

독일의 7학년 함수 영역 수학 교과서 분석¹⁾

공 서 영 (효원고등학교)

고 호 경 (아주대학교)

허 난 (경기대학교)[†]

본 연구는 독일의 수학 교과서의 특징을 알아보기 위해 7학년 함수 영역을 대상으로 단원의 구성 체계, 학습 내용과 전개 방식, 교수·학습상의 특징을 살펴보았다. 그 결과 독일의 수학 교과서는 단원명이나 단원의 순서는 자유로웠으며, 다양한 실생활이나 자연 현상에 대하여 그래프를 통해 두 변수간의 대응 관계를 직관적으로 알게 한 후 함수 관계를 도입하고 있음을 알 수 있었다. 또한 그래프가 갖고 있는 특징이나 정보들을 해석하는 연습을 하고, 다양한 함수적 상황을 그래프로 그리는 활동을 안내하며, 그래프 뿐 아니라 표, 관계식, 수학 용어나 문장 등의 여러 가지 표현방법으로 변환하도록 내용이 전개되었다. 독일의 수학 교과서는 다양한 일상의 맥락 속에서 자료들이 갖는 함수 관계를 수학적으로 표현해보거나 미래를 예측하고 추론하는 활동을 통해 수학의 유용성을 느끼고 함수적 사고를 기르도록 할 뿐 아니라 타 교과 등과 연관이 있는 문제를 제공하여 다른 학문과의 연결성을 높였다. 또한, 개방형 문제, 수학적 의사소통이 필요한 문제들이 포함되어 있음을 확인할 수 있었다. 독일 교과서의 이러한 특징을 살펴봄으로써 우리나라의 수학 교과서 개발과 개선에 대한 방향을 제시하고자 하였다.

I. 서 론

수학 교과는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하여 주변의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하며 논리적으로 사고하고 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다(교육부, 2015). 수학은 세계화, 정보화가 가속화되는 미래 사회의 구성원에게 필수적인 역량을 제공하며 수학학습을 통해 학생들은 수학의 지식과 기능을 활용하여 수학 문제 뿐 아니라 실생활과 다른 교과의 문제를 창의적으로 해결할 수 있다.

교과서는 학교에서 사용하는 교재로 이를 통해 주로 교육활동이 전개된다. 그러므로 교과서는 교육과정이 목표한 바를 교사와 학생이 상호작용하여 이뤄낼 수 있도록 잘 조직되어 있어야 한다. 교과서는 실제 교육 활동의 지표가 되며 각 국가의 수학 수업을 파악할 수 있는 매개체가 된다. 따라서 교과서의 질적 향상을 위한 교과서 개선은 중요하다. 교과서의 질적 향상과 교과서 개선에 도움을 줄 수 있는 것 중 하나는 외국 교과서 분석이다. 다른 나라의 수학과 교육과정 및 교과서에 대한 비교 분석은 국제적인 동향을 파악하는데 도움을 준다(이정은, 2011). 따라서 빠르게 변하는 미래사회에 발맞추어 우리나라의 교과서의 개발 및 활용을 위해 외국의 수학 교과서를 살펴보는 것은 의미 있는 일이라 할 수 있다.

* 접수일(2017년 10월 16일), 심사(수정)일(2017년 10월 27일), 게재확정일자(2017년 10월 30일)

* ZDM 분류 : U23

* MSC2000 분류 : 97U20

* 주제어 : 독일의 수학 교과서, 함수의 도입, 실생활 문제, 그래프 해석, 개방형 문제, 수학적 의사소통

† 교신저자: huhnan@kyonggi.ac.kr

1) 본 논문은 제1저자의 석사학위논문 일부 발췌하여 재구성한 것임.

본 연구에서는 근대에서 현대에 이르기까지 수학과 수학교육의 요람으로 현대 수학교육의 큰 발판을 마련하였고(노정학·양춘우·정환옥, 2003), 호주, 영국, 프랑스 등에서와 같이 핵심역량을 중심으로 학교교육과정을 개정하고 있으며(김혜윤, 2015), 수학을 인간의 사고 영역을 지원하고 그 사고영역 안에서 각 개인들이 창조성과 문제해결능력을 펼칠 수 있다고 강조하는 독일의 수학 교과서를 분석하고자 하였다. 또한 학생들은 창조적으로 그리고 자기 확정적으로 상황을 다루는데, 그 상황 안에서 수학적 도구를 가지고 문제를 해결하고 수학적 도구들을 가지고 의사소통하는 것은 매우 중요하다고 하였다(한국교육과정평가원, 2012). 이를 보면 독일의 교육 동향이 우리나라 2015 개정교육과정에서 중요시하고 있는 의사소통, 문제해결, 추론 등의 수학 교과 능력을 높이는 것과 같은 방향성을 가지고 있다.

이에 본 연구에서는 독일의 교과서 중 함수 단원에 대한 단원구성체제, 학습 내용 및 전개 방식, 교수·학습상의 특징을 분석해 봄으로써 현재 우리나라의 2015 교육과정에 따른 중학교 수학 교과서 개발에 시사점을 제공하고자 한다.

II. 독일의 교육과정 및 교과서 발행제도

1. 독일의 수학과 교육과정

독일의 현행 수학교육과정의 기본 가이드라인은 1968년 독일 주 문화부장관회의(KMK)에서 설정되었으며, 이 기준에 맞추어 주정부는 4년 이내에 새로운 교육과정을 개편하는 것으로 결의되었다. 그러나 그 기준은 각 주의 실정에 맞고 융통성 있게 편성할 수 있도록 매우 포괄적으로 설정되어진 관계로 현재 독일의 수학과 교육과정은 주별로 약간의 차이가 있다(허난·안은경·고호경, 2011). 본 연구에서는 독일의 수도인 베를린 주의 7학년 수학과 교육과정을 살펴보고자 한다.

독일의 7학년이 포함된 1차 중등교육(Sekundarstufe I)의 교육과정에서의 기본원리는 학습자가 자신의 인격을 발전시킬 수 있도록 학교는 최적의 지원을 해야 하며 세계의 변화에 맞물려 학생들의 학습 경험과 그들의 관심사를 확장하고 심화시켜 학생이 미래의 삶에 대한 준비를 할 수 있도록 도와주어야 한다고 서술하고 있다.

수학과 교육의 목적은 학생이 모든 유형의 수학 능력을 학교에서 습득해야 하며 이는 전문적이고 개개인의 나중 학습을 위한 전제조건이라고 설명하고 있다. 수학 교육은 상황 속에서 개개인이 어느 정도로 사용하는지 판단되어야 하고, 책임질 수 있어야 한다. 1차 중등교육에서는 상황에 맞는 문제를 처리하기 위한 통찰력, 함수적이며 유연한 수학적 지식, 맥락과 관계된 수학적 판단력과 같은 수학 능력을 획득하기를 요구한다. 수학적 사고와 처리과정에 관련된 기술들이 수학 교육에 고려되어야만 한다고 하였다.

수학 능력은 세 가지 주요 부분으로 구성되는데 첫째, 수학은 과학의 여러 분야에 적용할 수 있으며, 수학적 구조를 통해 일상에서 뿐 아니라 과학과 기술의 문제를 검토, 해결할 수 있다. 둘째, 수학은 추상적이고 시비를 가리는 과학 구조이다. 수학은 주제와 아이디어들을 창조하고 처리하며, 이것들을 다루는 방법을 개발하기도 한다. 셋째, 수학은 일상생활에서 또는 과학에서 창의성과 개인의 문제 해결 능력을 개발하는 인간 사고의 영역을 촉진한다고 하였다.

독일의 수학과 교육과정에서는 학생들이 함수적이고 유연하게 수학적 지식을 사용하는 수학적 소양을 갖추는 것을 목표로 하는데 이는 1차 중등교육을 통해 수학적인 내용을 다루고, 수학 능력의 형성을 통해 구체화된다. 학생들이 갖추어야 할 수학 능력으로 과정관련 수학 능력과 내용 관련 수학 능력을 제시하고 있으며 내용 관련 수학 능력의 표준 가운데에 함수 부분과 관련된 것은 다음 <표 II-1>과 같다.

<표 II-1> 함수 내용 관련 수학 능력 표준

주요한 함수 관계 안내	
8학년이 끝날 때의 표준	
→	- 매일의 상황에서 비례, 정비례 관계를 묘사하고 해석하고 계산하기 - 정비례, 반비례 관계를 다른 형태의 표현으로 사용하기 - 백분율 계산을 사용하기 - 선형 방정식과 시스템을 시행착오를 통하여 계산적으로, 그래픽으로 풀기 - 선형적으로 또는 부분적인 선형 함수의 그래프를 그릴 수 있도록 적절한 상황 주기 - 선형 방정식과 시스템을 통하여 연습 상황 묘사하기
→ →	- 선형 관계를 말이나 표, 그래프 등의 가능한 표현으로 묘사하기 - 선형 함수로 변수들의 변화를 묘사하기 - 사실적 관련성에 기반을 둔 묘사와 과정 속에서 선형 함수를 연결하기 - 선형 함수의 특징을 조사하고 함수의 항과 그래프 사이의 연결고리 만들기 - 선형 방정식과 시스템의 해결 가능성을 연구하기
→ → →	- 함수 방정식으로 선형 관계 설명하기 - 선형 부등식을 해결하고 해집합을 설명하기 위해서 구간 이용하기

특히 베를린 주의 수학과 교육과정은 7, 8학년과 9, 10학년을 통합하고 학교 유형별 수준을 3단계로 나누어 기본적인 표준만을 제시하고 있다. 즉, 7학년이나 8학년에서 자신이 속한 학교형태(하우프트슐레, 게잠트슐레, 레알슐레, 김나지움)의 수준에 맞게 재능과 기술을 획득하면 된다(안은경, 2010).

학교에서는 필수 영역과 선택 영역에서의 몇 가지를 선택하여 가르치도록 하고 있으며 필수 영역 중에서 함수 부분의 교육과정 내용은 <표 II-2>, <표 II-3>과 같다.

<표 II-2> 독일의 7, 8학년 비례대응 관련 교육과정(Berlin Senatsverwaltung für Bildung, 2006)

P2 7/8 비례 관계 이해하기	중심 아이디어: 함수 관계, 대수
비례를 통하여 선형 관계를 설명하고 계산할 수 있다. 학생들은 표와 그래프로 비례 관계에 대한 이해를 심화한다. 또한 비율 및 백분율을 계산하는 비례방정식과 표를 사용한다.	

능력

→ (기본 수준 : 하우프트슐레와 게잠트슐레 G/A반)

- 암산으로 간단한 계산을 수행한다.
- 이자와 관련된 백분율을 계산한다.
- 실제 상황에서 비례 관계를 설명하고 계산한다.
- 수학적 모델을 이용하여 다양한 실제 상황을 이해한다.

다음 학생의 활동은 이러한 능력을 획득하게 한다.

학생들은

- 그래프와 표를 사용하여 비례 대응을 말로 설명한다.
- 예를 들어 비례 대응의 특징을 설명한다.
- 비례 관계로 확대, 축소와 비율을 설명한다.
- 비례 관계와 관련된 실생활 문제를 해결한다.
- 좌표평면에 비례 관계를 나타내고 적절한 비율과 단위를 선택한다.

- 비례 대응에서 크기를 추정한다.
- 암산으로 비례 대응의 크기를 추정하고 계산기를 이용하여 계산한다.
- 스케치를 통해 백분율과 일부분을 다른 형태로 시각화 한다.
- 비례 대응을 백분율과 이자계산에 사용한다.
- 백분율, 백분율 값, 기본값들의 규칙을 가지고 이들의 값을 구한다.
- ↔ (중간 수준 : 레알술레와 게잡트술레 E반)
- 비례방정식을 통해 비례대응의 비율을 나타낸다.
- Dreisatz, 비례방정식과 표의 풀이 방법을 비교한다.
- 비례 대응의 크기를 계산하기 위하여 표, Dreisatz, 다이어그램과 같은 절차를 선택한다.
- 증가와 감소를 이용하여 문제를 해결한다.
- ↔↔ (심화 수준 : 김나지움과 게잡트술레 F반)
- 비례 대응의 복합적인 적용을 통해서 물리적 과제를 해결한다.

<표 II-3> 독일의 7, 8학년 함수 관련 교육과정(Berlin Senatsverwaltung für Bildung, 2006)

P4 7/8 함수로 관계와 변화 설명하기	중심 아이디어: 함수 관계
함수를 좌표평면에 나타내는 그래프를 통하여 변수들의 변화와 두 양 사이의 관계를 설명한다. 학생들은 종속성을 느끼고 그래프를 사용하여 표현하는 방법을 발전시킨다. 학생들은 함수 관계의 개념을 발달시키고 좌표평면에 나타난 변화를 읽고 해석하는 법을 배운다.	

능력

↔

- 여러 가지 형태의 표현법을 사용하여 함수를 묘사하고 그것들을 서로 변환한다.
- 그래프를 사용하여 변수의 종속성을 설명한다.

다음 학생의 활동은 이러한 능력을 획득하게 한다.

학생들은

- 실제 상황에 적절한 함수의 그래프를 제공한다.
- 표와 그래프를 통하여 실제 관계를 함수 관계로 표현한다.
- 실제 상황으로부터 정보를 확인하고 표로 만들어 좌표평면에 표현하고 함수 관계를 설명한다.
- 표로 주어진 함수를 좌표평면에 나타낸다.
- 그래프의 순서쌍을 읽는다.
- 표와 그래프에 나타난 함수를 이해하고 말과 그림으로 설명한다.

↔↔

- 좌표축에 주어진 함수값을 대입한다.
- 함수의 그래프 표현에 대한 결정에 대하여 근거를 들어 설명한다.
- 하나의 대응으로 함수를 설명한다.
- 좌표 점을 연결하여 그래프가 될 수 있는지의 여부를 결정한다.

↔↔↔

- 향으로 함수를 설명한다.

2.독일의 교과서 발행제도

독일은 16개의 주로 구성된 연방국가로서 교과서를 비롯한 교육정책은 각 주의 문화부(kulturministerium)가

담당하며, 교과서 허가가 법률과 법령 혹은 지침에 의해 이루어진다. 제 1차 세계대전 후 바이마르 공화국이 성립되면서 교육제도는 중앙집권적 통제 하에 교과서 발행 또한 그러하였다. 이후 2차 세계대전과 분단으로 인해 구동독에서는 중앙집권제도가, 구서독에서는 연방제도에 따라 각 주정부마다 다른 교과서 허가제가 발달하였다.

독일에서는 각 연방주의 학교법에 따라 교과서가 발행되고 있다. 주 별로 교과서발행 허가에 관한 세부 규칙이나 규정을 제정하지만 상설화된 ‘주교육부장관회의(Kultus Minister Konferenz)’에서 교과서 발행 허가에 대한 결의와 권고를 도출하여, 독일 전역의 학교교육이 통일된 면모를 가지도록 시도하고 있다. 교과서의 내용과 기본 구조는 통상 주정부 차원에서 정해지며, 16개주 문화부 장관들이 협약한 연방교육표준에 따라야 하고 각 교과서의 본질적인 교육과정을 다루어야 한다(한국교과서연구재단, 2012).

교과서 검정 기준은 주별로 차이가 있기는 하지만, 법적 규정을 위반하지 않으며, 교육과정 기준과 교육목표 및 내용에 상응해야 하며, 교육방법 및 교수법적 측면에서 충분히 교육적이어야 하며, 학문의 수준에 부합해야 하며 서술에 오류가 없어야 하고, 성, 종교, 인종차별적 내용이 없어야 한다는 베를린 주의 교과서 인가 규정과 유사한 기준을 공통적으로 적용하고 있다(Stöber, 2010).

III. 독일의 수학 교과서 분석

1. 분석 대상 및 절차

독일의 교과서는 총 16개의 연방주가 각 주의 교육부의 교육과정에 근거하여 교과서를 편찬하고 있으며 교육과정의 최소한의 표준화를 위해 독일 연방공화국 각 주(州) 교육부 장관 상임위원회인 Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland(이하 KMK)를 운영하고 있다. 본 연구에서는 16개의 연방 주 가운데 하나인 베를린(Berlin) 주의 김나지움 수학 교과서인 MATHEMATIK NEUE WEGE 7(Arno Lergenmüller et al., 2014)와 MatheNetz 7(Jutta Cukrowicz et al., 2007)를 분석 대상으로하였다(<표 III-1>).

<표 III-1> 분석 대상 독일의 교과서

교과서명	출판사	대표 저자	발행연도
MATHEMATIK NEUE WEGE 7	Schroedel	Arno Lergenmüller	2014
MatheNetz 7	westermann	Jutta Cukrowicz	2007

선정한 독일의 김나지움 수학 교과서의 특징을 알아보기 위하여 교육과정 해설서 및 독일의 교과서를 비교, 분석한 선행연구 논문들을 수집하여 독일의 수학 교육과정을 토대로 독일의 수학 교과서의 단원 구성 체계와 전개 방식에 관하여 분석하였고, 독일의 수학교과서에서 볼 수 있는 특징적인 내용을 분류하고 기술하였다.

2. 독일의 수학 교과서 함수 단원 구성

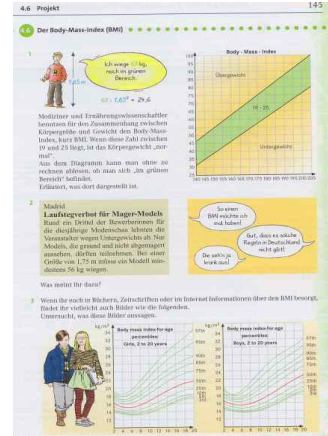
1) 교과서의 단원 구성 체계

독일의 교과서는 단원 구성 체계가 대단원과 소단원으로 이루어져있으며 출판사에 따라 함수 단원이 1단원에 위치하기도 4단원에 위치하기도 한다. 실제로 다른 기하 단원이나 정수 단원의 순서도 서로 달랐으며 소단원의

개수 등 체계의 형식적인 부분이 자유롭게 구성되었다(<표 III-2>).

각 교과서에서 함수 단원의 분량과 비중을 살펴보면 독일의 MATHEMATIK NEUE WEGE 7 수학교과서가 전체 261쪽 중에 48쪽으로 18.5%, MatheNetz 7 수학교과서가 전체 247쪽 중에 33쪽으로 13.4%를 차지하고 있어 함수를 비중 있게 다룬다고 볼 수 있다.

MatheNetz 7 교과서는 [그림 III-1] 과 같이 각 과마다 마지막에 프로젝트 단원을 넣음으로써 실생활 문제들과 관련한 주제를 깊이 있게 다루고 있을 뿐 아니라 학습한 각 단원의 내용을 활용하여 문제해결을 할 수 있도록 하는 ‘8. 학습 관리 문제’ 단원을 마지막에 두어 다시 한 번 함수에 관한 내용을 다루고 있다. 독일의 수학 교과서는 교과서마다 단원의 구성이나 내용이 한국의 수학 교과서에 비해 자유로워 학생, 학교, 교사의 선택권이 넓다고 볼 수 있다.



[그림 III-1] 프로젝트 (MatheNetz 7, p.145)

2) 교과서의 단원 전개 방식

독일의 수학 교과서는 기초지식을 배우기 전에 앞으로 배우게 될 내용의 필요성을 느낄만한 예제나 내용을 제시하였다. 시작에서부터 탐의 수위 변화를 표로 제시한다든지, 쥐와 두꺼비의 체온과 심장박동수를 그래프로 제시하는 등의 현실과 밀접한 관련이 있는 문제를 상황 그대로 보여주어 동기화하는 방식을 따른다.

단원의 전개는 단원의 목표와 배울내용을 소개하고 실생활 관련 문제를 통해 기초지식을 학습할 수 있도록 소단원의 중요개념을 한 번에 제시하고 그 뒤에 연습문제가 20개 내외로 한꺼번에 제공되고 단원의 내용을 정리하고 요약할 수 있도록 전개되는데, 교과서의 편집 구성은 문제와 문제사이의 공간이 적고 더욱 촘촘하게 구성되어 있다. 연습 문제 중에 컴퓨터나 계산기 등을 활용하는 문제를 제시하여 공학용 도구의 사용을 권장하고 있다. 다만 독일의 수학 교과서는 단원과 관련이 있는 흥미로운 수학사나 다양한 수학적 사실을 실은 부분은 없다.

전반적으로 살펴본 독일의 수학 교과서가 간결하고 문제 사이의 여유 공간이 적으며 다소 딱딱하게 느껴진다. 이는 이유는 개념 설명을 간단하게 하고 문제가 많이 나열된 형태를 띠고 있기 때문으로 생각된다.

<표 III-2> 독일의 7학년 수학교과서 단원명

교과서	MATHEMATIK NEUE WEGE 7	MatheNetz 7
단원명	1. 그래프, 표, 항을 통해 과제를 설명하기 1.1 그래프를 읽고 1.2 그래프, 표, 공식 1.3 균형곡선 1.4 비례 대응 1.5 반비례 대응 1.6 항 1.7 대응을 통한 문제해결	4. 그래프와 함수 4.1 함께 발견하고 설명하기 4.2 그래프와 함수 4.3 비례와 반비례 대응 4.4 혼합된 연습문제 4.5 요약 4.5 프로젝트: 체질량지수 8. 학습 관리 문제 8.4 그래프와 함수

<표 III-3> 독일의 수학교과서 MATHEMATIK NEUE WEGE 7의 단원 전개

전개	내용
무엇을 기대하는가?	단원의 목표를 설명적으로 제시하고 배울 내용을 소개
과제	실생활이나 타 교과와 관련된 예들로 이루어진 문제 제시
기초지식	수학 기초지식과 개념, 용어, 기호 등을 간결하게 제시
예	기초지식에 관련한 간단한 예
연습문제	각 소단원마다 다양한 연습문제 제시
CHECK-UP	대단원의 학습이 끝난 후 한 장정도 분량의 문제가 제시되어 있으며 중요 개념 및 기초지식, 용어 등의 내용이 간략히 제시

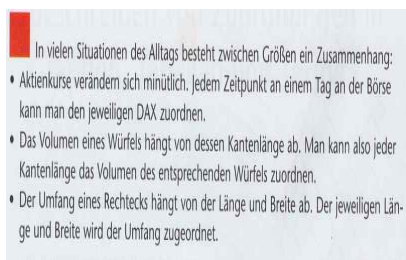
<표 III-4> 독일의 수학교과서 MatheNetz 7의 단원 전개

전개	내용
도입	수학 개념이 등장하기 전에 학습동기 유발을 위한 몇 개의 실생활과 관련한 문제와 예들을 제시
기초지식	수학 기초지식과 개념, 용어, 기호 등을 제시하고 문장으로 설명
연습문제	각 소단원마다 다양한 연습문제 제시
심화문제	연습문제를 해결한 후 한 두 문제 정도 난이도가 어렵고 좀 더 현실적인 문제 제시
혼합된 연습문제	대단원의 학습이 끝난 후 다양한 연습문제 제시
요약	단원의 중요 개념 및 기초지식, 용어 등의 내용을 요약 제시

3. 독일의 수학 교과서 함수 내용 분석

1) 함수의 정의

독일의 수학교과서 MATHEMATIK NEUE WEGE 7에서는 함수에 대한 기호나 용어, 수학적 정의를 제시하지 않고 [그림 III-2]와 같이 다양한 상황들이 어떤 두 가지 크기의 대응관계로 이루어져있다는 것을 예로 들어 함수 상황을 설명하고 있다.



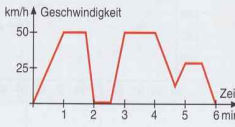
일상 생활에서 많은 상황들은 두 가지 크기(변수를 의미)와 관계가 있다.

- 주식시세는 분마다 변한다. 증권거래소는 매일 매 시간마다 각각의 DAX 지수를 공지한다.
- 주사위의 부피는 선분의 길이에 달려있다. 선분의 길이는 주사위의 부피에 대응한다.
- 직사각형의 둘레의 길이는 가로와 세로의 길이에 달려 있다. 각각의 가로, 세로의 길이는 둘레의 길이와 대응된다.

[그림 III-2] 두 변수의 대응의 예(MATHEMATIK NEUE WEGE 7, p.10)

시간에 따른 자동차의 속력, 시간에 따른 적설량과 같이 두 크기의 대응 관계를 인지한 학생들은 [그림 III-3]과 같이 그 모습을 설명해보거나 그래프로 나타내보면서 대응 관계를 이해하고 묘사하고 있다.

9 Stelle dir vor, der Graph stellt die Fahrt mit dem Auto zum nächsten Supermarkt dar. Auf der horizontalen Achse ist die Fahrzeit in Minuten und auf der senkrechten Achse die Geschwindigkeit in km/h aufgetragen. Beschreibe die Fahrt.



10 Katrin und Lukas sind mit ihren Eltern zum Wintersport gefahren. Jeden Morgen um 8.00 Uhr messen sie die Schneehöhe. Stelle die in den 10 Tagen gemessenen Daten in einem Schaubild dar.

0 cm | 12 cm | 9 cm | 5 cm | 35 cm | 47 cm | 45 cm | 39 cm | 18 cm | 22 cm

9. 그래프는 자동차가 가까운 슈퍼마켓까지 간 거리를 나타냅니다. 가로축은 매분 운행시간이고 세로축은 속도(km/h)입니다. 자동차의 운행 모습을 설명해보시오.

10. Katrin과 Lukas는 부모님과 스키를 타러 갔습니다. 매일 아침 8시에 적설량을 측정하였습니다. 10일동안 측정된 자료를 그래프로 나타내시오.

[그림 III-3] 대응을 표현한 예(MATHEMATIK NEUE WEGE 7, p.12)

이후 [그림 III-4]와 같이 대응 관계를 기호, 문장, 표, 그래프, 공식 등으로 다양하게 표현될 수 있음을 보여주고 있으며 [그림 III-5]와 같이 식을 표로 나타내거나 그래프를 표나 식으로 나타내봄으로써 이 대응 관계를 나타내는 여러 표현법을 서로 변환하는 연습을 하도록 하였다.

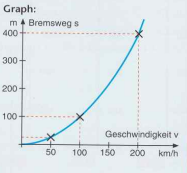
Zuordnungen kann man auf verschiedene Arten darstellen: mit einer Tabelle, einem Graphen, mit Worten, mit einer Rechenvorschrift.

Zuordnung: Geschwindigkeit → Bremsweg

Text: Den Bremsweg s eines Autos auf trockener Straße errechnet man, indem man die Geschwindigkeit v mit sich selbst multipliziert und das Ergebnis durch 100 dividiert.

Geschwindigkeit v (in km/h)	Bremsweg s (in m)
10	1
20	4
50	25
100	100
200	4000

Graph: $s = \frac{v \cdot v}{100}$



Rechenvorschrift: $s = \frac{v \cdot v}{100}$

대응을 여러 유형으로 나타낼 수 있다. 표나 그래프나 단어로, 계산 규칙으로.

대응 : 속도 → 거리

문장 : 마른 땅에서 자동차의 제동거리는 속도 v 를 제곱하여 100으로 나눈 것으로 계산됩니다.

계산 규칙 : $s = \frac{v \cdot v}{100}$

[그림 III-4] 대응 관계의 여러 표현법(MATHEMATIK NEUE WEGE 7, p.20)

MATHEMATIK NEUE WEGE 7에서는 함수의 정의를 제시하지 않고, 크기를 갖는 둘 사이에 만족하는 어떠한 대응 관계를 여러 상황을 통해서 발견하고 이를 표나 그림이나 문장이나 식 등의 자신이 원하는 유형으로 표현할 수 있도록 유도하고 있다. 이처럼 굳이 함수라는 용어나 (x) 라는 기호를 쓰지 않더라도 다양한 예들을 통해 두 변수 사이의 대응관계가 있음을 느끼며 그것을 다양하게 표현해 봄으로써 학생들은 직관적으로 함수가 어떤 것인지 알 수 있도록 하였다. 또한 학습자가 주체적으로 다양한 현실의 자료를 해석하면서 두 변수 사이에 대응 관계가 있는지 없는지 생각해보고 그것을 여러 유형으로 표현해보기도 하며, 그들 사이에 만족하는 규칙성을 자연스럽게 추론할 수 있도록 구성되어 있다.

반면 또 다른 독일의 수학교과서인 MatheNetz 7에서는 함수를 어떤 값이 변할 때 어떤 한 값이 따라서 변하는 대응으로서 정의하고 있으며 Funktion(함수), Funktionswert(함숫값)라는 용어도 사용하고 있다. [그림 III-6]에서와 같이 정사각형 한 선분의 길이와 면적의 대응을 예로 함수를 도입하고 있으며, 두 값을 순서쌍으로 나타낸 뒤 그래프를 그릴 수 있음을 알려주고 있다. 또한 선분이 길어질수록 넓이가 커지는 변화와 그에 대한 대응을 그래프 뿐 아니라 기호, 표 및 공식으로 나타내고 있다.

10 Zuordnungen kann man mit Tabellen darstellen. Für folgende Zuordnungen ist jeweils die Zuordnungsvorschrift gegeben.

a) $y = x - 4$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = x^2$ d) $y = \frac{24}{x}$

Erstelle zu jeder der Zuordnungen eine Tabelle mit den x-Werten 0,5; 1; 2; 3; 4; 5 und zeichne den zugehörigen Graph.

10. 대응은 표로 나타낼 수 있다. 각각의 경우에 다음과 같은 규칙을 갖는 대응이 있습니다. 각각의 대응에 대하여 x 의 값을 0.5, 1, 2, 3, 4, 5로 했을 때의 표를 만들고 그래프를 그리시오.

12 Der Graph einer Zuordnung ist gegeben. Erstelle jeweils eine Tabelle und finde die Zuordnungsvorschrift.

12. 다음과 같은 그래프가 있다. 각 대응에 따른 표를 만들고 대응규칙(식)을 찾아보시오.

[그림 III-5] 대응 관계의 표현법 변환(MATHEMATIK NEUE WEGE 7, p.22)

Der Flächeninhalt eines Quadrates ändert sich in Abhängigkeit von der Seitenlänge. Jeder Seitenlänge a ist ein Flächeninhalt $A(a)$ zugeordnet: $a \mapsto A(a)$. Stellt man zusammengehörige Wertepaare (Seitenlänge; Flächeninhalt) aus der Wertetabelle als Punkte im Koordinatensystem dar, erhält man den Graphen der Zuordnung.

a in cm	0	1	2	3	4
A in cm ²	0	1	4	9	16

Am Graphen sieht man sofort, dass es sich um eine Je-desto-Zuordnung handelt: Je größer die Seitenlänge, desto größer der Flächeninhalt. Zur Berechnung weiterer Wertepaare ist die Flächeninhaltsformel hilfreich: $A(a) = a^2$.

정사각형의 면적은 선분의 길이에 달려있다. 각 변의 길이 a 는 면적 $A(a)$ 와 대응하고 $a \rightarrow A(a)$ 로 나타낸다. (변의 길이, 면적)의 순서쌍으로 각각의 점을 좌표평면 상에 찍으면 대응하는 그래프를 얻게 된다. 그래프에서는 ~할수록 ~한 대응을 즉시 볼 수 있다. : 여기에서는 선분이 길어질수록 면적도 커진다. 이때, 면적에 대한 공식이 순서쌍의 계산에 도움이 된다. : $A(a)=a^2$

[그림 III-6] 함수의 예(MatheNetz 7, p.124)

Jeder Seitenlänge a eines Quadrates ist genau ein Flächeninhalt $A(a)$ zugeordnet. Eine solche Zuordnung nennt man eindeutige Zuordnung oder Funktion. $A(a)$ heißt der zu a gehörige Funktionswert.

Funktionsgleichung: $A(a) = a^2$ Funktionsterm: a^2 Einsetzen: $a = 2,5$

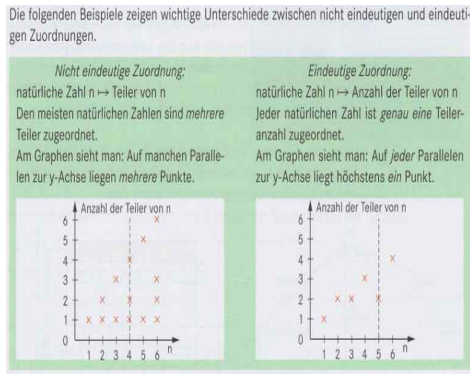
Für a dürfen alle positiven rationalen Zahlen und null eingesetzt werden.

$A(2,5) = 2,5^2 = 6,25$ Funktionswert zu $a = 2,5$

정사각형의 한 변의 길이 a 는 정확히 하나의 면적 $A(a)$ 와 대응된다. 이러한 대응은 명백한 대응 또는 함수라 한다. $A(a)$ 는 a 의 함수값이라 한다. 함수방정식 함수항 설정 : $a=2.5$
 $A(a) = a^2$ $A(2.5) = 2.5^2 = 6.25$
 a 의 값으로 양수와 0을 사용할 수 있다. $a=2.5$ 의 함수값

[그림 III-7] 함수의 정의(MatheNetz 7, p.124)

또한 [그림 III-7]과 같이 정의역, 치역, 공역과 같은 용어 없이 정사각형의 한 변의 길이와 그에 따른 넓이의 변화라는 예를 통하여 대응으로서 함수(Funktion)를 정의하고 있다. 이후 함수가 아닌 대응과 함수인 대응을 비교함으로써 한 값에 정확히 하나의 값이 대응해야만 명백한 대응, 즉 함수임을 정확히 알게 한다([그림 III-8]).



[그림 III-8] 함수가 아닌 대응과 함수의 비교(MatheNetz 7, p.124)

다음 예들은 명백하지 않은 대응과 명백한 대응 사이에 중요한 차이점들이 있음을 보여주고 있다.

<p>명백하지 않은 대응 자연수 $n \mapsto n$의 약수 대부분의 자연수가 여러 개 약수와 대응한다. 그래프에서 y 축에 평행한 여러 선 위에 여러 점이 있다.</p>	<p>명백한 대응 자연수 $n \mapsto n$의 약수 임의의 자연수의 약수의 개수는 정확히 하나의 값에 대응한다. 그래프에서 y 축에 평행한 각각의 선 위에 오직 한 점이 있다.</p>
--	--

Funktionsterme bzw. Funktionsgleichungen erleichtern die Berechnung von Funktionswerten erheblich; leider kennt man nicht zu allen Funktionen passende Funktionsterme. Funktionen werden oft mit f bezeichnet. Die Werte, die bei der Darstellung im Koordinatensystem auf der x-Achse eingezeichnet werden, heißen x-Werte. Die Funktionswerte werden mit $f(x)$ bezeichnet. Wenn dadurch keine Unklarheiten entstehen, schreibt man oft auch y statt $f(x)$.

Zuordnungsvorschrift	x-Wert \mapsto Funktionswert $f(x)$
Schreibweise	$x \mapsto f(x)$
Sprechweise	x wird zugeordnet f von x

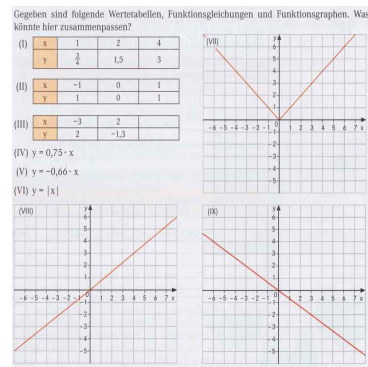
함수항 또는 함수방정식은 함수값의 계산을 용이하게 한다. 하지만 유감스럽게도 모든 함수에 대한 함수항은 알 수 없다. 함수는 종종 기호로 나타낸다. 좌표평면에서 x축에 쓰여진 값들은 x값이라 한다. 함수값은 기호 $f(x)$ 로 나타낸다. $f(x)$ 대신 y 를 쓰기도 한다.

대응 규칙 : x값 \mapsto 함수값 $f(x)$
 쓸 때 : $x \mapsto f(x)$
 말할 때 : x는 x의 f에 대응된다.

[그림 III-9] 함수의 기호(MatheNetz 7, p.124)

MatheNetz 7에서는 함수를 f 로, 함수값을 $f(x)$ 의 기호로 나타낼 것을 설명하면서 모든 함수가 함수식으로 표현되지 못한다는 것도 알려준다. 또한 대응을 통해 함수의 개념이 옹기 정돈되도록 친절하게 설명해주고 있으며 MATHEMATIK NEUE WEGE 7과 마찬가지로 함수를 다양한 표현으로 나타내고 이들을 변환할 수 있게 한다.

독일의 수학 교과서에서는 학생들이 함수 단원을 배우면서 두 양의 관계를 적절히 표현하고 이를 변환하는 것에 초점을 두고 있다. [그림 III-10]과 같이 학생들은 함수 단원을 통해 실세계에서 서로 의존적이며 변화하는 양들 사이의 관계에 대하여 생각해보고 이를 분석해보며, 수와 표, 식, 그래프와 같이 다양한 표현들을 선택적으로 사용할 수 있게 된다.



[그림 III-10] 함수의 다양한 표현 (MatheNetz 7, p.127)

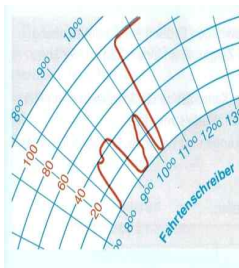
2) 다양한 실생활 소재 사용

독일의 수학교과서의 특징 중의 하나로 들 수 있는 것은 버스에서 움직인 거리에 따른 속도기록, 주식변동,

통화 요금제의 비교 등과 같은 실생활과 연관된 다양한 함수 상황을 다루고 있다는 점이다.

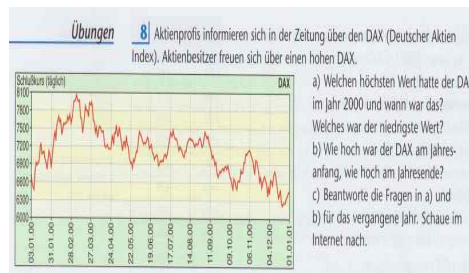
[그림 III-11]의 (a)는 버스의 속도기록계를 보고 언제 차량이 출발했는지, 언제, 얼마나 오랫동안 쉬는 시간을 가졌는지 등의 정보를 추론하는 문제의 예다. [그림 III-11]의 (b)는 DAX 지수 그래프를 보고 a)에서 2000년에는 언제 지수가 가장 높았는지, b)에서 연초와 연말의 DAX 지수가 얼마나 높았는지 비교해보거나 c)에서 작년의 DAX 정보는 학생들이 직접 인터넷을 통해 찾아보고 살펴보도록 하고 있다. 즉, 가공된 자료를 주는 것이 아니라 학생들이 자료를 직접 찾아보고 이를 통해 문제를 해결하게 하고 있다. [그림 III-11]의 (c)는 Thorsten과 Klaus 두 학생이 자신들의 반 학생들에게 함부르크 항구의 수위를 24시간동안 측정하겠다고 약속하고 그들의 부모의 도움을 받아 7시부터 24시까지 매시간 항구의 수위를 측정하였고, 그 측정된 정보를 표로 나타내었다. a)에서 이 표를 그래프로 나타내 보고, b)에서는 1시부터 7시까지 측정하지 못한 값들을 추측할 수 있는지 묻고 있다. [그림 III-11]의 (d)는 세 종류의 통화요금 제도가 표와 그래프로 나와 있다. 기본요금과 추가 단위당 요금을 표로 나타낸 것보다 그래프로 나타내는 것이 통화량에 따라 어떤 요금 제도를 쓰는 것이 나은지 더 쉽게 파악할 수 있음을 얘기해주고 있다.

이와 같은 예들을 통해 학생들은 수학이 일상생활과 밀접한 관련을 갖고 있다는 것을 자연스럽게 느끼도록 하고 있으며 다양한 일상의 맥락 안에서 자료들을 수학적으로 표현해보거나 정보를 알아내거나, 다음 상황을 추론하는 등의 활동을 통해 함수적 사고를 기를 수 있도록 하고 있다. 이러한 점은 학생이 수학을 통해 일상생활의 현상을 이해하고 설명하고 문제를 해결할 수 있게 됨을 인식할 수 있도록 하며, 함수적이며 유연한 사고와 다양한 지식을 실생활의 다양한 맥락 안에서 의미 있게 활용할 수 있도록 하고 있는 독일 교과서의 특징적인 면을 잘 보여주고 있는 것이다.



2 In vielen Fahrzeugen ist ein Fahrtenstreiber eingebaut. Der Fahrtenstreiber registriert die Geschwindigkeit, mit der das Fahrzeug gefahren ist. Die Scheibe stammt aus dem Bus, mit dem die Klasse 7d einen Ausflug unternommen hat. Lies von der Scheibe so viele Informationen wie möglich ab, z. B.: Wann ist der Bus abgefahren? Wann und wie lange wurde eine Pause gemacht? ...

(a) 버스의 속도기록계(p.9)



8 Aktienprofis informieren sich in der Zeitung über den DAX (Deutscher Aktien Index). Aktienbesitzer freuen sich über einen hohen DAX.
a) Welchen höchsten Wert hatte der DAX im Jahr 2000 und wann war das? Welches war der niedrigste Wert?
b) Wie hoch war der DAX am Jahresanfang, wie hoch am Jahresende?
c) Beantworte die Fragen in a) und b) für das vergangene Jahr. Schau im Internet nach.

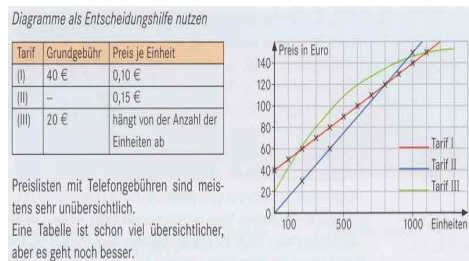
(b) 연간 DAX 지수의 변화 그래프(p.12)

11 Thorsten und Klaus haben ihren Mitschülern versprochen, den Wasserstand im Hamburger Hafen über 24 Stunden zu messen. Ihre Eltern haben dabei geholfen. Von 1 bis 6 Uhr haben sie keine Messungen durchgeführt.

Uhrzeit	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Stand	3,50	3,80	4,10	5,50	6,40	6,90	7,00	6,75	6,20	5,25	4,60	4,00	3,60	3,50	3,80	4,40	5,70	7,50

a) Stelle die Tabelle grafisch dar.
b) Kannst du die fehlenden Werte schätzen?

(c) 함부르크 항구의 시간에 따른 수위(p.12)



(d) 세 종류의 통화요금 제도(p.117)

[그림 III-11]의 다양한 실생활 소재 사용(MATHEMATIK NEUE WEGE 7)

3) 타 학문과의 연계성

독일의 수학교과서에서는 실생활 문제뿐만 아니라 다른 학문과의 연계성을 갖는 예들을 다양하게 제시하고

있다. 예를 들면 [그림 III-12]에서와 같은 이산화탄소 배출에 대한 그래프와 다이어그램, 온도에 따른 물의 부피 변화 그래프, 두꺼비와 쥐의 기온에 따른 심장박동수 그래프, 아기의 개월 수에 따른 몸무게 그래프, 살팽이와 흰덧신토끼에 대한 그래프, 각 도시의 기온과 강수량 다이어그램 등을 제시하여 수학과 다른 학문을 연결하고 이와 관련된 문제를 해결한다.

[그림 III-12]의 (a)는 a)에서 세계 지표면의 평균기온이 어떻게 되는지 알아보도록, b)에서 그래프를 보고 어떤 정보를 알아낼 수 있는지 질문하고 있으며, c)에서 왜 이산화탄소의 배출량이 주어진 것인지 알아보고, d)에서 온실효과에 대해 조사해 보도록 하고 있다. 즉, 주어진 그래프와 다이어그램을 해석하여 이산화탄소의 배출량과 온실효과가 어떤 관계가 있는지를 추측해보고 조사해보는 이러한 활동은 지구과학과 관련이 있다. [그림 III-12]의 (b)는 화학, 생물학과 관련이 있는 문제로서 고체, 액체, 기체의 부피는 온도에 따라 영향을 받고 일반적으로 온도가 올라갈수록 부피가 증가하지만 물은 예외다. a)에서 오른쪽 그림을 보고 액체상태의 물의 온도와 부피사이의 관계를 설명하도록 하고 있다. b)에서는 물이 0 ° 일 때 부피가 제일 작아서 무게가 가장 크다는 정보도 또한 알려준다. 이를 통해 물은 4 ° C 일 때 바닥에 가라앉게 되는데, 이것이 겨울에 수중생물이 살아갈 수 있는 어떤 의미를 갖는지 설명해보도록 하고 있다.

a) Was versteht man unter der globalen Durchschnittstemperatur an der Erdoberfläche?
 b) Welche Informationen kannst du der Grafik entnehmen?
 c) Weshalb werden die Kohlendioxidemissionen angegeben?
 d) Informiere dich über den Treibhauseffekt.

Bei allen festen, flüssigen und gasförmigen Stoffen ist das Volumen einer bestimmten Stoffmenge abhängig von der Temperatur. Im Allgemeinen wächst das Volumen mit steigender Temperatur. Wasser macht da eine ganz erstaunliche Ausnahme.
 a) Beschreibe den Zusammenhang zwischen Volumen und Temperatur bei Wasser (im flüssigen Zustand) anhand des Bildes.
 b) Bei 4 °C ist das Volumen am kleinsten, d.h. das Gewicht pro Volumen ist am größten. Deshalb sinkt Wasser mit einer Temperatur von 4 °C in einem Teich immer auf den Grund. Welche Bedeutung hat dies für das Überleben von Wassertieren im Winter? Beschreibe und erkläre.

(a) 이산화탄소 배출량과 온실효과(p.122)

(b) 온도에 따른 물의 부피 변화(p. 122)

[그림 III-12] 타 학문과의 연계 문제(MatheNetz 7)

1 Erdkröte und Hausmaus im Vergleich
 Biologen interessieren sich auch für den Einfluss der Umweltbedingungen auf bestimmte Tiere. In den beiden Graphen wurden Hausmause und Erdkröten untersucht.
 a) Was kannst du aus den Graphen ablesen?
 b) Welcher Graph gehört wohl zur Erdkröte, welcher zur Hausmaus?
 c) Übertrage die Graphen in dein Heft. Was ist gleich, wo entdeckst du Unterschiede?
 d) Formuliere und sammelt eigene Fragen, die sich mithilfe der Graphen beantworten lassen.

12 Bei der Untersuchung von Babys werden das Gewicht und die Körpergröße gemessen. Wenn ein Kind auffällig leicht oder auffällig schwer ist, kann das ein Hinweis auf Krankheiten sein.
 a) Was könnten die Graphen darstellen? Deine Eltern können dir vielleicht noch dein „Untersuchungsheft“ zeigen.
 b) Der Arzt hat für Christoph die Gewichte bei verschiedenen Untersuchungen eingetragen. Lies ab, wie alt Christoph jeweils war und wie schwer.
 c) Entscheide bei den Kindern, ob sie auffällig leicht oder auffällig schwer sind:

Anke	4 Monate	8 kg
Beate	9 Monate	7 kg
Claus	12 Monate	13 kg
Monika	24 Monate	9 kg
Julian	36 Monate	16 kg

(a) 두꺼비와 집쥐의 비교(p.8)

(b) 개월 수에 따른 몸무게(p.12)

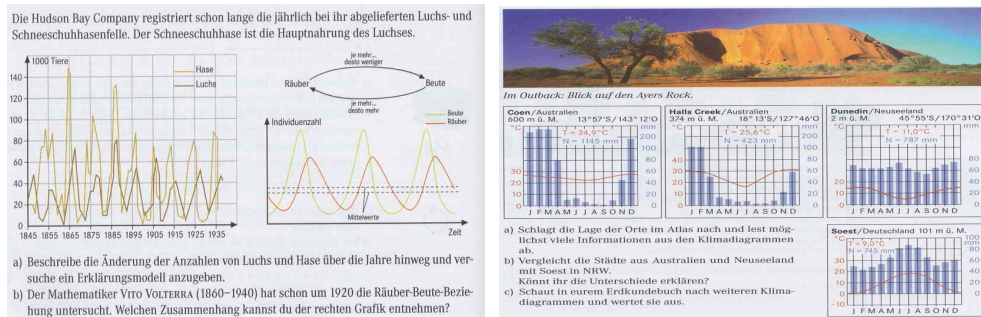
[그림 III-13] 타 학문과의 연계 문제(MATHEMATIK NEUE WEGE 7)

[그림 III-13]의 (a)는 온도에 따른 심장박동수의 두 그래프가 주어져 있다. 이는 두꺼비와 집쥐에 대해 조사된 것인데, a)에서 학생들이 그래프를 해석해보도록, b)에서 어느 그래프가 두꺼비의 것인지 혹은 집쥐의 것인지

추론해보고 c)에서 그래프의 공통점과 차이점을 찾아보고 있다. 이 문제는 특정 동물들이 환경조건(기온)에 따라 어떤 영향을 받는지를 생각해 보도록 하고 있다. 이는 생물학과 관련이 있다. [그림 III-13]의 (b)는 야기들의 개월 수에 따른 몸무게에 대해 조사한 그래프를 제시하고 눈에 띄게 가볍거나 무겁다면 그것이 병이 있다는 것을 의미한다고 정보를 제공하고 있다. a)에서 이 그래프를 보고 자신의 진료수첩을 찾아 그래프와 비교해볼 수 있도록 한다. c)에서 여러 아이들의 예들을 보고 눈에 띄게 가벼운 것인지 또는 무거운 것인지를 확인해보고 있다. 이 문제는 의학과 관련이 있다.

[그림 III-14]의 (a)는 Hudson Bay 회사에서 오랫동안 살쥬이와 토끼에 대한 연구를 해왔는데 토끼는 살쥬이의 먹이임을 알려준다. a)에서 여러 해 동안 살쥬이(Luchs)와 토끼(Hase) 수의 변화를 묘사하고 나타난 모델을 설명해보도록 하고 있으며 b)에서 수학자 VITO VOLTERRA(1860~1940)가 이미 포식자-피식자 관계를 연구했는데 또 어떤 상황이 오른쪽 그래프와 연관시켜 볼 수 있는 것인지 살펴보게 하고 있다. 이는 생태학과 관련이 있다. [그림 III-14]의 (b)는 호주의 Coen과 Halls Creek, 뉴질랜드의 Dunedin의 기온과 강수량을 나타낸 다이어그램을 제공하고 독일의 Soest와 비교하여 특징과 차이점을 설명해보도록 하고 있다. 특히 c)에서 지리책을 직접 찾아보고 기후도에 대해 평가해보도록 하고 있다. 이는 세계지리학과 관련이 있다.

수학이 필요하고 유용한 지식이라는 인식이 형성되면 자연스럽게 수학에 대한 긍정적인 태도를 가지게 되고, 수학 학습에 대한 관심과 흥미가 높아져 수학을 대하는 태도가 바람직한 방향으로 변화될 것이다(교육인적자원부, 2008). 독일 교과서에서는 이런 예들을 통해 학생들로 하여금 수학이 여러 학문들과 연관성이 있으며, 자료를 수학적으로 정리하고, 그래프나 표로 나타내는 것이 문제 해결에 중요한 것임을 느낄 수 있도록 하고 있다. 또한 정리된 그래프나 표, 다이어그램을 수학적으로 해석, 추론함으로써 미래를 예측하거나 자연재해를 예방하는 방법을 모색하는 등 수학이 실제생활에 유용하게 쓰인다는 것을 알 수 있도록 하고 있다.



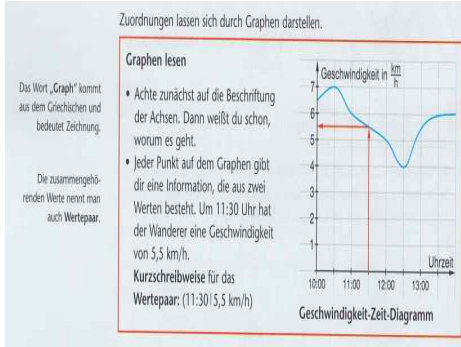
(a) 살쥬이와 흰뺨토끼에 대한 연구(p.122)

(b) 각 지역의 기온과 강수량(p.119)

[그림 III-14] 타 학문과의 연계 문제(MatheNetz 7)

4) 함수의 그래프 해석 및 그리기

독일의 수학 교과서에서는 다양한 그래프를 활용하여 함수를 지도하고 있는 특징이 있다. 7학년에서부터 그래프의 증가, 감소, 최댓값, 최솟값 등의 용어를 알려주고 이를 사용해 그래프를 적절히 해석할 수 있도록 하는 문제를 제공하고 있다.



대응은 그래프로 나타낼 수 있다.

그래프 읽기

- 축이 나타내는 것을 잘 보면 무엇을 말하는지 알 수 있다.
 - 그래프의 각각의 점은 두 가지 정보를 가지고 있다. 11시 30분에 여행자의 속도는 5.5km/h이다. 줄여서 말하자면 순서쌍은 : (11:30, 5.5km/h) **속력-시간의 다이어그램**
- “그래프”는 기호, 도안이라는 뜻의 그리스어이다. 한 쌍을 이루는 값들을 순서쌍이라고 부른다.

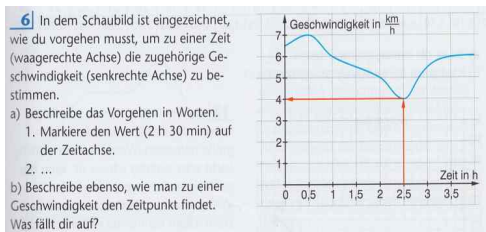
[그림 III-15] 그래프 해석 1(MATHEMATIK NEUE WEGE 7, p.10)

독일의 수학교과서 MATHEMATIK NEUE WEGE 7를 먼저 살펴보면 [그림 III-15]에서와 같이 어떤 대응을 그래프로 나타내었을 때 두 변수는 각각의 정보를 가지고 있으며 이를 순서쌍으로 나타낼 수 있음을 설명하고 있다. 그리고 [그림 III-16], [그림 III-17]과 같이 그래프 자료를 제공한 후 그것을 읽어 알아낼 수 있는 정보들이 어떤 것이 있을지 추론해보기도 한다. 한 점의 순서쌍이 나타내는 정보를 알아낼 수도 있고, 그래프에서 가장 높은 지점이 어딘지 생각해보기도 한다.



예A) 프랑스를 달리는 자전거선수들이 각 구간마다 다음과 같이 달리고 있다. 이 다이어그램에서 어떤 것을 추론할 수 있나요? - 예를 들면 어느 킬로미터에서 가장 높은 구간에 도달했는지 알 수 있다. 181.5km 에서는 Briançon에 도달했다. 가장 높은 지점인 Col du Galibier은 145.5km 구간이다.

[그림 III-16] 그래프 해석 2(MATHEMATIK NEUE WEGE 7, p. 10)



그래프에는 당신이 한 시간 동안(가로축) 어떤 속도로(세로축) 지나왔는지 확실히 나타내고 있다.

- a) 과정을 언어로 묘사하십시오.
1. 시간 축에 값 (2시 30분)을 표시하십시오.
 2. ...
- b) 또한 시각에 따른 속도를 어떻게 찾는지 묘사하십시오. 어떤 모습이 나타나는가?

[그림 III-17] 그래프 해석 3(MATHEMATIK NEUE WEGE 7, p.10)



기본지식) 정보를 그래프로 설명할 수 있다.

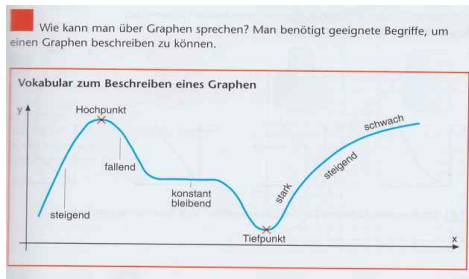
그래프 그리기.

1. 무엇이 표시되어 있는지 밝히시오. 어떤 크기가 어떤 축에 놓여 있는가?
2. 그림의 한 절편을 밝히시오. 어떤 값이 축에 나타나 있는가?
3. 척도를 나타내시오. (예를 들어 1cm의 축은 ...와 부합한다)
4. 표의 순서쌍을 그래프에 나타내시오.

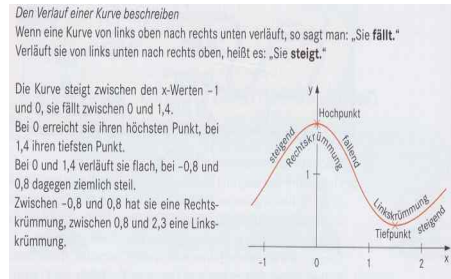
[그림 III-18] 그래프 그리기(MATHEMATIK NEUE WEGE 7, p.10)

그래프를 직접 그려보는 과정을 [그림 III-18]과 같이 안내하고 있으며 어떤 정보를 어떤 축에 놓을지, 척도는 얼마나 할지 등을 결정한 후 점을 찍어 그래프를 그리도록 하고 있다. 이때 쓰인 자료 역시 시간에 따른 물의 소비량으로 실제적인 수치와 불규칙적인 곡선의 그래프의 모습을 볼 수 있다.

그래프에 대한 설명을 할 때 적절한 개념이 필요하며 [그림 III-19]의 (a)에서와 같이 그래프의 모양에 관한 여러 용어(증가, 최댓값, 감소, 최댓값, 최솟값, 가파른, 완만한)들을 직관적으로 도입한다. MatheNetz 7 또한 마찬가지로 [그림 III-19]의 (b)와 같이 여러 그래프의 예들을 제시하고 곡선의 움직임을 설명할 때 필요한 개념인 증가, 감소를 설명하고 있다.



(a) MATHEMATIK NEUE WEGE 7, p.10



(b) MatheNetz 7, p.110

[그림 III-19] 그래프에 관한 수학 용어

이와 같이 독일의 수학 교과서는 다양한 함수적 상황을 그래프로 묘사해보고 그래프가 갖고 있는 특징이나 정보들을 해석해내는 것에 더욱 초점을 맞추고 있다.

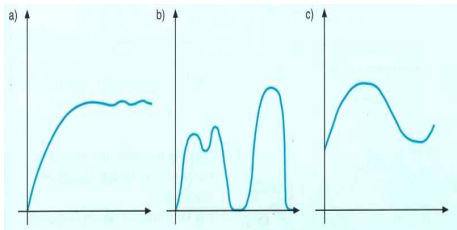
5) 다양한 그래프의 모양

독일의 수학교과서의 가장 두드러진 특징은 다양한 그래프의 모양을 활용하고 있다는 점이다. 함수의 그래프로 정형화되지 않은 불규칙적인 그래프, 함수가 아닌 그래프, 두 개 이상의 자료가 한 좌표평면 상에 나타난 그래프 등을 제공하고 있으며 이를 활용하여 함수에 대한 명확한 이해를 돕고 있다.

[그림 III-20]에서와 같이 학생들은 그래프가 규칙적일 수도 불규칙적일 수 있고 직선일 수도 있고 곡선일 수도 있으며 연속적일 수도 불연속적일 수도 있으며 무수히 많은 형태로 표현해낼 수 있음을 알 수 있도록 하였

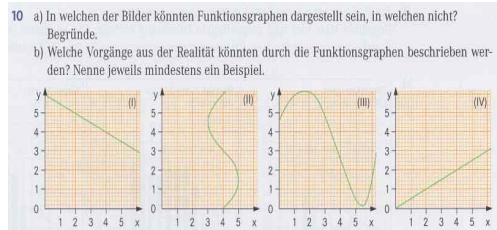
다. 또한 하나의 좌표평면에 여러 개의 그래프를 그려서 둘을 견주어 비교하고 분석하는 능력을 기를 수 있도록 하였으며, 어떤 상황이 주어질 때 학생 스스로 그것을 그래프로 적절히 표현할 수 있고 또 그 그래프가 알맞게 그린 것인지 점검해볼 수도 있도록 하여 교과서에 제시된 다양한 그래프의 모양을 통해 학생들의 사고의 폭이 넓힐 수 있도록 하고 있다.

김다예(2014)가 언급한 바와 같이 학생들은 함수의 그래프 모양에 대해 함수의 그래프는 연속이어야 한다는 지, 함수의 그래프 모양은 그들의 눈에 익숙한 멋진 모양이어야 하며, 불연속이거나 이상한 모양은 안 된다는 오개념을 가질 수 있으며, 이를 극복하기 위해서는 학생들의 오개념에 상반되는 예제들을 제시하여 오개념을 수정할 수 있도록 하는 것을 정두리(2014)는 제안한 것과 같이 독일의 수학 교과서는 다양한 그래프의 모양을 제시함으로써 학생들의 오개념을 줄이고 함수에 대해 명확히 이해하는데 도움을 주고 있다.



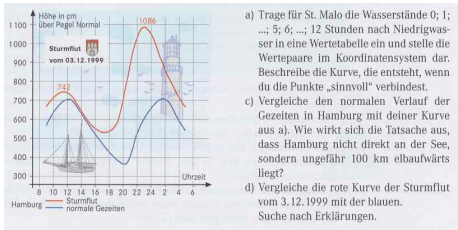
(a) 불규칙적인 그래프

(MATHEMATIK NEUE WEGE 7, p.9)



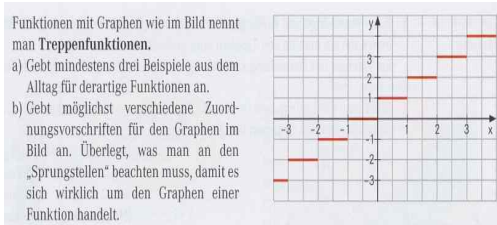
(b) 함수가 아닌 그래프 찾기

(MatheNetz 7, p.127)



(c) 두 개의 자료가 동시에 표현된 그래프

(MatheNetz 7, p.115)



(d) 불연속적인 그래프

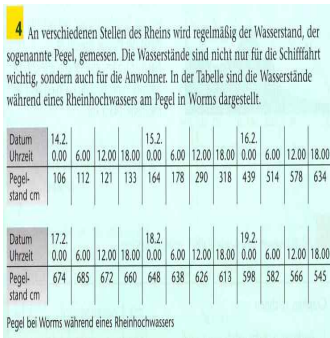
(MatheNetz 7, p.143)

[그림 III-20] 다양한 모양의 그래프

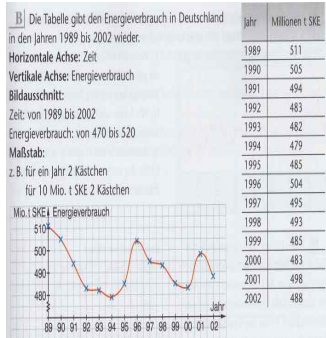
6) 현실적인 수치 자료

독일의 수학교과서는 그래프나 표의 수치가 계산하기 쉽게 임의로 조정된 수이거나 간단히 계산할 수 있는 한 자리의 정수나 자연수로 나타난 것이 아니라 직접 측정된 자료나 현실적인 수치를 사용한 것이 특징이다.

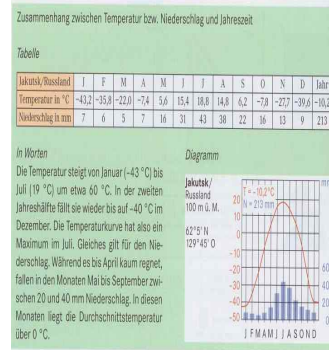
[그림 III-21]과 같은 규칙적으로 오르내리는 라인 강의 수위, 단위가 백만 톤인 에너지 사용량, 소수점 첫째 자리까지 나타난 어느 지역의 온도 등의 예를 볼 때 독일의 수학 교과서는 계산상의 편의를 위해 조작된 간단한 수 보다는 가공되지 않은 실생활의 수치를 자료로 문제를 구성하고 있다. 이를 접하는 학생들은 아주 작은 수나 아주 큰 수 등을 사용하는데 있어 거부감이 없고, 규칙적인 수뿐만 아니라 불규칙적인 수로 나타난 자료들도 표, 그래프 및 다이어그램으로 표현하기에 어려움이 없도록 하고 있다. 이는 독일 수학 교육과정에서 중요시하는 수학적 능력 중 실제상황을 수학적인 표현으로 적절히 표현해내고 필요한 개념이나 요소를 찾아내야 하는 모델링 능력을 키워주는 것과 밀접한 관련이 있다.



(a) 라인 강의 수위를 나타낸 표 (MATHEMATIK NEUE WEGE 7, p.24)



(b) 에너지 사용을 나타낸 그래프와 표 (MATHEMATIK NEUE WEGE 7, p.11)



(c) 러시아 Jakutsk 지역의 기온과 강수량을 나타낸 표와 다이어그램 (MatheNetz 7, p.116)

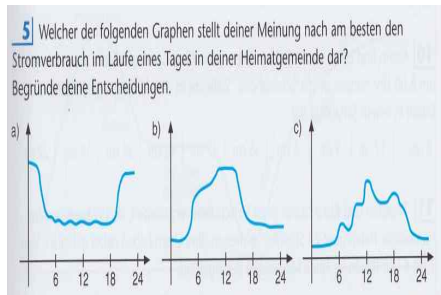
[그림 III-21] 다양한 수치 자료 활용

7) 다양한 문제

독일의 수학 교과서에 나온 문제는 답이 바로 나오는 단답형의 문제들도 많이 있었지만 실제계 상황을 바탕으로 만든 개방형(open-ended) 문제, 수학적 의사소통 문제가 적절히 섞여 있었다.

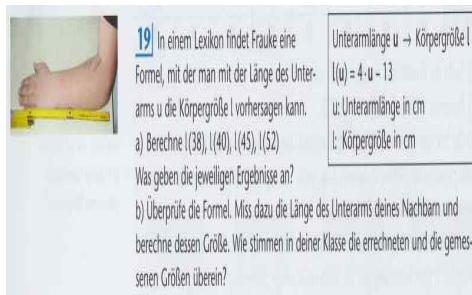
(1) 개방형 문제

김보경·권성룡(2016)에 따르면 개방형 문제는 결과가 미리 정해지지 않은 즉, 접근 방법과 결과가 다양한 형태로 나올 수 있는 문제이다. 독일의 수학 교과서에서는 이러한 개방형 문제들을 많이 찾아볼 수 있었다.



5. 다음 그래프 중 어떤 그래프가 당신의 지역사회의 하루 동안 전력 소비를 나타내는 것일까? 당신의 결정을 설명하시오.

(a) p.11



19. 팔꿈치 길이 u → 신장 l

$$l(u) = 4u - 13$$

b) 이웃의 팔의 길이와 신장을 재어보고 식을 확인해보시오.

(b) p.24

[그림 III-22] 개방형 문제(MATHEMATIK NEUE WEGE 7)

[그림 III-22]의 (a)는 여러 곡선 그래프를 제시한 후 자신이 살고 있는 지역의 전력 소비로 적당한 것을 고르고 왜 그렇게 선택했는지를 묻고 있다. 학생들은 자신의 추론 과정이 옳은지 비판적으로 평가하고 반성할 기회를 갖게 된다. [그림 III-22]의 (b)는 팔꿈치 길이와 신장 사이에는 일차식이 성립한다고 알려준 후 팔꿈치 길이가 38, 40, 45, 52에 해당할 때 신장이 어떻게 되는지 식에 u 값을 대입하여 함수값을 찾는 정형 문제의 예이다. 그와 더불어 b)에서 주변 사람들의 팔의 길이와 신장을 재어보고 정말 함수식이 맞는지 확인해보는 작업을 통해 다양한 팔 길이와 신장을 측정하고 둘 사이에 규칙성이 있다는 것을 느낄 수 있도록 하였다. 학생들은 이러한 문제를 통하여 생활 주변이나 사회 현상 등의 다양한 맥락 안에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구할 기회를 갖게 된다.

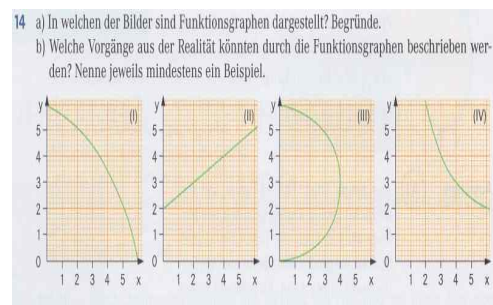
Pegelstände Rohrdorf

Datum	11.2.				12.2.				13.2.			
Uhrzeit	0	6	12	18	0	6	12	18	0	6	12	18
Pegel	8,5	8,7	9,1	9,5	9,7	9,8	9,9	10,3	10,9	11,5	11,9	12,1

Datum	14.2.				15.2.				16.2.			
Uhrzeit	0	6	12	18	0	6	12	18	0	6	12	18
Pegel	12,1	12,1	11,9	11,7	11,7	11,9	12,2	12,7	13,3	13,9	14,5	14,9

Datum	17.2.				18.2.				19.2.			
Uhrzeit	0	6	12	18	0	6	12	18	0	6	12	18
Pegel	15,2	15,4	15,6	15,8	15,9	16,0	16,0					

a) Ist mit einer Überflutung der Seehofer Altstadt zu rechnen? Müssen Evakuierungsmaßnahmen getroffen werden?



a) 구(舊)시가인 Seehofer 지역이 홍수로 범람하게 될까요? 대피조치를 취해야 하나요?
 (a) p.114

b) 현실에서 어떤 과정들이 다음의 함수 그래프에 의해 설명될 수 있는가? 적어도 하나의 예를 드시오.
 (b) p.127

[그림 III-23] 개방형 문제(MatheNetz 7)

[그림 III-23]의 (a)는 Rohrdorf 지역의 날씨, 시간에 따른 수위를 나타낸 표이다. 측정된 자료를 보고 자연 재해인 홍수에 대하여 생각해보고 어떠한 대비를 해야 하는지 생각해보도록 하고 있다. 주어진 문제는 정해진 답이 없으며 학생들의 상상력과 함께 현실의 자연재해(홍수) 문제를 직접 다뤄볼 수 있는 문제로 학생들이 표를 해석하고 이를 토대로 미래에 대한 예측을 하며 그에 적절한 판단을 내리는 활동을 할 수 있도록 유도하고 있다. 학생들이 수학적 지식, 기능, 경험을 연결하여 실생활의 문제를 해결할 방법을 모색해보는 기회를 갖도록 하고 있다. [그림 III-23]의 (b)는 여러 그래프에 맞는 현실의 상황을 생각해보고 그래프와 현실을 연결해보고 그 상황을 창조적으로 만들어보는 문제이다. 어떤 상황을 그래프나 표로 나타낼 수도 있지만 반대로 그래프나 표를 보고 상황을 그려내는 활동을 하게 함으로써 쌍방향의 사고 작용을 활성화시킬 수 있도록 하고 있다.

이러한 예들을 볼 때 독일의 수학 교과서의 문제는 적절한 수학적 표현을 선택하고 그를 뒷받침하는 근거를 생각하거나 상황에 적합한 다양한 예들을 찾아보거나 자료를 해석하여 미래를 예측하고 대비책을 생각해볼 수 있게 하고 있음을 알 수 있다. 이러한 개방형 문제는 특정한 답이 정해져있지 않기 때문에 학생들이 창의적이며 기발한 답을 만들어낼 수 있다. 또한 이미 답이 나왔다 하더라도 다른 답을 찾을 수도 있고, 학생들이 서로 다양한 답을 발표하고 서로 비교해볼 수도 있다. 이러한 문제들이 협동학습을 직접적으로 제시하고 있지는 않지만 수업 시간 내에 서로 답을 공유하는 기회를 가져보기에도 적절한 문제이다.

(2) 수학적 의사소통 문제

독일의 수학 교과서에서 볼 수 있는 또 다른 특징은 수학적 의사소통을 원활히 할 수 있는 문제들이 많은 것이다. 독일의 수학 교육과정에서 볼 수 있듯이 자신의 언어나 수학적 언어, 용어를 사용하여 얘기하는 것, 수학 문제를 협력하여 해결하거나 개념에 대한 협의를 이끌어 내는 것과 같은 의사소통은 중요한 수학적 능력 중 하나이다.

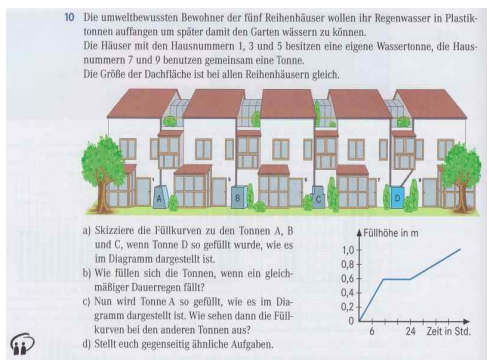
[그림 III-24]는 학생들이 8자형 코스의 모양을 보고 속도 그래프를 그린 후 서로 비교하고 다른 점을 설명해 보게 하고 있다.

[그림 III-25]는 문제 10번의 d)에서 상대방에게 비슷한 문제를 내어보게 하고 있고 왼쪽에 두 명의 사람이 그려진 아이콘이 있다. 이 문제는 서로 과제를 내고 답을 맞추는 의사소통의 활동을 유도하고 있다.



- 4. 경찰관이 운전연습을 위해 마당에 8자형 코스를 설치하였다.
- b) 생각해봐라, 8자형 코스 중 어디에서 가장 빨리 달려야 하는지, 어디에서 가장 늦게 달려야 하는지. 한 바퀴를 돌 때 속도에 대한 곡선을 스케치해보시오.
- c) 서로 그린 곡선을 비교하여라. 다른 것이 있으면 설명하고, 오류를 수정하여라. 그리고 곡선과 8자형 코스의 모양을 비교하시오.

[그림 III-24] 수학적 의사소통 문제 1(MatheNetz 7, p.118)



- 10. 환경친화주의자가 5개의 연립주택의 빗물을 플라스틱 통에 모으려한다. 1,3,5호는 자신의 물통이 있고, 7, 9호는 공동으로 물을 모은다. 지붕면의 크기는 모두 같은 연립주택이다.
- a) 오른쪽 그래프가 D 통에 물이 차오르는 곡선이라면 A, B, C는 어떻게 될지 스케치해보시오.
- b) 일정한 기간 동안 폭우가 내리면 통들은 어떻게 차게 되는가?
- c) 오른쪽 그래프가 A 통에 물이 차오르는 곡선이라면 A, B, C는 어떻게 되는가?
- d) 상대방에게 비슷한 과제를 내어보시오.

[그림 III-25] 수학적 의사소통 문제 2(MatheNetz 7, p.120)

[그림 III-26]에서는 12번 문제를 바탕으로 비슷한 문제를 만들어보게 하고 그것을 다른 친구들에게 언어로 표현하며, 그것을 전달받은 친구는 또 다른 표현인 다이어그램으로 변환해보고 있다. 이와 같은 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 이들을 변환하는 활동을 통해 의사소통 능력을 기를 수 있다. 또한 학생들이 의사소통을 하면서 수학을 읽는 것이 아닌 듣는 것이 제대로 이루어지고 있는지도 확인해볼 수 있다. 의사소통을 통해 수학적 지식을 쌓을 때는 말하는 것과 듣는 것이 모두 잘 이루어져야지만 제대로 된 학습을 할

수 있고 이를 이러한 문제를 통해서 점검할 수 있다.

12 Frau Richrath will mit ihrem Pkw zum 1,5 km entfernten Supermarkt fahren. Sie fährt langsam an, hält aber schon nach 100 m wieder und plaudert mit ihrer Nachbarin. Nach einer halben Minute startet sie erneut und fährt zügig weiter. Als ihr einfällt, dass sie ihr Geld vergessen hat, bremst sie ab, fährt rückwärts bis zur Haustür, holt ihr Portmonee und fährt mit gleichbleibender Geschwindigkeit bis zum Supermarkt. Zeichne geeignete Diagramme.

13 Erfinde eine ähnliche Geschichte wie in Übung 12 und erzähle sie deinem Nachbarn. Der Nachbar zeichnet zu der Geschichte ein Diagramm und zeigt die Zeichnung einem weiteren Mitschüler. Dieser denkt sich eine zur Zeichnung passende Geschichte aus und erzählt sie seinem Nachbarn usw. Vergleiche dann die Anfangs- mit der Endgeschichte.

12. Richrath 부인은 그녀의 차를 타고 1.5km 떨어진 슈퍼마켓을 가려한다. 100m 가다가 그녀의 이웃과 수다를 떨다가 30초 뒤에 운전을 다시 시작했다. 지갑을 놓고 와서 다시 집으로 가서 돈을 들고 일정한 속도로 슈퍼마켓으로 이동하고 있다. 속도 그래프를 그리시오.

13. 문제 12번과 비슷한 이야기를 만들고 옆 친구에게 말해보아라. 옆 친구는 그 이야기에 대한 다이어그램을 표시하고 그 표시를 가지고 다른 학생에게 주어라. 그리고 받은 표시를 가지고 이야기를 만들어냈을 때 맨 처음 이야기와 맨 나중 이야기를 비교해보시오.

[그림 III-26] 수학적 의사소통 문제 3(MatheNetz 7, p.121)

Gesamtkosten nach min (in Ct)	1	2	3
Smalltalk	2,8	5,6	
Comtel			
Tele 77			

Smalltalk ohne Anrechnung 2,8 Ct/Min.
Comtel Sekundengenaue Abrechnung!
Tele 77 Grundgebühr: 3 Euro pro Minute: 1,6 Cent
0,05 Cent pro Sekunde

a) Setze die Tabelle fort und fülle sie aus.
b) Veranschauliche deine Tabellenwerte im Koordinatensystem.
c) Entnimm deiner Tabelle und deiner Grafik, wann welcher Tarif günstiger ist.
d) Neuerdings erhebt Smalltalk eine Grundgebühr von 2,50 Euro monatlich. Was ändert sich?
e) Entwerf selbst einen Gebührentarif. Vergleiche ihn mit den Vorschlägen der anderen Gruppen. Für welche Zwecke eignen sich welche Tarife am besten?
Bearbeitet auch E2 oder E4.

- a) 위의 표를 채우세요.
- b) 이 표 값을 좌표평면에 그려보시오.
- c) 당신의 표와 그래프를 가지고 어떤 요금이가 가장 짝지 추측해보시오.
- d) 요즘에 Smalltalk 회사는 기본요금을 한 달에 2.5유로로 하고 있다. 무엇이 달라졌는가?
- e) 자기가 직접 요금을 설정하여 다른 조랑 비교해 보세요. 어떤 상황에 어떤 요금이 적합한가?

[그림 III-27] 수학적 의사소통 문제 4(MatheNetz 7, p.121)

[그림 III-27]에서는 세 통신회사의 광고 문구를 보고 요금제를 표와 그래프로 표현해보고 있다. 특징적인 것이 e)의 조별로 요금을 설정해보고 그것을 다른 조와 비교하는 것이다. 창의적이고 흥미로운 답안을 만들어보고 이를 자신의 언어로 설명해보며 다른 조의 답안을 귀 기울여 들으며 자신과는 다른 관점의 답을 생각해보 수 있다. 또한 이러한 상황 안에서 다양한 관점을 존중하고 서로의 수학 생각을 이해하며 아울러 타인을 배려하고 협력하는 긍정적인 태도, 합리적으로 의사를 결정하는 태도를 기를 수 있다.

이러한 예들을 볼 때 독일의 수학 교과서의 문제는 수학 개념을 상황으로 만들어 언어로 표현하거나, 자신의 생각을 다른 친구들에게 심사숙고하여 이야기하고, 답을 공유함으로써 자신의 활동에 대한 점검을 하게 만든다.

또한 문제를 푸는 것은 수업 상황 속에서 학생과 학생, 학생과 교사가 상호작용하며 수학을 읽고, 토론하는 것과 같다. 즉, 교사 중심의 전달식 수업이 아닌 학생이 주도적으로 자신의 수학적 지식을 공유하고, 설명함으로써 이해를 명확히 하며, 다양하고 창의적인 답이 나올 수 있음을 깨닫는 학습이 진행된다. 또한 의사소통을 통해 수학적 지식은 끊임없이 수정되고 견고해지며, 수학적 지식의 깊이 있는 이해가 가능하다. 학생들은 능동적 참여자로서 아이디어를 나누고, 학습에 적극적으로 도전하고 참여하며, 자신의 주장을 설득력 있게 전개하는 과정 속에서 수학에 대한 긍정적인 태도와 합리적인 의사 결정 태도를 기를 수 있다.

III. 결론 및 제언

본 연구는 독일의 7학년 수학 교과서 중 함수 단원에 대하여 단원구성체제, 학습 내용 및 전개 방식, 교수 학습상의 특징을 분석해 봄으로써 한국의 중학교 수학 교과서 개발에 도움을 주고자 독일의 MATHEMATIK NEUE WEGE 7, MatheNetz 7 수학 교과서를 중심으로 분석하였으며 다음과 같은 결론을 도출하였다.

독일 교과서의 특징은 첫째, 독일의 교육과정이 국가 교육과정이 아니며 각 주의 실정에 맞고 융통성 있게 교육과정을 개편하여 편성할 수 있어 자율성이 훨씬 높기 때문에 독일의 수학 교과서의 단원명이나 단원의 순서가 자유롭게 구성되었다. 둘째, 독일의 교과서는 학습 동기 유발을 위한 실제적인 문제 상황을 제시하면서 단원을 시작하여 관련된 다양한 문제들을 통해 수학적 지식과 개념을 습득하게 된다. 단원 전개가 단순하며 간결하고 수학 개념 정리 후에 다양한 문제를 제시하고 있다. 셋째, 독일의 교과서에서는 함수를 정의한 교과서도 있고, 정의하지 않은 교과서도 있지만 둘 다 두 변수에 대한 대응 관계를 갖는 여러 가지 상황들이 제시되어 있으며 이를 다양한 표현법을 써서 나타낼 수 있도록 하고 있다. 넷째, 독일의 수학 교과서는 다양한 실생활 소재를 사용하고 있다. 다양한 일상의 맥락 속에서 자료들이 갖는 함수 관계를 수학적으로 표현해보거나 미래를 예측하고 추론하는 활동을 통해 수학의 유용성을 느끼고 함수적 사고를 기르도록 하고 있다. 또한 생물학, 화학, 의학 등과 연관이 있는 문제를 제공하여 다른 학문과의 연결성을 높였으며 이로써 학생이 수학에 대한 중요성과 가치를 느낄 수 있도록 하고 있으며, 수학 학습에 대한 관심과 흥미를 높이는 계기를 만들고자 하였다. 다섯째, 독일의 수학 교과서는 다양한 함수적 상황을 그래프로 묘사해보고 그래프가 갖고 있는 특징이나 정보들을 해석해 내는 것에 더욱 초점을 맞추고 있다. 또한 함수에 대하여 정의하기 이전에 다양한 그래프를 예로 들어 두 변수 간의 어떠한 관계가 있음을 직관적으로 알게 하고 있다. 여섯째, 독일의 수학 교과서에는 개방형 문제, 수학적 의사소통이 필요한 문제들이 포함되어 있다. 답이 정해져있지 않고 학생들이 창의적이고 기발한 답을 구안할 수 있으며, 자신의 추론 과정이 옳은지 비판적으로 평가하고 반성할 기회를 가지는 문제, 또 생활 주변이나 사회 현상 등의 다양한 맥락 안에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구할 수 있는 문제와 수학적 지식, 기능, 경험을 연결하여 실생활의 문제를 해결할 방법을 모색하는 문제와 같은 개방형 문제들이 포함되어 있었다. 또한 친구들과 생각을 공유하면서 자신의 지식을 견고히 하고 수학적 개념을 다듬는 기회를 갖는 문제, 자신의 수학적 아이디어를 언어, 기호, 표, 그래프를 사용하여 나타내고 이를 또 다른 방법으로 변환하는 문제, 다양한 관점으로 해결할 수 있고 상대방을 존중하는 태도를 기를 수 있는 수학적 의사소통 능력을 키우는 문제들이 있었다.

이와 같은 본 연구의 결론을 통해 우리나라 교과서 개발에 대한 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 우리나라 교과서 제작의 자율성 확대 부분에서 그 효율성과 가능성에 대해 고민해 볼 필요가 있다. 우리나라의 교육과정에서는 수학 내용의 영역 및 용어와 기호, 교수 학습상의 유의점까지 제시되어 있고, 거의 모든 교과서에서 교육과정 지침에 따라 그 내용과 구성이 거의 동일하다. 반면, 독일은 교과서마다 교육 내용과 다루는 방식이 다양한 점에 미루어 학습자의 다양한 수준을 고려할 수 있을 것으로 보인다. 따라서 우리나라에서도 다양한 수준과 내용의 교과서 제작과 학교에서의 활용이 학생들에게 어떠한 영향을 미치는지 보다 면밀한 연구를 수행해볼 필요가 있다.

둘째, 교과서의 예제나 문제들이 더욱 실생활과 관련된 예들로 구성되어야 한다. 수학이 현실세계의 문제를 해결하는데 중요한 기초가 되며 다른 학문과도 연계성이 높아 유용하게 활용된다는 것을 교과서를 통해 느낄 수 있다면 수학에 대해 긍정적인 태도를 갖게 될 것이다.

셋째, 그래프 해석과 그래프를 그려보는 교수학습 활동을 강조할 필요가 있다. 간단한 일차함수나 정비례 관계를 예를 들어 그래프를 그리기보다 다양한 함수 상황을 제공하여 현실 상황을 그래프로 그리게 하고 그것이

갖는 정보를 잘 해석하는 것이 함수적 사고를 키우는데 중요하다. 교과서 안에 다양한 그래프의 예를 보여주고, 그려보게 하는 활동이 많아져야 한다.

넷째, 교과서에 개방형 문제, 수학적 의사소통을 유발하는 문제가 많아야 한다. 우리나라 2015 개정 교육과정에서 강조하고 있는 문제 해결 능력, 추론 능력, 창의·융합 능력, 의사소통 능력을 기를 수 있는 방법 중 하나가 개방형 문제와 수학적 의사소통 문제를 많이 접해보는 것이다. 함수에 대한 정의를 배우고 알맞은 함수식을 찾거나 함수값을 계산하여 답안지에 답과 맞춰보는 단답형 문제를 지양하고, 답안지가 필요 없이 참신한 아이디어를 요구하는 문제, 문제를 푸는 것이 지식을 공유하는 과정이 그 자체가 되는 문제들이 교과서에 충분히 수록되어, 수업 상황에서 교사가 활용할 수 있도록 해야 한다.

참 고 문 헌

- 교육부(2015). 수학과 교육과정 (교육부 고시 제2015-74호 별책 8). 세종: 교육부
- The Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum*. Se Jong: The Ministry of Education.
- 교육인적자원부(2008). 고등학교 수학과 교육과정 해설.
- The Ministry of Education (2008). *National Curriculum Guide of High School Mathematics*.
- 김다예(2014). 2009 개정 중 1 교과서 분석을 통한 함수의 그래프 지도의 문제점과 개선 방안, 한양대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- Kim, D. Y. (2014). *An analysis of 2009 middle school mathematics texts in their presentation of graphs of functions. - The drawbacks and proposal of ways of improving*. MA.Thesis. Graduate School of Education, HanYang University.
- 김보경, 권성룡(2010). 개방형 문제를 활용한 수준별 학습이 학업성취도에 미치는 영향. 한국초등수학교육학회지, **14(3)**, 907-935.
- Kim, B. K. & Kwon, S. (2010). An Influence of Using Open-ended Problems in Ability-Level Activities on Academic Achievement of Mathematics. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **14(3)**, 907-935.
- 김혜윤(2015). 수학과 핵심역량에 관한 연구-중학교 수학을 중심으로. 성균관대학교 박사학위 논문.
- Kim, H. Y. (2015). *A Study of Mathematics Key Competencies-Focused on Middle School Mathematics*. Doctoral Dissertation, SungKyunKwan University.
- 노정학, 양춘우, 정환욱(2003). 한국과 독일의 중등학교 수학교과서 비교 연구- 중학교 대수 영역을 중심으로-. 한국수학교육학회지, **42(3)**, 275-294.
- Lau, J. H., Yang, C., & Jung, H. (2003). A Study on the Comparision of Middle School Mathematics Textbooks in Korea and Germany-Focused on the Area of Algebra-. *The Mathematical Education*, **42(3)**, 275-294.
- 안은경(2010). 한국과 독일의 중학교 수학교과서 비교연구- 함수단원을 중심으로-. 성균관대학교 석사학위 논문.
- Ahn, E. K. (2010). *A ComparativeanalysisofMiddleSchoolMathematics Textbooks in Korea and Germany - focusedontheareeofFunction-*. MA.Thesis.. Graduate School of Education, SungKyunKwan University.
- 이정은(2011). 한국과 캐나다의 중학교 수학 교과서 비교 연구- 온주 9~10학년 함수를 중심으로-. 건국대학교 석사학위 논문.
- Lee, J. E. (2011). *A ComparativeanalysisofMiddleSchool Mathematics Textbooks in Korea and Canada*. MA.Thesis.. Graduate School of Education, KonKuk University.
- 정두리(2014). 이차함수에 대한 중학교 3학년 학생들의 오개념과 오개념 처치를 위한 교수방법 제안. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

- Jung, D. (2014). *Misconception about Quadratic Function and Proposal about Teaching Method for Treating the Misconception*. MA.Thesis. Graduate School of Education, Ewha Womans University.
- 한국교과서연구재단(2012). 유럽 주요국의 교과서 제도 비교 및 정책 동향 분석 연구. 73.
- Korea Textbook Research Foundation (2012). *A Comparative Study on School Textbook System between Europe*. 73.
- 한국교육과정평가원(2012). 2012 교육과정·교육평가 국제동향 연구: 독일·러시아·영국·프랑스·핀란드. 42.
- Korea Institute for Curriculum and Education (2012). *ORM2012-115-4*. 42.
- 허난, 안은경, 고호경(2011). 한국과 독일의 중학교 수학 교과서 분석을 통한 함수 내용 비교. 대한수학교육학회지, 13(2), 323-343.
- Huh, N., Aha, E. K., & Ko, H. K. (2011). Comparative Analysis of the Contents of Functions in the Middle School Mathematics Textbooks in Korea and Germany. *School Mathematics*, 13(2), 323-343
- Arno Lergenmüller et al.(2014). *MATHEMATIK NEUE WEGE 7*, Schroedel.
- Berlin Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport(2006). *Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I - Mathematik*. http://www.berlin.de/imperia/md/content/sen-bildung/schulorganisation/lehrplaene/sek1_mathematik.pdf
- Stöber, G. (2010). *Schubuchzulassung in Deutschland: Grundlagen, Verfahrensweisen und Diskussionen*, Eckert.Beriträge.
- Jutta Cukrowicz et al.(2007). *MatheNetz 7, westermann*.

Analysis of Year 7 Mathematics Textbook for Function Area in Germany

Gong, Seo Young

Hyowon High School
E-mail : syoung030@hanmail.net

Ko, Ho Kyoung

Department of Mathematics Graduate School of Education
Ajou University
E-mail : kohoh@ajou.ac.kr

Huh, Nan[†]

Department of Mathematics Graduate School of Education
Kyonggi University
E-mail : huhnan@kyonggi.ac.kr

The purpose of this study is to suggest the directions for the development and improvement of mathematics textbooks in Korea by examining these characteristics of German textbooks. As a result, German mathematics textbooks were free for unit order and names of units. German mathematics textbooks defined a function for various real life and natural phenomena, relation after intuitively knowing the correspondence between two variables through a graph. In addition, it exercises interpreting the characteristics and information of the graph, guides the activity of graphing various functional situations, and contents to convert various expression methods such as graphs, tables, relational expressions, mathematical terms and sentences. In the German mathematics textbooks, mathematical expressions of the functional relations of the materials in various contexts of daily life, and the activities of predicting and predicting the future, were made to feel the usefulness of mathematics. It has raised functional thinking and provided problems related to other subjects, thus enhancing connectivity with other disciplines. It also included open issues and issues that required mathematical communication.

* ZDM Classification : U23

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20

* Key Words : German mathematics textbooks, introduction of function, real life problem, graph analysis, open-ended problem, mathematical communication

[†] Corresponding author