하였다. 이들 연구는 거리함수와 속력함수를 이용하여 학생들의 미적분 개념 중 '미적분의 기본정리'에 대한 이해를 살펴보는 연구로 보인다.

이동근 외(2016)은 거리함수와 속력함수의 관계에서 학생들의 미분과 적분의 관계에 대한 인식과 표현의 변화를 조사하였다. 이동근(2017)에서도 속력함수에서 거리함수를 구성하는 과정에서 학생들의 평균속력에 대한 변화의 인식을 조사하였는데, 이를 통하여 학생들이 미분과 적분의 관계를 어떻게 구성해 가는지 세밀하게 관찰하였다. 이들 두 연구는 수학적으로 오류가 있다 하더라도 그 내용과 표현이 학생들에게는 자연스러운 지식이라는 것을 전제하고 그러한 인식이 변해가는 과정을 학생들의 표현에 근거하여 전문가의 입장에서 해석한 연구로 볼 수 있다(Steffe & Gale, 1995).

이들 연구와 같이 거리함수와 속력함수의 관계를 중심으로 학생들의 미적분 개념에 대한 이해를 조사한 연구들을 살펴보면, 학생들이 미분과 적분의 관계 혹은 부정적분과 정적분의 관계에서 적분 상수의 역할에 대하여 주목하지는 못한 것으로 보인다. 앞서 언급한 바와 같이 적분 상수에 대한 다양한 학생들의 질문이 있음에도 불구하고 거리함수와 속력함수의 관계 속에서 학생들이 적분 상수에 대하여 주목하지 못한 것이 이미 적분 상수의 역할에 대하여 주목하지 못한 연구자들의 관점에 기인한 것일 수도 있다. 따라서 본 연구에서는 실험적인 상황에서 학생들의 반응과 구성 방식에 근거하여 교수실험을 구성할 것이며 이 과정에서 학생들의 적분 상수와 관련된 인식과 표현에 대하여 관찰할 것이다.

Ⅲ. 연구방법

본 연구에서는 연구자가 연구대상들의 과제 수행과정에서 나타나는 반응을 분석하여 다음 과제를 제시하는 순환적인 과정을 반복적으로 수행하는 교수실험을 진행하고, 교수실험 결과에서 의미 있는 시사점을 찾고자 하는 질적 사례연구에 해당한다. 사례연구는 연구대상에 대한 이해를 하고자 할 때 활용되며, 연구문제가 '어떻게'로 구성되는 경우에 활용된다(Stake, 2006). 본 연구의 목적이 '연구자와 연구대상의 의사소통의 결과로 구성된 과제 상황에서 학생들의 인식과 표현이 어떠한지를 조사'하는 것에 있으므로, 연구방법으로서 사례연구는 본 연구의 목적에 적합한 연구방법으로 볼 수 있다. 특히 본 연구는 질적 사례연구의 한 방법인 교수실험을 통한 연구에 해당한다. 이에 따라 교수실험, 연구대상자의 특성과 과제 분석, 자료수집 및 분석 방법의 순으로 본 연구의 연구방법에 대하여 기술하고자 한다.

1. 교수실험

교수실험에서 중요한 것은 '과제에 대한 학생의 답'이 아니라 '과제에 대하여 해당 내용에 대한 학습 경험이 없는 학생들을 대상으로 그들이 개별적으로 접근해가는 그들만의 방식에 대하여 관찰하는 것'이다. 교수실험 과정은 고정되고 미리 예견된 계획에 의하여 진행된다기보다는 연구자가 실험 참여 학생과의 대화나 행동 방식에 의하여 단계적으로 개발되며, 매 차시 실험 종료 이후 연구자들 사이의 논의를 통하여 모두 동의하는 과정 이후 다음 실험이 진행되게 된다. 즉, 교수실험은 피 실험자의 반응과 연구자들 간의 일치된 합의 과정에 따른 다음 과제의 투입이 반복적으로 이루어지면서 진행된다

(Glasersfeld, 1995). 즉, 교수실험에서 연구자는 학습자가 특정 수학개념을 어떻게 구성해가는 지에 대하여 추론할 수 있도록 상황을 제시하고 관찰하면서 다음 과제를 준비하는 과정을 반복하게 되며, 구성적 관점에서 학습 관련 연구의 연구방법으로 적절하다(이동근, 신재홍, 2017).

Hackenberg(2005)는 수학 학습을 '자신의 현재 조작 방식에 의해 초래 된 혼란에 반응하여 자신의 조작 방식에 대한 수정 또는 재구성을 하는 과정'으로 설명하면서, 비록 오류를 경험할 수도 있지만 교사는 학생들이 이러한 수학 학습을 경험할 수 있도록 학생의 표현과 수행과정을 해석하는 과정을 경험할 필요가 있다고 하였다. 또한 Steffe & Gale(1995)은 교사가 학생의 표현과 수행과정을 해석하는 과정에 대한 경험에 근거하여 학생의 개념적 구조에 대한 모델을 수립하려는 노력을 해야 한다고 하였다. 수학 학습 모델은 교사가 학생들의 학습을 이끌어 내고 유지하는 법을 배울 수 있는 방법을 설명하는 것으로서, 수학 학습 모델은 반드시 학생과 교사의 학습과 연관되어있다(Steffe & Wiegel, 1996). 그러나 교사가 학생을 관찰하여 수학 학습 모델을 수립하는 것은 교사가 바라본 학생에 대한 수학 학습 모델이므로 학생 스스로가 생각하는 학습 방식 혹은 이해 방식과 일치한다고 볼 수 없다.

이를 설명하기 위하여 Steffe & Tzur(1994)는 1차적 지식과 2차적 지식을 이용하였다. 1차적 지식은 학생들은 자신의 경험적 현실을 질서, 이해, 설명 및 관리하여 예측과 통제의 의미뿐만 아니라 운영 방식에 대해 질문하고, 평가하고, 정당화 할 수 있는 능력을 얻도록 학습하게 되는 과정에서의 지식이며, 수학 학습에서는 학생의 수학(students' mathematics)이라고 한다(Steffe & Tzur, 1994; Steffe & Wiegel, 1996). 2차적 지식은 '교사와 학생'의 상호 작용과정에서 교사가 학생들의 활동 경험을 설명하기 위하여 '학생들의 1차적 지식과 학습'에 대한 선행연구들을 포함한 다양한 자료들을 바탕으로 학생들의 수학 학습 방식을 이해하는 지식을 뜻한다(Steffe & Thompson, 2000). 교수실험에 의한 실험적 연구결과의 축적은 교사의 학생의 학습에 대한 2차적 지식의 축적을 뜻 하며, 학습 모델이 제시되는데 기초자료가 될 수 있다. 지속적인 2차적 지식의 축적에 의하여 제시된 학습 모델은 후속 연구들을 통하여 부분적 혹은 전면적으로 개선될 수 있다. 또한 이러한 학습 모델의 설정 및 개선 작업은 학습자를 위한 교육과정을 제시하는데 도움을 줄 수 있다(이동근, 2017).

본 연구에서 교수실험 진행을 위한 초기 과제는 연구자들의 사전 협의를 통하여 구성하였으며, 이후 과제는 교수실험 진행에 대한 분석과정을 거쳐서 매 차시 이후 연구자들의 협의를 거쳐 구성되었다. 교수실험 진행은 연구자와 학생들 간의 의사소통을 중심으로 진행하되 교수실험을 직접적으로 진행하는 연구자의 판단 하에 학생의 표현을 정리하여 다른 학생들에게 말해줄 필요가 있거나 다음 단계로 넘어갈 수 있는 발문이 필요한 경우에 연구자가 개입하여 진행하였다. 또한 매 차시 종료 이후 연구자들은 이전 차시에서 보인 학생들의 사고와 행동의 의미를 공동으로 분석하고 상호 합의에 근거하여 다음 교수실험을 설계하였다. 연구자 1명(교직경력 15년차)은 교수실험 진행을 담당하였으며, 교수실험의 완성도를 높이고 진행자가 실수하는 부분에 대한 보완과 방향성을 제시하기 위하여 3명의 다른 연구자들이 관찰자로 참여하였다.[3] 본 연구에서 교수 실험은 총 20차시(차시 당 70분 내외)로 구성되었고, 교수실험은 이중 연구 주제와 관련 있는 14차시의 교수실험 자료를 집중적으로 분석하였다. 참여 고등학생 세 명을 대상으로 1학년 1학기 중간고사 이후인 2016년 5월 중순부터 시작하여 2017년 2월 말경까지 약 8개월간 정규수업 시간 이외에 따로 시간을 정하여 진행하였다. 교수실험이 진행된 장소는 학생들의 활동을 캠코더로 저장할 수 있고 녹음이 용이한 별도의 공간에서 진행하였다.

교수실험의 개괄적인 흐름은 <부록>에 별도로 제시하였다. 총 20차시의 교수실험은 물체의 운동에서 시간, 속력, 거리의 관계를 어떻게 구성하고, 그 과정에서 연속적인 변화에 대한 학생들의 인식과 표현을 살펴보려는 목적 하에, 다양한 형태의 함수적 상황을 과제 구성하여 실험을 진행하였다. 이때 13차시까지의 교수실험에서는 속력함수에서 시작하여 거리함수를 구성하는 과정을 살펴보았다면, 본 연구에서 중점적으로 다룬 14차시 교수실험에서는 거리함수에서 속력함수를 구성하는 학생들의 방식과 이어서 다시 속력함수에서 거리함수를 구성하는

3) 여기서 교수 실험을 진행한 수학교사는 제 1저자를 의미한다.

과정에 대한 논의를 담고 있다. 본 연구에서는 교수실험에 참여한 세 명의 학생들이 전체 교수실험 중 일부 차시(8차시, 10차시, 14차시)의 실험 자료를 분석하여,

1) 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$ 과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$로 표현되는 물체의 운동에 대한 학생들의 인식과 표현을 살펴보고

2) 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$ 과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 속력함수를 구성하는 과정과 그 역의 과정을 구성하는 과정에서 학생들의 거리함수와 속력함수에 대한 인식과 표현을 살펴보았다.

2. 연구대상자의 특성과 과제 분석

본 연구에 참여한 세 명의 학생들은 서울 소재 일반계 고등학교 1학년 학생으로서 학생A는 전국연합모의고사 수학영역에서 1등급이었고, 학생B는 2등급, 학생C는 4등급[4]이었다. 세 명의 학생들은 교수실험을 진행한 연구자의 학급 학생들로서, 연구자의 판단에 평소 수업에서 학생들 중에서 자신의 의견에 대하여 잘 설명할 수 있고 지필고사 수학 영역 등급이 서로 상이한 학생들이다. 이러한 의도적인 표본선정은 질적 연구에서 연구자들이 많은 정보를 획득할 수 있다는 장점이 있다(Merriam, 1997).

약 8개월간에 걸쳐서 20차시의 교수실험을 진행하면서 중간에 선행학습의 정도를 파악하기 위하여 면담을 실시하였는데, 세 명의 학생 모두 교수실험 초기(2016년 5월)에는 고등학교 1학년 1학기 내용 중 기말고사 범위에 해당하는 고차방정식(삼차방정식, 사차방정식)과 도형의 방정식 일부에 대한 사전 학습 경험이 있었고, 실험이 진행되면서 여름방학 전후의 시기에는 고등학교 1학년 수학Ⅰ 과목과 수학Ⅱ 과목에 대한 학습이 일부 교육과정 범위 보다 앞서 이루어진 것으로 확인되었다. 그러나 교사가 학생들에게 미분 관련 학습 용어(평균변화율, 순간변화율, 연속, 미분계수, 접선, 도함수)를 들어보았는지 확인하는 물음에 대하여 학생들은 들어본 적이 없다고 답하였으며, 이러한 면담 과정을 근거로 미루어볼 때, 총 20차시 교수실험 종료 시점까지 학생들이 미적분 학습 관련 지식은 없는 것으로 판단되었다. 특히, 2017년 1월 초에 실시된 14차시 교수실험 과정에서는 학생들이 극한 개념의 일부가 표현되기는 하였으나, 미분과 적분 개념은 학습하지 않았던 것으로 확인되었다.

분석에 활용한 수업 과제에 대한 분석은 [표 1]과 같이 14차시의 교수실험 중 3개의 과제에 대하여 정리하였다.

[표 1] 14차시 교수실험에서의 주요 과제
[Table 1] Major tasks in the 14th teaching experiment

번호	내용
과제 1-1	거리함수 $\quad = \frac{x}{3}$ 에서 2초에서 4초까지의 이동거리를 구하여라.
과제 1-2	거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 $x=2$에서의 함숫값의 의미를 말하여라.
과제 2	거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 0초에서 4초까지, 2초에서 4초까지, 3초에서 4초까지의 평균속력을 구하고, 4초에서 4초까지에 해당하는 값도 구하여라.

3. 자료수집 및 분석 방법

본 연구는 전체 교수실험 중 논의와 관련된 자료를 집중적으로 분석한 것으로서, 비디오카메라 1대로 실험대상 학생 세 명에 대한 수학적 활동을 촬영하였으며, 추가적으로 학생들의 표정 변화를 관찰할 수 있는 비디오카메라 1대로 수업을 촬영하였다. 이 외에도 별도로 녹음된 오디오자료 전사과정을 통하여 분석 작업을 진행하였다.

또한 교수실험 과정에서 학생들이 작성한 활동지와 연구자들이 작성한 현장노트 및 다음 교수실험 과제를 구성하기 위한 연구자간의 회의일지를 수합하여 교수실험 과정 중 일어나는 교수학적 결정 과정과 변화의 양상을 살펴보고, 이러한 자료들을 기초로 교수실험 중 발생했던 수정과 재구성의 이유를 'Ⅳ. 결과분석 및 논의' 부분에 함께 기술하였다.

4) 학생A, 학생B, 학생C는 연구에 참여한 세 명의 학생을 지칭하는 가명이다.

Ⅳ. 결과분석 및 논의

1. 거리함수에서의 함숫값에 대한 이해와 표현의 변화과정

연구대상인 세 명의 학생들은 거리함수 $=\frac{x}{3}$ 의 $x=2$에서의 함숫값의 의미를 '0초에서 2초까지 이동한 거리' 혹은 '2초까지 이동한 거리'라는 표현을 혼용하여 사용하였다. 이러한 학생들의 표현이 거리함수에서 함숫값에 대한 인식의 차이에 의한 것인지는 확인할 기회가 없었기 때문에, 연구자는 학생들의 반응에 근거하여 거리함수에서의 함숫값의 의미를 보다 다양한 물체의 운동과 관련된 상황을 제시하면서 학생들의 표현의 과정을 살펴볼 필요가 있다고 생각하였다. 연구자가 이러한 고민을 하게 된 것은 사전에 학생들에게서 연속적인 변화를 인식할 때 시간에 해당하는 구간을 0초에서 1초, 1초에서 2초, 2초에서 3초, …와 같이 구간들 사이가 서로 겹치는 부분이 없으면서 이어지도록 구분하여 관찰하는 경우와 0초에서 1초, 0초에서 2초, 0초에서 3초, …와 같이 시작점을 0초로 고정하여 구간을 살펴보는 방식이 관찰되었었기 때문이다. 연구자는 이러한 표현 상의 차이에서 연구대상들이 출발점에 대한 인식 차이가 있을 수 있다고 판단하였다.

이에 따라 연구자들은 학생들에게 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$의 2초에서 4초까지의 이동거리를 구하는 [과제1-1]을 제시하였다. [과제1-1]은 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에 대하여 구간 [2,4]에서의 이동거리를 묻는 상황으로서, 물체의 운동을 관찰하는 입장에서는 자연스러운 질문으로 볼 수 있다.

과제 1-1	거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에서 2초에서 4초까지의 이동거리를 구하여라.

연구자들은 [과제1-1]을 제시할 때 [과제1-2]도 동시에 제시하였다. [과제1-2]는 [과제1-1]에서 제시된 거리함수 $\frac{x^3}{3}$에서 상수항이 추가된 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에 대하여, $x=2$에서의 함숫값의 의미를 묻는 과제이다.

과제 1-2	거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 $x=2$에서의 함숫값의 의미를 말하여라.

[과제1-2]는 [과제1-1]을 수행한 학생들이 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에서의 함숫값에 대한 이해를 바탕으로 [과제1-2]에서 제시된 함수에서 함숫값을 어떻게 인식하고 표현하는지 살펴보기 위하여 준비한 과제이다.

세 명의 학생들은 [과제1-1]에서 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에서 2초에서 4초까지의 이동거리를, 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$의 x에다가 $x=4$를 대입한 $\frac{64}{3}$에서 $x=2$를 대입한 $\frac{8}{3}$을 뺀 $\frac{56}{3}=\frac{64-8}{3}$)으로 구하였다.

또한 [과제1-2]에서는 세 명의 학생 모두 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 $x=2$에서의 함숫값을 $x=2$를 대입한 $\frac{17}{3}$로 제시하였다. 그러나 함숫값의 의미에 대한 해석에서 학생B가 다른 두 학생(학생A와 학생C)의 해석방식과 차이를 보여주었다.

학생A와 학생C는 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 $x=2$에서의 함숫값의 의미를 "0초에서 2초까지 이동한 거리"라고 표현한 것과 달리, 학생B는 "이것(거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$)은 시작을 (거리가)3인데서 부터 출발한 거 아니에요?"라고 연구자에게 반문하였다.

학생B의 질문 이후, 학생A와 학생C에게서 이전과 다른 표현의 변화가 관찰되었다. 학생A는 학생B의 의견에 동의하면서 "2초가 되었을 때 있는 지점. 사실 출발점은 따로 있는 건데."라고 표현하면서 출발점에 대한 의미를 고민하고 있음을 드러내었다. 반면에 학생C는 "저는 여기 출발점에서 3을 간 다음에 또 간 것으로 생각했어요."라고 말하였다. 이는 학생C가 출발점을 원점으로 보고 있음을 드러내준다. 이상을 정리해보면, 학생A와 학생B는 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 물

체의 운동으로 두 함수식을 비교하여 해석하였을 때 출발점이 다른 두 물체의 운동으로 해석한 반면, 학생C는 출발점을 동일하게 원점으로 보고 있으면서 동시에 거리함수가 $=\frac{x}{3}+3$인 물체의 운동이 거리함수가 $y=\frac{x^3}{3}$의 물체의 운동보다 3만큼 처음에 더 가서 시작하는 것으로 해석하는 차이가 있음을 알 수 있다.

이때 연구자는 학생C가 원점에서 출발해서 3만큼 더 가는 것을 이동한 거리로 이해하고 있는 것인지 아니면 다른 두 학생들처럼 출발점을 다르게 보고 있는 것인지 명확하게 확인하기 위하여 이를 확인할 수 있는 추가 질문을 하였다. 연구자는 학생들에게 “(거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 $x=2$에서의 함숫값) $\frac{17}{3}$에 대해서 0초에서 2초까지 거리라고 했잖아요?”라고 물어보았다. 연구자의 질문에 대하여 학생C는 “그거 맞지 않아요?”라고 반문한 다음, “그거 여기 출발점에서 3을 간 다음에 2초까지 거리 $\frac{8}{3}$을 간 거니까...”라고 의견을 제시하였다.

즉, 학생C는 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에 대하여 2초까지 이동한 거리를 $\frac{17}{3}=3+\frac{8}{3}$)으로 인식하고 있었다. 그러나 학생A는 [대화1]에서와 같이 “이동거리는 얘(거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$)나 얘(거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$)나 차이가 없는데... $\frac{8}{3}$으로...”라고 표현하면서 학생C와 의견이 다르다는 것을 표현하였고, 학생B도 이동거리가 두 거리함수 모두 $\frac{8}{3}$으로 같다고 표현하면서 학생C의 견해와 자신의 생각이 다르다는 것을 나타내었다. 즉, 학생A와 학생B는 ‘학생C가 2초까지 이동한 거리를 $\frac{17}{3}$로 표현한 것’과 달리, 2초까지 이동한 거리를 $\frac{8}{3}$로 표현하였다.

[대화1] 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 출발점에 대한 교사와 학생들의 대화

교사 : 그렇게(0초에서 2초까지 이동한 거리가 $\frac{17}{3}$이라고) 이야기한 거 아니에요?

학생B : 이거 3 빼 줘야하는 거 아니에요? 이건 시작부터 3인데서 출발한 거 아니에요?

학생A : 2초가 되었을 때 있는 지점. 사실 출발점은 따로 있는 건데.

학생C : 저는 여기 출발점에서 3을 간 다음에 또 간 것으로 생각했어요.

교사 : 어쨌든 $\frac{17}{3}$에 대해서 0초에서 2초까지 거리라고 했잖아요?

학생C : 그거 맞지 않아요. 그거 여기 출발점에서 3을 간 다음에 2초까지 거리 $\frac{8}{3}$을 간 거니까...

교사 : 0초에서 2초까지 이동한 거리가 $\frac{17}{3}$이 맞아요?

학생A : 이동거리는 얘 $y=\frac{x^3}{3}$)나 얘$\left(y=\frac{x^3}{3}+3\right)$나 차이가 없는데...

교사 : 값은 얼마인데?

학생A : $\frac{8}{3}$이요.

교사 : 학생B는?

학생B : $\frac{8}{3}$이요.

학생C : $\frac{17}{3}$ 아니에요?

다른 학생들과 의견이 다르다는 것을 확인한 이후에도 학생C는 한 동안 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 $x=2$에서의 함숫값의 의미에 대하여 원점에서 출발하여 총 $\frac{17}{3}$만큼 이동한 것이라고 주장하였다. 이에 연구자는 다른 학생들의 반응을 정리하여 학생C에게 전달하여주었고, 학생C는 처음에는 연구자가 정리해준 이야기를 전달 받고 나서도 자신의 견해가 옳은 것 같다는 반응을 보였으나, 이후 혼자 생각을 하는 시간을 거친 다음 자신의 생각이 바뀌었다는 표현을 하였다. [대화2]는 연구자가 다른 학생들(학생A와 학생B)의 의견을 정리하여 학생C에

게 전달해주고 이에 대한 학생C의 반응을 기록한 대화이다.

[대화2] 거리함수 $=\frac{x}{3}+3$에서 $x=2$에서의 함숫값에 대한 교사와 학생C의 대화

학생C : 그 함숫값의 의미가 거리함수니까... 거리가 이동한 총 거리니까 0초에서 2초까지 $\frac{17}{3}$아니에요?

교사 : 응 나는 이해가 가... 함숫값은 $\frac{17}{3}$이 나와요. 이건 맞아. 이건 다 동의해. 근데... 예전에 너희가 $\frac{8}{3}$을 0초에서 2초까지 이동한 거리라고 했단 말이야. 그럼 여기서도 $\frac{17}{3}$을 0초에서 2초까지 이동한 거리라고 봐야해. 그런데 얘네 둘은 $\frac{17}{3}$은 맞는데 0초에서 2초까지 이동한 거리를 $\frac{17}{3}$으로 보고 있는 건 아닌 것 같아.

학생C : $\frac{17}{3}$ 맞는 거 아니에요?

교사 : 음... 그런데 다른 학생들은 처음 시작할 때 0초에서 이미 원점이 아니라고 본거야. 처음에 시작할 때 출발점이 3미터 앞에서 시작했다는 거야. 그러니까 0초에서 2초까지 이동한 거리가 $\frac{17}{3}$에서 3을 뺀 거라고 보는 거지.

학생C : ... ... 듣고 보니까 그게 맞는 것 같아요.

이 과정에서 연구자는 거리함수에서 함숫값에 대한 학생들의 인식의 변화과정을 확인할 수 있었다. 처음에 학생들은 거리함수 (x)에서 함숫값 $F(2)$에 대하여 "0초에서 2초까지의 거리"라고 표현하고 해당 시간까지 이동한 총 거리(누적된 거리) 개념으로 이해하였다. 즉, 학생들은 '0초에서 2초까지의 총 이동한 거리'를 $F(2)$로 이해하였으며, 이는 출발점에 대한 인식이 없는 상태에서의 누적거리로 이해를 하였던 방식으로 볼 수 있다. 그러나 [과제1-2]를 통하여 학생들은 '0초에서 2초까지의 총 이동한 거리'를 $F(2)$가 아니라 $F(2)-F(0)$로 인식하는 변화가 있었다. 특히 $F(0)$에 해당하는 0초에서의 함숫값의 의미에 대하여 학생들이 출발점으로 인식하는 것이 관찰되었다.

2. 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 'k초에서 k초까지의 속력'에 대한 학생들의 이해와 표현

본 연구는 총 20차시의 교수실험 자료 중에서 연구주제와 관련된 14차시 교수실험을 집중적으로 분석한 연구이다. 그런데 학생들은 이전 10차시 교수실험에서 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에서 k초에서 k초까지의 속력을 k^2이라고 표현한 다음 이를 이용하여 k초에서의 순간속력을 k^2으로 보고 속력함수를 $y=x^2$으로 구성하였다. 10차시 교수실험에서 학생들이 거리함수에서 속력함수를 구성하는 과정을 좀 더 자세히 소개하면, 학생들은 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에서 a초에서 k초까지에 해당하는 평균속력을 구하는 식을 $\frac{\frac{k^3}{3}-\frac{a^3}{3}}{k-a}$으로 적은다음, 분모에 있는 인수 $(k-a)$를 약분하여 $\frac{k^2+ak+a^2}{3}\left(=\frac{\frac{k^3}{3}-\frac{a^3}{3}}{k-a}\right)$의 식을 구하였다.

이후 학생들은 이 식에 $a=k$를 대입하여 결과적으로 $\left.\frac{k^2+k^2+k^2}{3}=\right)k^2$이 된다고 하였으며, 이 과정에서 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에서 속력함수를 $y=x^2$으로 구할 수 있다고 하였다.

연구자는 이전 10차시 교수실험에서 학생들이 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에서 k초에서 k초까지의 속력을 k^2으로 구성하였던 점을 고려하여, [과제1-1]과 [과제1-2]에서 상수항만큼의 차이가 있는 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에 대한 순간마다의 물체의 운동을 비교하는

과제를 제시하기로 하였다. 이는 거리함수 $=\frac{x}{3}$ 과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에 대하여 출발점이 다른 운동이라고 인식한 학생들을 대상으로 출발점이 아닌 매 순간마다의 운동에 대하여 비교하는 과제를 제시한 것으로 볼 수 있다. 이러한 목적에 따라 연구자는 학생들에게 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 k초에서 k초까지의 속력을 구하는 [과제2]를 제시하고 학생들의 반응을 관찰하기로 하였다.

과제 2	거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 0초에서 4초까지, 2초에서 4초까지, 3초에서 4초까지의 평균속력을 구하고, 4초에서 4초까지에 해당하는 값도 구하여라.

학생B는 10차시 교수실험에서의 반응과 동일한 방식으로 [과제2]를 해석하였다. 학생B는 거리의 차에 해당하는 $\frac{k^3}{3}+3\Big)-\left(\frac{a^3}{3}+3\right)$을 정리하여 $\frac{k^3}{3}-\frac{a^3}{3}$를 적은 다음 해당 결과를 시간의 차에 해당하는 $(k-a)$로 나누어주는 방식으로 평균속력을 구하는 식을 구성하였다. 그 다음에는 $a=k$를 대입하여 속력함수를 $y=x^2$이라고 하였다. 이는 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 구간 $[a,k]$에서의 평균속력을 $\frac{\frac{k^3}{3}+3-\left(\frac{a^3}{3}+3\right)}{k-a}$로 구성한 다음, 이 식을 $\frac{k^2+ak+a^2}{3}$로 정리한 것으로 보인다. 이후 $a=k$를 대입하여 최종적으로 k^2의 결과를 얻었으며, 학생B는 이 결과를 k초에서 k초까지의 평균속력이라고 표현하였다.

학생B는 'k초에서 k초까지'라는 표현은 결국 k초를 뜻하므로 이 결과는 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 속력함수에서 k초에서의 순간속력이라고 하였다. 따라서 학생B는 $\frac{k^2+ak+a^2}{3}$에서 $a=k$를 대입하여 얻은 결과 k^2을 이용하여 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 속력함수를 $y=x^2$이라고 제시하였다. 학생B의 구성과정과 결과물은 10차시 교수실험에서 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에서 속력함수 $y=x^2$을 구성하는 것과 동일한 논리에 의한 결과임을 알 수 있다.

반면 학생A와 학생C는 [과제2]에 대한 학생B의 설명 중 분모에 있는 인수 $(k-a)$로 나누어주는 것에 문제를 제기하였으나, 결과물 자체에 대하여는 학생B가 '맞는 것 같다.'라는 표현을 사용하였다.

3. 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$을 따르는 물체의 운동에 대한 이해와 표현

학생들은 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$로 표현되는 물체의 운동을 해석했을 때 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$을 따르는 물체의 출발점을 원점이라 하면, 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$을 따르는 물체는 원점보다 3만큼 앞선 곳에서 출발을 하는 것으로 이해하였다.

그러나 각 거리함수의 속력함수를 구하는 것에 대하여는 의견 차이가 관찰되었다. 학생B는 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 속력함수가 $y=x^2$으로 동일하다고 보았지만, 학생A와 학생C는 학생B의 방식으로는 분모에 해당하는 인수 $(k-a)$를 약분할 수 없다고 지적하였다. 그러나 학생A와 학생C도 학생B가 구성한 결과물(거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 속력함수가 $y=x^2$이라는 것)에는 크게 문제점을 지적하지는 않았다. 오히려 두 학생은 학생B의 결과 자체에는 맞을 수도 있다고 표현하였다.

연구자는 학생B가 속력함수를 구성하였다는 점에 주목하고, 학생들에게 해당 거리함수를 따르는 물체의 운동을 해석하는 과제를 제시하였다. 이를 통하여 연구자는 학생들에게 '거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$를 따르는 운동에 대한 해석'과 '학생B가 구성한 속력함수 $y=x^2$을 따르는 운동을 해석한 결과'를 비교하는 활동을 제시하고자 하였다. 동시에 연구자는 학생들이 상수항만큼 차이가 있는 물체의 운동에 대하여 어떠한 의미를 구성하는지 관찰하고자하였다.

연구자는 “물체의 운동 관점에서 해석하면 어떻게 되요? 실제 이런 결과(학생B가 구한 것과 같이 서로 다른 거리함수 $= \frac{x}{3}$ 과 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 속력함수가 $y=x^2$으로 같았던 결과)가 나올까요?”라고 물었다. 연구자의 물음에 대하여 학생C는 “먼저 3을 간 거에서 움직임이 같은 거니까 평균... 음... 속력이 같은 것이에요.”라고 답을 하였다. 학생C의 표현은 출발점이 3만큼 앞에서 출발하는 차이점이 있기는 하지만 움직임은 동일하다는 것을 표현한 것으로 보였으나, 움직임이 동일하다는 것의 의미가 명확하게 표현되지는 않았었다. 특히 ‘같다.’고 표현한 것이 평균속력을 언급한 것인지 순간속력을 언급한 것 인지가 명확하지 않았다. 이에 대하여 연구자는 학생C에게 무엇이 동일하다는 것인지를 명확하게 표현해줄 것을 요구하였고, 학생C는 “0초에서 4초까지의 속력... 평균속력이요.”라고 다시 표현하였다.

이어서 연구자는 학생들에게서 상수항만큼의 차이가 있는 서로 다른 거리함수에서 물체의 운동을 해석할 때 “움직임이 동일하다.” 혹은 “속력이 같다.”와 같은 표현을 사용하는 것을 관찰함에 따라, 학생들이 거리함수를 따르는 물체의 운동에 대한 변화를 어떻게 설명하는지 좀 더 확인하고자 하였다. 이에 따라 연구자는 학생들에게 $y=\frac{x^3}{3}$의 그래프와 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 그래프를 그리도록 한 다음, 그래프에서 드러나는 물체 운동의 변화를 설명해보라고 하였다. 이때 [대화3]과 같이 거리함수를 이용하여 물체의 운동을 해석하는 과정에서 학생들의 방식에 대한 차이가 관찰되었다.

$y=\frac{x^3}{3}$의 그래프에서의 변화에 대하여, 학생C는 “이 점에서의 기울기들이 점점 커지고 있어요. 점에서의 기울기가 순간 속력이니까...”라고 표현하였고, 학생A는 “초마다 가는 거리가 늘어나고 있어요.”라고 표현을 하였으며, 학생B는 학생A와 의견이 같다고 답하였다.

[대화3] $y=\frac{x^3}{3}$의 그래프와 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 그래프에서 물체의 운동에 대한 학생들과 교사의 대화

교사 : 이걸 가지고 물체의 운동을 설명해보세요.
학생C : 가속도...
교사 : 용어들을 더 명확하게 표현해줘요.
학생C : 이 점에서의 기울기들이 점점 커지고 있어요. 점에서의 기울기가 순간속력이니까...
교사 : 점에서의 기울기가 순간속력이에요?
학생C : 전 그렇게 보여요. 근데 그게 점점 빨라지니까 가속도가 붙는 거에요.
교사 : 학생A는?
학생A : 거리함수니까 초마다 가는 거리가 늘어나고 있어요.
교사 : 그걸 그래프로 표현해볼래요?
학생A : y값이 이동거리잖아요. 그러니까 여기 구간에서 y가 늘어난 양이 그... 여기서 보면 이동한 거리가 $\frac{1}{3}$이고 $\frac{8}{3}$이니까 여기가 $\frac{7}{3}$이잖아요. 여기가 늘어났잖아요. 그러니까 점점 이동한 거리가 점점 늘어나서 빨라진다고 봐요.
학생B : 초마다 늘어나는 거리가 점점 늘어나니까...
교사 : 학생A랑 같아요?
학생B : 네
교사 : 초마다 늘어나는 건 어떻게 알아요?
학생B : 똑같은 1초인데 거리가 점점 늘어나요.

연구자는 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$의 그래프에서 물체의 운동을 해석하는 학생들의 방식에서의 차이를 확인한 다음, 그러한 방법으로 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에도 적용이 가능한지를 물어보았고, 학생들은 가능하다고 답을 하였다. 이어서 학생들은 운동학적 관점에서 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 변화가 동일한 것으로 해석하였으며, 이를 바탕으로 학생A와 학생C는 이전에 학생B가 표현하였던 것처럼 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 속력함수가 $y=x^2$으로 같게 나온다고 하였다. 특히, 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 상수항에 해당하는 ‘3’은 속력함수를 구할 때 의미가 없는 것이냐는 교사의 질문에 대하여, 학생B는 “만약에 이 부분이 또 다른 이

것도 상수가 아니라 문자식이었다면 이야기가 다르겠지만, 그렇지 않다면...”이라고 답하였다. 이는 학생B가 거리함수에서 상수만큼의 차이는 속력함수를 가지고 물체의 운동을 해석할 때 영향을 주지 않는다고 표현한 것으로 보인다.

4. 거리함수 $\quad = \frac{x}{3}$ 과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 속력함수 $y=x^2$과의 관계에 대한 이해와 표현

학생B는 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 속력함수가 $y=x^2$로 동일하다는 것을 구성하였고, 세 명의 학생들은 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$를 따르는 물체의 운동의 변화가 서로 동일하다는 것을 확인하는 것을 통하여 학생B가 구성한 방식에서 상수항만큼 차이가 나는 거리함수들의 속력함수가 동일하다는 것에 동의하였다.

특히 이 과정에서 학생B는 “여기 $\left. y=\frac{x^3}{3}+a \right)$에서 a에다 뭘 넣든 결국에는 속력함수를 만들 때 사라지니까... 있어야 될 것 같아요.”라고 답하였다. 이러한 표현이 무슨 뜻인지 더 자세히 설명해달라는 교사의 요구에 대하여 학생B는 “속력함수가 이거$(y=x^2)$라면 거리함수는 뒤에 뭘 붙여야 될 것 같아요.”라고 표현을 하였다.

연구자는 학생B의 표현에 대하여, 거리함수에서 상수 a는 속력함수를 구할 때 사라진다는 점을 인식하고, 이를 역으로 생각하면 속력함수 $y=x^2$에서 거리함수를 생각할 경우에는 $y=\frac{x^3}{3}+a$가 되어야할 것 같다는 표현을 한 것으로 해석하였다. 다른 두 학생(학생A와 학생C)도 결과적으로 학생B의 견해에 동의하였던 것으로 봐서 학생B의 주장이 설득력 있게 전달된 것으로 보였다. 다만 학생A는 학생B의 해석에 전반적으로 동의하지만 거리함수에서 속력함수를 찾아낼 때 굳이 상수를 붙여야할 필요가 없다고 의견을 제시하면서, “어차피 몇 미터 앞에서 출발했다는 것을 써 줘야할 필요가 있나요? 동일하게 움직이는데...”라고 말하였다.

연구자는 학생A의 표현에서 물체의 운동에서 ‘같다.’라는 표현에 대한 이해가 학생마다 다를 수 있음을 확인하였다. 즉, 학생A에게 있어 물체의 운동에서 ‘같다.’라고 표현한 것의 의미는 ‘물체가 이동한 거리나 순간에서의 속력이 같으면 동일한 운동으로 보는 것’으로 볼 수 있고, 학생B와 학생C의 경우는 순간순간의 속력뿐만 아니라 출발점까지 동일한 경우를 동일한 운동으로 보고 있다는 차이가 있는 것으로 보였다.

V. 결론 및 제언

1. 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 $y=\frac{x^3}{3}+3$를 따르는 물체의 운동에 대한 학생들의 인식과 표현

학생들은 거리함수 $y=\quad(x)$에서 $x=a$에서의 함숫값의 의미를 처음에는 a초까지 이동한 총 거리로 인식하고 있었다. 따라서 학생들은 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 $y=\frac{x^3}{3}+3$로 표현되는 물체의 운동에 대하여 $x=2$를 대입하였을 때의 함숫값을 각각 $\frac{8}{3}$과 $\frac{17}{3}$으로 구하였으며, 그 의미에 대하여 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 각각 물체가 0초에서 2초까지 이동한 거리라고 하였다. 즉, 학생들의 논리를 따르면 $\frac{17}{3}$은 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 0초에서 2초까지 물체가 이동한 총 거리가 되고, $\frac{8}{3}$은 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에서 0초에서 2초까지 물체가 이동한 총 거리가 되어 두 거리함수에서 0초에서 2초까지 이동한 총거리는 서로 다르게 된다.

그러나 이러한 학생들의 거리함수에서의 함숫값에 대한 최초 인식은 ‘거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$를 따르는 물체의 운동의 출발점’이 ‘거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$를 따르는 물체의 출발점’과 다르다는 것을 인식하면서 변하게 된다. 학생들의 논리는 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$를 따르는 물체가 출발한 지점을 원점이라고 하였을 때, 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$를 따르

는 물체의 운동은 만큼 앞서 있던 지점에서 출발한 것으로 보아야한다는 것인데, 이에 의하면 거리함수 $y=\frac{x}{3}+3$에서 $x=2$일 때의 합숫값 $\frac{17}{3}$에서 $x=0$일 때의 함숫값 3을 빼주었을 때의 값 $\frac{8}{3}$이 2초동안 이동거리가 된다. 이러한 관점에서는 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 $y=\frac{x^3}{3}+3$를 따르는 물체의 운동들은 2초까지 이동한 거리가 같게 된다.

이상의 논의와 같이, 상수항만큼의 차이가 주어진 서로 다른 두 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서의 함숫값의 의미를 살펴보는 [과제1-1]과 [과제1-2]는 학생들에게 출발점에 대한 의미를 고민하게 해준 것으로 보이며, 이러한 고민에 따라 출발점에 대한 학생들의 인식 차이가 관찰되었다. 거리함수에서 출발점에 대한 인식은 이후 거리함수에서의 함숫값이 '이동한 총 거리'라는 학생들의 인식에 변화를 가져온 것으로 보인다.

2. 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 속력함수를 구성하는 과정과 그 역의 과정을 구성하는 과정에서 학생들의 거리함수와 속력함수에 대한 인식과 표현

학생들은 14차시 [과제2]에서 거리함수의 속력함수를 구성하는 과제를 통하여 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$의 속력함수를 $y=x^2$으로 구성하였다. 학생들이 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 속력함수 $y=x^2$를 구성하는 방식은 이전 10차시 교수실험에서 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$의 구간 $[a,k]$에서의 평균속력을 구하는 식에서 a대신 k를 대입하여 값을 구하는 방식과 동일하였다. 즉, 학생들은 거리의 차에 해당하는 $\frac{k^3}{3}+3)-\left(\frac{a^3}{3}+3\right)$을 정리하여 $\frac{k^3}{3}-\frac{a^3}{3}$를 적은 다음 해당 결과를 시간의 차에 해당하는 $(k-a)$로 나누어주는 방식으로 평균속력을 구하는 식을 구성하였다. 그 다음에는 $a=k$를 대입하여 속력함수를 $y=x^2$이라고 하였다.[5)]

이러한 구성과정을 거쳐 학생들은 두 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 $y=\frac{x^3}{3}+3$에서 구성한 속력함수가 $y=x^2$로 같다는 것을 일반화하였다. 즉, 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+a$의 형태에서 a에 어떠한 값을 가지더라도 속력함수는 $y=x^2$으로 동일하다고 답하였다. 또한 이 과정에서 일부 학생들(학생B와 학생C)은 역으로 속력함수 $y=x^2$에서 거리함수를 구성할 때는 $y=\frac{x^3}{3}+a$와 같이 상수항을 고려하여 처리해 주어야할 것 같다고 하였다.

다만, 운동이 동일하다는 것에 대하여는 학생A와 다른 두 학생B와 학생C의 의견에 차이가 있었는데, 학생A는 순간순간의 속력이 같으면 출발점이 달라도 동일한 운동으로 보았으며, 학생B와 학생C는 순간순간의 속력과 출발점까지 같은 경우를 동일한 운동으로 보았다. 그러나 상수항만큼의 차이가 있는 두 거리함수의 운동을 비교하는 활동이 학생들로 하여금 거리함수에서 속력함수를 구성하고 이해하는데 도움을 준 것으로 보인다.

3. 교육적 함의 및 제언

본 연구는 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$과 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}+3$를 따르는 물체의 운동에 대한 학생들의 인식과 표현을 조사한 연구이다. 거리함수에서 속력함수를 구성하는 과정과 또 그 역 과정에 대한 구성과정을 살펴보면서, 학생들의 거리함수와 속력함수의 관계 속에서 상수항의 차이에 대한 인식과 표현을 드러내었다. 이는 수학적으로 미분과 그 역 과정에 해당하는 부정적분의 관계에 대한 시사점을 제공하여준다.

특히 본 연구에서 운동학적 관점에서 거리함수의 상수항에 대하여 학생들이 출발점을 인식하고 출발점에 대한 인식 이후 상수항만큼의 차이가 나는 두 거리함수의 그래프를 그려서 학생들만의 독특한 논리로 속력함수를 구성하는 일련의 과정은, 교육과정에서 절차적으로 다루어지는 적분 상수 개념에 더욱 풍부한 이해가 가능하게

5) 이동근(2017)에는 10차시 교수실험에서 거리함수 $=\frac{x}{3}$의 속력함수를 구성하는 과정에 대한 논의를 자세히 기술하고 있다.

해 줄 것으로 보인다.

한편 본 연구는 이러한 전문가들의 논의가 '학생들의 수학'에서는 어떻게 인식되고 표현되는지를 드러내었다는 점에서 의미를 갖는다. 우선 전문가들의 논의의 예로 Courant(1970)의 논의를 살펴보면 다음과 같다. Courant(1970)은 '정적분의 개념에서 살펴보아야하는 부정적분 개념'과 '미분의 역 과정의 결과물인 원시함수'를 구분한 다음 다시 이들이 동일한 것임을 논의하였는데, Courant(1970)은 자신의 논의를 완성시키기 위하여 두 가지 상수를 도입하였었다. 처음에는 피적분함수 (x)의 부정적분을 정적분을 이용하여 $^{x} f(t)dt$로 나타내었다. 예를 들어 $\int_a^x \cos t\, dt = \sin x - \sin a$가 되는데, Courant(1970)은 이러한 표현방식에서 '$-\sin a$'에 해당하는 상수항이 필요하다고 하였다. 그러나 정적분에 의하여 정의된 부정적분이 아니라 미분의 역과정에 해당하는 원시함수 (x)의 경우는 $F(x) = \sin x + 100$와 같은 표현도 가능하므로, 원시함수와 부정적분을 연결할 때 또 다시 상수가 필요하다고 하였다. Courant(1970)의 관점에서는 이 상수를 적분 상수로 표현하여 $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$의 관계가 성립하는 것으로 설명하였다. Courant(1970)은 부정적분과 정적분 그리고 원시함수 사이에 대수적 구조를 완성하는데 적분 상수를 이용하였으며, 이때 이용된 적분 상수는 절차적인 도구 역할에 국한되는 것으로 볼 수 있는데, 2009 개정 교육과정에서의 미적분 I 교과서의 적분 상수 의 도입 역시 유사한 맥락에서 이해할 수 있다.

그런데 이러한 구성방식이 학생들에게 자연스러운 구성방식인지에 대하여는 고민할 필요가 있다. 특히 적분 상수에 대한 학생들의 질문은 현장에서 다양한 방식으로 제기되고 있으며 이들은 적분 학습에 매우 중요한 시사점을 던져줄 수 있다. 연구자가 학생들에게 받았던 질문 두 가지를 예시로 제시하면 다음과 같다.

1. '부정적분'의 띄어쓰기는 '부' '정적분'인가요 아니면 '부정' '적분'인가요?

2. $\int f(x)dx = F(x) + C$에서 적분 상수 C를 안 붙이면 틀린 건가요?

처음 질문은 부정적분이 정적분과 관련된 개념인지 적분과 관련된 개념인지를 묻는 질문이었으며, 나중 질문은 적분 상수가 없어도 부정적분의 정의는 충족하는 상황에서 적분 상수를 꼭 붙여야 되는지를 묻는 질문이었다. 이들 질문이 모든 학생들에게서 일반적으로 제기되는 질문이라고 할 수는 없지만, 학생들이 적분 개념을 구성하는데 적분 상수의 의미에 대하여 절차적인 기능 외에 다른 고민들을 할 수 있다는 사실을 보여준다.

본 연구에서는 학생들은 운동학적 관점에서 적분 상수에 해당하는 상수항에 대하여 출발점의 의미를 부여하였고, 운동을 설명하는 과정에서 상수항만큼 차이가 나는 두 거리함수의 그래프를 그린 다음 그래프 위의 점들에서 순간순간의 변화들이 동일한 것을 관찰하여 거리함수에서의 상수항이 달라도 속력함수는 같다는 것을 구성하였다. 이는 적분 상수에 대한 의미에 있어 전문가들과 학생들의 관심이 다를 수 있음을 보여준다. 본 연구는 제한된 인원을 대상으로 한 질적인 사례연구이므로 결과를 일반화시키는 것에는 제한이 있지만, 상수항만큼의 차이가 나는 두 거리함수에 대하여 운동학적 관점에서 학생들의 인식과 표현을 조사한 본 연구는, '학생들의 수학'을 드러냄으로서 교사들의 학생에 대한 이해를 촉진할 수 있다.

또한 미분과 부정적분의 관계에 대한 개념을 도입할 때 계산적인 절차로서 적분 상수를 이해하는 것을 넘어서, 학습자가 물체의 운동과 연관 지어 적분 상수의 의미를 이해할 수 있도록 고민할 수 있도록 하였다는 점에서 추후 미분과 적분의 관계에 대한 연구에 의미 있는 기초연구가 될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

권오남, 박재희, 조경희, 박정숙, 박지현 (2015). 학습자중심의 미적분 교육과정과 교실 문화, 학습자중심교과교육연구 15(6), 617-642.

Kwon, O.N., Park, J.H., Joe, K.H., Park, J.S., & Park, J.H. (2015). Learner-centered calculus curriculum and classroom culture, *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction 15*(6), 617-642.

민숙, 최성원 (2016). 자기주도적 팀 활동을 적용한 대학 미적분수업 사례, 학습자중심교과교육연구 16(10), 1159-1180.

Min, S. & Choi, S.W. (2016). A Case Study of College Calculus Courses with Self-Directed Team Learning: Qualitative Analyses with Social Learning Theory, *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction 16*(10). 1159-1180.

신보미 (2009). 고등학생들의 정적분 개념 이해, 학교수학 11(1), 93-110.

Shin, B.M. (2009). High School Students' Understanding of Definite Integral. *School Mathematics 11*(1), 93-110.

이동근 (2017). 고등학교 1학년 학생들의 시간, 속력, 거리의 관계에서 평균속력에 대한 인식과 평균속력 함수 구성에 대한 연구. 박사학위 논문, 한국교원대학교.

Lee, D.G. (2017). *A Study on 1st Year High School Students' Construction of Average Speed Concept and Average Speed Functions in Relation to Time, Speed, and Distance*. Unpublished doctoral dissertation. Korea National University of Education.

이동근, 안상진, 김숙희, 신재홍 (2016). 거리함수와 속력함수에서, 거리와 속력의 관계에 대한 학생들의 인식과 표현의 변화과정에 대한 연구, 학교수학 18(4), 333-354.

Lee, D.G., Kim, S.H., Ahn, S.J., & Shin, J.H. (2016). A Study on the Change Process of Students" Perception and Expression About Distance and Speed in Distance Function and Speed Function. *School Mathematics 18*(4), 333-354.

이동근, 신재홍 (2017). 구간에서의 변화율에 대한 인식과 표현에 대한 연구, 수학교육학연구 27(1), 1-22.

Lee, D.G. & Shin, J.H. (2017). Students' Recognition and Representation of the Rate of Change in the Given Range of Intervals. *The Journal of Educational Research in Mathematics 27*(1), 1-22.

이현주, 류중현, 조완영 (2015). 통합적 이해의 관점에서 본 고등학교 학생들의 미분계수 개념 이해 분석, 수학교육논문집 29(1), 131-155.

Lee, H.J., Ryu, J.H., & Joe, W.Y. (2015). An Analysis on the Understanding of High School Students about the Concept of a Differential Coefficient Based on Integrated Understanding, *Communications of Mathematical Education 29*(1), 131-155.

정연준, 이경화 (2009a). 미적분의 기본정리에 대한 고찰 - 속도 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계를 중심으로, 수학교육학연구 19(1), 123-142.

Joung, Y.J. & Lee, K.H. (2009a). A Study on the Fundamental Theorem of Calculus : Focused on the Relation between the Area Under Time-velocity Graph and Distance, *The Journal of Educational Research in Mathematics 19*(1), 123-142.

정연준, 이경화 (2009b). 부정적분과 정적분의 관계에 관한 고찰, 학교수학 11(2), 301-316.

Joung, Y.J. & Lee, K.H. (2009b). A study on the Relationship between Indefinite Integral and Definite, *School Mathematics 11*(2), 301-316.

최영주, 홍진곤 (2014). 도함수의 성질에 관련한 학생들의 사고에 대하여, 수학교육 53(1), 25-40.

Choi, Y.J. & Hong, J.G. (2014). On the students' thinking of the properties of derivatives, *The Mathematical Education 53*(1), 25-40.

한대희 (1999). 미적분학의 기본정리에 대한 역사-발생적 고찰, 수학교육학연구 9(1), 217-228.

Han, D.H. (1999). A study on a genetic history of the fundamental theorem of calculus, *The Journal of Educational Research in Mathematics 9*(1), 217-228.

황선욱, 강병개, 김영록, 윤갑진, 김수영, 송미현, 이성원, 도종훈, 이문호, 박효정, 박진호 (2014). 미적분 I, 서울: 신사고.

Hwang, S.W., Kang, B.G., Kim, Y.R., Youn, G.J., Kim, S.Y, Song, M.H., Lee, S.W., Do, J.H., Lee, M.H., Park, H.J., & Park, J.H. (2014). *Calculus I*, Seoul: ShinSaGo.

Boyer, C. (1959). 미분적분학사-그 개념의 발달 (김경화 역), 서울: 교우사.

Courant, R. (1970). *Differential and Integral Calculus* (E. J. Mcshane, Trans.). New York: John Wiley & Sons.

Courant, R. & Robbins, H. (1996). *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods,* Oxford University Press.

Glasersfeld, E. (1995). 급진적 구성주의 (김판수, 박수자, 심성보, 유병길, 이형철, 임채성, 허승희 역), 서울: 원미사.

Gravemeijer, K. & Doorman, M.(1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education : a Calculus Course as an Example, *Educational*

Studies in Mathematics, 39(1), 111-30.

Hackenberg, A. J. (2005). A model of mathematical learning and caring relations, *For the Learning of Mathematics 25*(1), 45-51.

Merriam, S. B. (1997). 질적 사례연구법 (허미화 역), 서울: 양서원.

Stake, R. E.(2006). *Multiple case study analysis*, NY: The Guilford Press.

Steffe, L. P. & Gale, J. E. (1995). 구성주의와 교육 (조연주, 조미헌, 권형규 역), 서울: 학지사.

Steffe, L. P. & Tzur, R. (1994). Interaction and children's mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Constructing mathematical knowledge: Epistemology and mathematics education* (Studies in Mathematics Education Vol. 4, pp. 8-32). London: Falmer.

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Interaction or intersubjectivity? A reply to Lerman, *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 191-209.

Steffe, L. P. & Wiegel, H. G. (1996). On the nature of a model of mathematical learning. In L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 477-498), Mahwah, NJ: Erlbaum.

Toeplitz, O. (1963). *The Calculus -a Genetic Approach*. Chicago: The Press of Chicago University.

Zandieh, M. J. (1998). *The Evolution of Students Understanding of the Concept of Derivative*. Unpublished doctoral dissertation, Oregon State University.

A Study of Students′ Perception and Expression on the Constant of Distance Function in the Relationship between Distance Function and Speed Function

Lee, Dong Gun
MunJung High School, Republic of Korea
E-mail : jakin7@hanmail.net

The purpose of this study is to investigate the change of students ′perception and expression about the motion of object following distance function $= \frac{x}{3}$ and distance function $y=\frac{x^3}{3}+3$ according to the necessity of research on students′ perception and expression about integral constant. In this paper, we present the recognition and the expression of the difference of the constant in the relationship between the distance function and the speed function of the students, while examining the process of constructing the speed function and the inverse process of the distance function. This provides implications for the relationship between the derivative and the indefinite integral corresponding to the inverse process.

In particular, in a teaching experiment, a constructive activity was performed to analyze the motion of two distance functions, where the student had a difference of the constant term. At this time, the students used the expression ‘starting point’ for the constants in the distance function, and the motion was interpreted by using the meaning. This can be seen as a unique ‘students′ mathematics’ in the process of analyzing the motion of objects. These scenes, in introducing the notion of the relation between differential and indefinite integral, it is beyond the comprehension of the integral constant as a computational procedure, so that the learner can understand the meaning of the integral constant in relation to the motion of the object. It is expected that it will be a meaningful basic research on the relationship between differential and integral.

* ZDM Classification : C30
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : distance function, speed function, primitive function, indefinite integral, definite integral, integral constant

<부록> 전체 교수실험에 대한 개괄적인 요약[6)]

<table>
<tr><th>차시</th><th>교수실험에 대한 개괄적인 요약</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="4">소금물 농도비교 와 시간, 속력, 거리의 관계를 묻는 과제를 통하여, 학생들의 곱셈적 사고 및 비율 개념 조사</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>평균변화율과 순간변화율의 관계 및 연속적인 변화에 대한 학생들의 이해방식 조사</td></tr>
<tr><td>6</td><td>물체의 운동과 관련된 다양한 함수적 상황(거리함수 $=x$, 속력함수 $y=x$, 속력함수 $y=x$)에서 시간, 거리, 속력의 관계에 대한 조사
속력함수 $y=x$에서 거리함수를 구성하는 방식에 대한 조사</td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="2">속력함수 $y=x^2$에서 학생들이 거리함수를 구성하는 방식에 대한 조사</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td><td>속력함수 $y=x^2$의 구간$[a,4]$에서의 a의 변화에 따른 평균속력 구성에 대한 조사</td></tr>
<tr><td>10</td><td>속력함수 $y=x^2$의 구간$[a,k]$에서의 a의 변화에 따른 평균속력함수의 그래프 구성방식 조사</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="2">속력함수 $y=x^2, y=2^x, y=\quad x$ 의 변화에 대한 이해방식 조사</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td><td>속력함수 $y=x^2$에서 그래프 아래의 넓이를 제시한 테이블에서 거리함수 구성과 그에 따른 거리함수에서의 함숫값과 거리에 대한 이해와 표현 조사</td></tr>
<tr><td>14</td><td>거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$ 에서 속력함수를 구성하는 방식 조사</td></tr>
<tr><td rowspan="2">15</td><td>속력함수 $y=x^n$ $(n=1,2,3,\cdots,n)$에서 거리함수를 구성하는 방식 조사</td></tr>
<tr><td>거리함수 $y=\sqrt{x}$, $y=2^x$에 대한 속력함수 구성 방식 조사</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="3">거리함수 $y=2^x$의 구간$[a,k]$에서의 평균속력에서 인수 $(k-a)$에 대한 처리 과정에서의 학생들의 접근 방식과 표현 조사</td></tr>
<tr><td>17</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td><td>거리함수 $y=2^x$의 구간$[a,k]$에서의 평균속력을 함숫값으로 가지는 계단 형태의 평균속력함수 그래프의 구성과 표현에 대한 관찰</td></tr>
<tr><td>20</td><td>거리함수 $y=2^x$의 속력함수 구성 방식과 표현에 대한 조사</td></tr>
</table>

6) 이동근(2017)의 연구에 제시된 자료이다.