

디지털 시대의 대학수학교육: 선형대수학을 중심으로

이 상 구 (성균관대학교)
이 재 화 (성균관대학교)[†]
박 경 은 (성균관대학교)

본 연구는 디지털 시대의 대학수학교육이라는 주제로, 21세기 디지털 교육환경에서 한국에 적합한 대학수학교육 강좌를 어떻게 구성하고 운영할 수 있는지에 대한 것이다. 21세기 디지털 시대의 교육 환경은 수학 교수·학습 방법의 변화 뿐 아니라 수학교육에 대한 인식과 철학의 변화에도 지대한 영향을 주고 있다. 본 연구진은 디지털 환경에 적합한 대학수학교육이란 디지털과 첨단 모바일/인터넷 환경을 강의에 적절히 반영하고 이 과정에서 학생이 스스로 학습과정에 참여하도록 안내하는 교육이라고 판단하였다. 따라서 본 연구진은 디지털 시대의 대학수학교육을 위하여 첫째, 다양한 웹 링크와 시뮬레이션 및 계산이 가능한 코드를 갖춘 실습실을 개발하여 강의에 활용함으로써 학생들이 언제 어디서든 실시간으로 실습이 가능하고 둘째, 계산된 결과를 LMS를 통해 동료 및 교수자와 함께 질의 응답·토론하여 개념에 대해 깊게 이해하고 설명할 수 있으며 마지막으로 LMS에서 이루어지는 모든 과정을 평가에 지속적으로 반영하여 학생들이 자신의 학습과정과 문제해결과정을 서술하고 발표하면서 비판적 사고 능력을 자연스럽게 갖추어야 한다는 교수·학습 방향을 제안하였다. 더불어 디지털 교육환경에 가장 적합한 수학강좌 중 하나인 ‘선형대수학’ 강좌에 무료 디지털 전자 교과서와 콘텐츠를 갖추고 연구진이 제안한 방향에 따른 교수·학습 모형과 대학 선형대수학강좌 운영에 대한 구체적인 방법을 제시하였다.

I. 서론

21세기 디지털과 첨단 모바일/인터넷 시대의 도래로 교육환경이 이전보다 훨씬 빠르게 변화하고 있으며, 교육 방식도 그에 따라 점차 변화하고 있다. 예를 들어, 대학에서 이제껏 많은 부분을 차지하던 판서 강의는 인터넷에 접속 가능한 전자교과에서 이루어지는 ppt, pdf, hwp, doc, html 형식의 전자 강의록, 터치스크린 모니터, 빔 프로젝터 등을 활용한 강의로 대체되고 있다. 그리고 우리나라 대부분의 대학은 이미 예습·질문·토론·과제 제출 등이 가능하며 녹화된 강의를 다시 볼 수 있는 학습관리 시스템(Learning Management System, LMS)을 갖추고 있다. 현재는 이보다 더 나아가 대학수준의 우수한 교재와 강좌를 인터넷을 통해 누구나 쉽게 접근할 수 있도록 점점 공개하고 있는 추세이다. 예를 들어, 현대자동차 정몽구 재단¹⁾은 ‘공유와 협력의 교과서 만들기 운동본부²⁾와 함께 기초학문 분야 교양 전자책(e-book)인 <온드림 빅북> 시리즈를 제작하여 누구나 무료로 다운

* 접수일(2017년 8월 4일), 심사(수정)일(2017년 9월 18일), 게재 확정일(2017년 9월 25일)

* ZDM 분류 : U25, U75

* MSC2000 분류 : 97U20, 97U70

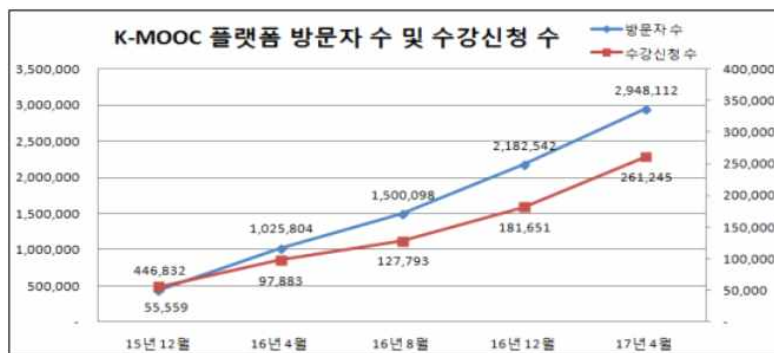
* 주제어 : 디지털 시대, 수학, 인터넷, 선형대수학, 대학수학교육

* 이 논문은 2017년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No.2017RID1A1B03035865).

[†]교신저자 : jhlee2chn@skku.edu

1) 현대자동차 정몽구 재단 <http://www.hyundai-cmkfoundation.org/magazine/getMagazineSub.do?idx=5&subIdx=138>

로드 받아 사용할 수 있게 하였다. 그리고 한국형 대규모 온라인 공개강좌(Korea Massive Open On-line Course, K-MOOC)³⁾는 대학의 우수한 강좌를 인터넷을 통해 일반 국민에게 무료로 공개하여 국민의 평생학습과 다양한 학습 요구에 부응하는 것은 물론 고등교육의 혁신에 기여하고 있다. 그 결과, 2015년 10월 서비스 개통 이후 사이트 방문자가 약 295만 명, 수강신청자가 약 26만 명(2017년 4월 30일 기준)으로 학습자의 관심이 지속적으로 증가하고 있다([그림 I-1] 참조).⁴⁾ 해외의 경우, 디지털 환경과 첨단 모바일/인터넷 기술을 반영한 다양한 교육 방식이 이미 존재한다. 예를 들어, 학습자는 구글(Google) 검색과 유튜브(youtube)에 업로드 된 강의로도 대부분 원하는 학습을 할 수 있으며, 심지어 대규모 공개 온라인 강의(Massive Open On-line Course, MOOC) 인기 기업인 코세라(coursera)⁵⁾, 대표적인 온라인 대학인 피닉스 대학⁶⁾, 캠퍼스가 없이 온라인만을 통해 강의를 진행하는 미네르바 대학⁷⁾ 등으로부터 전문 지식에 대한 강의를 들을 수 있다. 이러한 변화는 디지털 시대와 맞물려 스마트폰을 포함한 모바일 기기를 적극적으로 교육과 생활에 활용하는 신인류를 지칭하는 이른바 포노 사피엔스(Phono Sapiens)⁸⁾⁹⁾로 다시 태어난 우리 학생들의 수요를 반영한 결과라고 말할 수 있을 것이다.



[그림 I-1] K-MOOC 플랫폼 방문자 수 및 수강신청 수(교육부)

이렇듯 21세기 디지털 교육환경은 교수자와 학생들이 이전과 완전히 다른 교수 학습을 시도하도록 요구하고 있다. 그러면 디지털 시대의 대학수학교육은 구체적으로 어떻게 변해야 할까? 이 질문과 관련하여 본 연구진은 다음을 주목하면서, 21세기 디지털 교육환경에 적합한 수학교육에 대하여 고려해야 하는 몇 가지 방향성을 제시하였다.

- ① 홍남석 한국대학신문 대표이사는 구글의 미래학자 레이 커즈와일(Ray Kurzweil)이 예언한 ‘2045년까지 일 어날 일들’을 소개하며 “반복학습으로 기억을 심는 과거의 교육방식은 사라지고 즉시적 지식정보에 의한 학습으로 대체될 것”이라고 예측했다. 또 “AI(인공지능)와 VR(가상현실), 빅데이터 등 4차 산업혁명의 혁신 기술이 교육과 접목을 시도하고 있는 가운데 새로운 형태의 교육방식이 등장하고 있으며, 소규모 그룹

2) 공유와 협력의 교과서 만들기 운동본부 <http://www.bigbook.or.kr/>

3) K-MOOC 온라인 공개강좌 <http://www.kmooc.kr/>

4) <http://news.unn.net/news/articleView.html?idxno=173614>

5) 코세라 <https://www.coursera.org/>

6) 피닉스(온라인) 대학 <http://www.phoenix.edu/>

7) 미네르바 대학 <https://www.minerva.kgi.edu>

8) <http://www.sciencetimes.co.kr/?news=포노사피엔스시대의도래>

9) 포노사피엔스 <http://www.sedaily.com/NewsView/1L03OD0ITW#cb>

으로 토론과 거꾸로 학습(flipped learning)을 진행하여 입체적 사고를 유도하는 교육 모델은 ‘교육이 학습으로 진화하고 있음’을 단적으로 보여주는 예”라고 강조한 바 있다.¹⁰⁾

- ② 올프램 연구소장인 콘라드 올프램(Conrad Wolfram)은 학생들이 코딩(coding)을 통해 실제 문제를 해결함으로써 수학의 필요를 느끼고 수학의 개념적 원리를 이해해야 한다고 언급하였다.¹¹⁾
- ③ 박경은·이상구(2015)는 “학습한 수학 내용을 알고리즘과 코딩 그리고 컴퓨팅 기기를 활용한 시각화를 통하여 직관적으로 이해하고 (명령어를 추가로 학습하는 긴 과정 없이) 즉시 실습한 후 제공된 알고리즘을 파악하여 주어진 함수 또는 조건에 해당하는 부분을 고쳐가면서 시뮬레이션을 해보며, 자신의 문제를 해결해 나가는 데 사용할 수 있어야 한다”고 하였다.

따라서 본 연구진은 디지털 시대의 대학수학교육을

- ① 교수자는 디지털과 첨단 모바일/인터넷 환경을 기반으로 강의에 다양한 자원(웹 링크, 시뮬레이션 및 계산이 가능한 코드를 갖춘 실습실)을 충분히 활용하여 온/오프라인 수업을 진행하며, 강의 및 실습 내용을 녹화하여 언제든지 다시 볼 수 있도록 제공한다.
- ② 학습자는 강의 내용 중 이해가 안 된 부분들을 녹화된 동영상을 이용하여 반복 학습하며, 관련된 예제/문제 풀이과정을 이해하고 새로운 유사문제를 풀어본 뒤 준비된 코드를 활용하여 직접적이고 즉시적으로 답을 확인한다. 또한 연구문제나 현실문제와 같은 확장된 문제에 대해 손/도구/코드 등을 다양하게 이용하여 해결하면서 어떤 문제를 풀 수 있다는 자신감을 확보하며, 계산된 결과를 수학적이고 논리적으로 검증한다.
- ③ 이런 과정에서 학습자는 동료 및 교수자와 함께 수학의 개념적 원리에 대하여 질문하고 답하고 토론하며, 자신의 학습 과정과 문제해결 과정을 서술하고 발표하는 기회를 통해 비판적 사고 능력을 키운다.

로 정의하고, 이에 따라 대학수학을 가르치는 전 과정을 개발하고 직접 실행해보면서 수년에 걸쳐 구체적인 모델을 만들어왔다. 이에 본 논문에서는 먼저 디지털 시대의 수학교육 환경 변화에 따른 교수·학습 방향의 변화를 살펴보고, 디지털 교육환경에 가장 적합한 강좌 중 하나인 ‘선형대수학’을 중심으로 디지털 시대의 대학수학교육을 위한 한 가지 모델을 제시한다. 그리고 디지털 교육에서 가장 취약할 수 있는 평가 부분에 대한 의견도 함께 제시한다.

II. 본론

1. 디지털 시대의 수학교육 환경과 교수·학습의 변화

2000년 이전까지 수학교육의 과정은 수학자가 수학을 창조하고, 수학철학자나 수학교육자가 창조과정을 연구하여 학교교육에서 어떻게 활용가능할지를 연구하는 일방적(one-way)인 흐름이었다. 그리고 대부분의 수학교사

¹⁰⁾ <https://www.labortoday.co.kr/news/articleView.html?idxno=173661>

¹¹⁾ <https://www.theguardian.com/education/2014/feb/23/math-teaching-revolution-needed-conrad-wolfram>

들은 자신의 경험과 능력을 이용해 가르치는 수학의 범위와 방법을 몇 번씩 수정하여 학교교육에 활용하고, 학생들은 자신의 수학적 감각에 의지해서 수학을 학습하였다. 그러나 2000년대 이후 인터넷의 등장으로 누구나 수학 자료들에 쉽게 접근할 수 있게 되었고, 학술적 창조물과 아마추어가 쓴 글을 함께 활용할 수 있으며, 공동작업의 결과물과 개인의 결과물이 공존할 수 있게 되었다. 따라서 더 이상 수학자나 수리철학자가 수학적 정보나 지식을 발견하고 정리하며 학습자가 수학을 일방적으로 학습만하는 것이 아니라, 수학에 관심이 있는 사람은 누구라도, 나이와 관계없이, 충분히 노력만 하면, 자기 스스로 수학을 이해하고 학습할 수 있다(Lawrence, 2014). 이러한 환경에서는 각 개인에게 적합한 수학 학습을 위한 다양한 교육과정과 학습과정이 가능하며, 교재, 강의록, 동영상 강의, 참고자료를 포함한 다양한 종류의 학습 자료를 무료로, 유료로 그리고 온라인 구독 등의 방법으로 여러 사이트에서 제공할 수 있다.

이러한 교육환경의 변화와 함께 수학 교수·학습 방법도 점차 바뀌고 있다. 예를 들어, 웹사이트에 수학콘텐츠를 업로드하고, 교사와 학생들이 그 교육 자료를 활용하는 과정을 데이터로 저장하여 분석하면서 관련 수학적 개념과 문제해결력 등 인식 수준의 성과를 교사 추적 및 학생 추적을 통하여 분석한 후 피드백을 줄 수 있다. 실제로 현재 S대학교의 LMS인 I-campus의 경우 학생들의 모든 기록(로그접속 기록, 온라인 출석, 학습 참여 현황, 과제 제출여부 등)을 교수자가 직접 확인할 수 있고 그에 따라 피드백을 주거나 성적을 부여하고 있다. 지금은 과거와 달리 국제학생평가프로그램(Programme for International Student Assessment, PISA) 또는 수학·과학 성취도 추이변화 국제비교 연구(Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS) 등의 수학적 능력 평가를 통해 국제적으로 비교가 가능하며 각 지역별로도 교육청 평가 등을 통하여 분석할 수 있는 데이터가 풍부해져, 교수자는 이런 데이터들을 활용하여 학습자의 장점은 더욱 발전시키고 단점은 보강할 수 있는 다양한 가능성을 열어두게 되었다. 실제로 국제선형대수학회(International Linear Algebra Society, ILAS)는 지난 20여 년간 수시로 선형대수학 교육 세션(session)을 개설하여 스트랭(Gilbert Strang), 레이(David Lay), 레온(Steven Leon) 교수 등 가장 잘 알려진 선형대수학 교재 저자들을 포함, 세계 각국의 선형대수학 전문가들을 초청하여 발표 및 토론을 하면서 국제비교를 통해 선형대수학 교육의 혁신을 통하여, 단점을 보강하고 장점을 확산하는 노력을 해왔다. 또한 미국수학회 연합학술회의(Joint Mathematics Meetings, JMM)에서 Innovative and Effective Ways to Teach Linear Algebra 세션을 통하여도 같은 노력을 해왔다. 따라서 학습자에게 동기를 부여하기 위해 활용 가능한 교육환경, 예를 들어 시각적 이해를 포함한 다양한 시도를 통하여 학생들이 좀 더 깊이 수학적 개념을 이해하고, 실제 문제해결능력을 갖추어 수학을 일상생활의 문제와 연결하여 해결하는 등 학습자 자신의 내재적 동기를 키우게 된다(Pink, 2011; Mitra, 2015). 특히 최근 수학교육에서 관심을 갖고 지속적으로 연구되는 혼합형 학습(blended learning), 동기유발을 유도하는 수준별 수업 그리고 4차 산업혁명에서 강조하는 데이터를 이용한 코딩교육 등은 모두 디지털 환경에서 그 활용가치가 더욱 부각되고 있다(NCSM, 2015).

보통 디지털 교육 환경이라 하면 앞서 언급했듯이 인터넷에 접속 가능한 전자교탁에서 이루어지는 전자 강의록, 터치스크린 모니터, 빔 프로젝터 등을 활용한 강의나 LMS 환경을 떠올리기 쉽다. 그러나 본 연구진이 생각하는 디지털 교육 환경이란, 이보다 한발 더 나아가, 가용한 자원을 충분히 활용하여 교수자와 학생들 모두 디지털 환경을 누릴 수 있도록 하는 것이다. 예를 들어, 교수자가 강의한 내용을 녹화하여 언제든지 다시 볼 수 있어야 하고, 전산실에서 이루어지던 실습을 PC 또는 모바일 기기에서 어떤 제약도 없이 할 수 있도록 사이버 실습실 등이 있어야 하며, 이를 적절히 반영한 디지털 교과서도 필요하다. 또한 LMS를 통해 예습·질문·토론·과제가 가능하며, 교수자는 학생들의 온/오프라인 출석과 학습활동, 기말고사 등을 LMS 상의 기록을 바탕으로 평가할 수 있어야 한다. 즉 모든 과정이 디지털로 이루어질 수 있어야 한다. 다음 절에서는 선형대수학을 중심으로 디지털 시대의 환경에 적합한 새로운 대학수학교육의 구체적인 모델을 제시한다.

2. 디지털 시대의 대학수학교육

디지털 시대의 대학수학교육은 기존의 수학교육과 많은 부분에서 차이가 있다. 다음의 [표 II-1]은 기존의 수학교육과 본 연구진이 제시하고자 하는 21세기 수학교육 모델을 비교한 것이다.

[표 II-1] 기존의 수학교육과 21세기 수학교육 모델 비교

항목	기존의 수학교육 모델	본 연구진이 제안하는 21세기 수학교육 모델
교재	종이(서책형) 교과서	전자책(e-book), 웹 링크 코딩 · 시뮬레이션 · 계산 기능 등이 자유로운 디지털 교과서
실습실	PC가 설치된 전산실	Wi-Fi가 가능한 모든 장소, 본인의 노트북 · 태블릿 · 스마트폰 등을 기자재로 이용
강의실 / 강의	칠판이 있는 강의실 / 판서로 강의	인터넷 PC와 스크린 및 칠판이 있는 강의실 / 인터넷 자료와 클라우드 컴퓨팅을 통한 시뮬레이션 및 수학계산 과정이 포함된 강의(녹화하여 언제든지 다시 볼 수 있으며 학생과 공유 가능)
학습활동	교과서의 과제풀이 / 조교(TA)의 튜터링	디지털 교과서와 LMS를 활용하여 예습 · 질문 · 토론 · 과제 모두를 포함한 과제풀이 / 개인별로 자신의 학습기록을 모아 PBL 보고서로 작성 · 제출 및 발표
평가	출석 · 과제 · 지필고사 합산	온/오프라인 출석 · 디지털활동참여 · 지필고사 · PBL보고서 등 모든 활동의 결과물에 가중치를 주어 합산

[표 II-1]에 따르면, 21세기 수학교육에서는

- ① 종이 교과서가 웹 링크, 코드, 시뮬레이션 및 계산기능이 가능한 디지털 교과서인 전자책(e-book)으로 바뀌면서 교사가 칠판 위에 판서하는 대신 인터넷이 접속 가능한 PC와 스크린이 있는 강의실에서 인터넷 자료와 클라우드 컴퓨팅을 통한 시뮬레이션 및 수학계산을 학생과 공유하며, 수업과정을 즉시 녹화하여 언제든지 다시 볼 수 있도록 제공한다.
- ② 과제나 조교(TA)의 튜터링에 의존했던 기존의 학습활동에서 벗어나, 디지털 교과서와 LMS를 활용한 예습 · 질문 · 토론 · 과제가 가능하며, 개인별 학습기록을 모아 프로젝트 기반 학습(Project-Based Learning, PBL) 보고서를 제출 및 발표하고 이 중 일부는 중간 및 기말고사에 반영하는 등의 다양한 방식이 이용된다.
- ③ 평가는 출석이나 과제 그리고 지필고사를 위주로 했던 환경에서 온/오프라인 출석과 디지털활동참여, 지필고사, PBL 보고서 점수 등 학생들이 참석하는 모든 활동에 가중치를 주어 합산하여 학생들이 학습과정(learning process)에 주인으로 참여하도록 돕는다. 더불어 수학에 대한 실습이 PC가 설치된 전산실에서만 이루어졌던 과거와 다르게 무선 데이터 전송 시스템(Wi-Fi)이 가능한 모든 장소가 실습실이 되고 학생들

은 본인이 가지고 있는 노트북 컴퓨터나 태블릿 또는 스마트폰 등이 기자재가 될 수 있어, 시간과 장소의 구애를 받지 않는다.

현재 우리나라 대부분의 대학에서는 본 연구진이 제안하는 모델을 시행할 교육환경은 이미 갖추어져 있다고 볼 수 있다. 그러나 여전히 많은 대학에서 기존의 수학교육 방식을 따르는 이유는 디지털 환경을 적절히 활용한 강의를 위해 준비해야 할 내용들을 선별하고 개발하는 데 시간이 많이 걸리고, 특히 학생들을 학습에 참여하도록 유도하는 것과 이것을 평가에 어떻게 반영할 지 명료한 방향을 잡는 데 어려움을 겪고 있기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 이러한 현실적인 측면을 고려하여 누구라도 시도할 수 있는 디지털 시대의 효과적인 대학수학교육 모델을 제시하려 한다. 그리고 현재 S대학교에서 활용되고 있는 선형대수학 강의¹²⁾를 구체적인 모델로 선정하여 무료 전자교재와 강의록뿐만 아니라 선형대수학 교수 학습 전 과정(whole process)과 평가과정 그리고 평가결과에 대한 활용 등의 경험을 공유하고자 한다. 본 연구진에 의해 개발되고 진행된 모든 결과물은 학생중심교수법의 수업포트폴리오에 정리되어 공유되고 있으며, 포트폴리오의 자세한 사항은 각주의 웹 사이트¹³⁾에서 확인할 수 있다.

이때, 본 연구진이 선형대수학을 연구대상 과목으로 선택한 이유를 잠시 언급하려 한다. 본 연구진은 이미 미분적분학, 공학수학, 기초통계학 및 선형대수학 교육을 위해 SageMath¹⁴⁾와 RStudio¹⁵⁾ 등의 오픈소스 소프트웨어를 활용하여 웹 콘텐츠와 모바일 콘텐츠 및 계산도구가 포함된 실습실¹⁶⁾을 개발하였으며(고래영 외, 2009; 김경원·이상구, 2013; 이상구·이재화·김경원, 2013; 이상구·장지은·김경원, 2013; 이상구 외, 2015; 이상구 외, 2016), 이 중 필요한 기능은 모두 관련 교재에 반영하여 실제 수업에 적용해왔다. 그런데 본 논문에서 선형대수학을 중심으로 서술한 이유는 최근 IBM의 연구원 스피크맨(Skyler Speakman)이 강조한 것처럼, “선형대수학은 21세기의 수학”으로 여겨지는 중요한 수학과목이기 때문이다.¹⁷⁾ 즉, 21세기 4차 산업혁명의 시기에 많은 인력을 필요로 하는 빅데이터 산업과 머신러닝, 최적화의 모든 분야에서 선형대수학의 필수 개념, 구체적으로는 고유값과 고유벡터, LU 분해, 대칭행렬과 행렬의 대각화, QR 분해, 특이값 분해(Singular Value Decomposition, SVD), 행렬의 스펙트럴 분해(Spectral decomposition), 주성분 분석(Principal Component Analysis, PCA), 벡터공간과 노름(Norm) 등이 사용되며, 이런 내용을 효과적으로 전달하기 위해서는 기존의 판서와 지필교육에서 벗어나 이론과 함께 알고리즘과 코딩에 대한 학습이 동시에 가능해야 한다. 그러므로 21세기의 수학이라고 불리는 선형대수학은 21세기 디지털교육환경을 활용하여 교육되는 것이 지극히 타당하다.

이제 디지털 환경에 맞춘 선형대수학 강의 운영과정을 강의 준비, 교수·학습 및 학생 활동, 평가 부분으로 나누어 살펴보자.

¹²⁾ <http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/>

¹³⁾ <부록>의 [2 학생중심교수법 수업 포트폴리오 웹 사이트]에도 있음. <http://matrix.skku.ac.kr/2017-LA-portfolio-sglee/>

¹⁴⁾ 오픈소스 무료 공학도구 <http://www.sagemath.org/>

¹⁵⁾ 통계용 R 언어 오픈소스 무료 도구 <https://www.r-project.org/>

¹⁶⁾ 미적분학 <http://matrix.skku.ac.kr/Lab-Book/Sage-Lab-Manual-1.htm> 공학수학 <http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/>

통계 <http://matrix.skku.ac.kr/2015-R-Statistics/R-Sage-Statistics-Lab-1.htm>

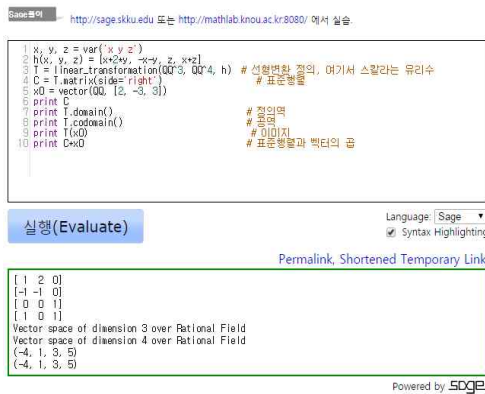
<http://matrix.skku.ac.kr/2015-R-Statistics/R-Sage-Statistics-Lab-2.htm>

선형대수학 <http://matrix.skku.ac.kr/Lab-Book/Sage-Lab-Manual-2.htm>

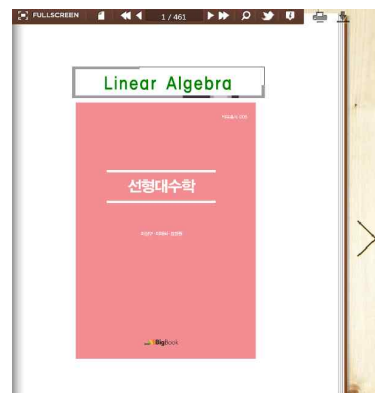
¹⁷⁾ <http://datascience.ibm.com/blog/the-mathematics-of-machine-learning/>

2.1 강의 준비(교재, 강의록, 실습실)

S대학교의 디지털 선형대수학 강의는 인터넷이 연결되는 환경이라면 언제 어디서든 누구나 선형대수학을 학습하고 실습할 수 있도록 설계되어 있다. 본 강의는 20년 이상 선형대수학을 강의한 전문 교수진에 의해 모든 내용이 순서적이고 체계적으로 나열되어 있으며, 선형대수학에 대한 기초가 전문한 초보자도 유명 교수자의 노하우(Know-How)를 그대로 습득할 수 있도록 구성되었다. 그리고 이공계 학생들의 선형대수학 실습이 직접적으로 가능하도록 인터넷 오픈 소스 SageMath를 활용한 실습이 함께 설계되어 있다([그림 II-1] 참조). 또한 전체 내용을 무료 디지털 교과서([그림 II-2] 참조)로 제작(국문 및 영문)¹⁸⁾하여 언제 어디서든 누구나 선형대수학을 공부할 때 활용할 수 있도록 제공하고 있다(이상구 · 이재화 · 김경원, 2014).



[그림 II-1] SageMath 실습화면



[그림 II-2] 선형대수학 교재(국문)

디지털 선형대수학 강의는 16주차(15주차 + 1주차 기말고사) 일정으로 일반 대학에서 학습하는 과정과 동일하게 진행된다([그림 II-3] 참조). 물론 복잡한 계산을 최소화하고 응용의 대부분을 읽을거리로 제공한다면 K-MOOC 또는 평생교육 과정에 적합하도록 10주차로도 유연하게 편성할 수 있다.¹⁹⁾ 그리고 필요한 일부분의 내용만 학습하길 원하는 학생 또는 교양과목으로 수강하고자 하는 학생에게도 이론 강의와 함께 질문과 답변을 통해 과제를 풀어 제출하고 실습하게 한 후, 응용부분과 읽을거리 등을 읽도록 하면 선형대수학의 전반적인 내용을 이해하는 데 도움을 줄 수 있다.

본 강의는 각 주차마다 선형대수학 지식을 정리한 '선형대수학 정의집', 'Linear Algebra Definitions'와 외부에서 이미 인정받아 교수 학습을 함께 공유할 수 있는 선형대수학 강의인 'KOCW Matrix Theory'를 공개된 자료(Published Data)로 준비하여 클릭하면 해당 웹사이트로 접속할 수 있게 하였다. 그리고 각 주차의 각 절에는 본 연구자가 직접 제작하여 이미 외부에서 누구나 쉽게 교수 학습에 활용할 수 있는 절별 "동영상 강의"를 연결해 놓았으며, 관련 수학자나 수학사적 내용을 연구자가 직접 제작한 자료나 위키피디아(wikipedia)로 연결시켜 바로 찾아 확인할 수 있도록 설계하였다([그림 II-4] 참조)²⁰⁾.

18) (국문) <http://ibook.skku.edu/Viewer/LA-Textbook> (영문) <http://ibook.skku.edu/Viewer/LA-Text-Eng>

19) 10주용 K-MOOC 선형대수학 강의록 <http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/>

20) 본 연구에서 직접적으로 활용한 교수-학습 과정의 사이버 랩 연결 주소들은 <부록>에서 확인할 수 있다.



[그림 II-3] 선형대수학 실습실(<http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/>)



[그림 II-4] 각 주차별 화면 일부 (8주차 예시화면)

2.2 교수·학습 및 학생 활동

본 연구에서 활용한 디지털 선형대수학 강의의 한 학기 분량에 대한 수업주제와 주요 학생활동은 [표 II-2]와 같다. 관련된 자세한 수업계획서는 각 주의 웹 사이트 주소²¹⁾에서 확인할 수 있다.

본 연구진의 디지털 선형대수학 강좌에서는 강의뿐 아니라 효율적인 교재와 사이버실습실을 한 번에 구현하기 위해 ‘정의-문제-정리-컴퓨터 실습’ 모두를 포함시키는 데 주력하였다. 이를 위해 정확한 지식과 설명을 담은 정의, 정리와 그에 대한 증명 그리고 직접 적용할 수 있는 문제 및 답안을 일반 서책 교재보다 정확하게 포함시켰다. 또한 디지털 환경에서 효율적으로 경험할 수 있는 ‘컴퓨터 실습’을 포함시켜 언제 어디서나 누구든 선형대수학 지식을 직접 실습할 수 있도록 구성하였다. 특히 처음 접속하여 실습을 경험해야 하는 학습자를 고려하여

²¹⁾ <http://matrix.skku.ac.kr/2017-Album/LA-syllabus.htm>

[그림 II-5]의 '#내적 계산, 형식은 $a \cdot \text{inner_product}(b)$ '와 같이 학습자가 SageMath의 코딩 과정을 확인하고 스스로도 자신의 필요에 맞도록 코딩할 수 있도록 코드에 대한 설명을 추가하였다. 또한 컴퓨터나 모바일 기기 등의 환경에서도 디지털 교재의 내용을 한눈에 확인하고 쉽게 학습내용을 따라갈 수 있도록 [그림 II-6]과 같이 웹 도구인 knowl²²⁾을 이용하여 화면이 마우스 클릭에 따라 팝업(Pop-up)되거나 사라지도록 제작하였다.

[표 II-2] 선형대수학 주차별 수업주제 및 주요 학생활동

	수업주제	주요 학생활동
1주차	오리엔테이션 1장 벡터 : 1.1절, 1.2절	Q&A 질문
2주차	1장 벡터 : 1.3절 2장 선형연립방정식 : 2.1절, 2.2절	Q&A 질문과 답변
3주차	2장 선형연립방정식 : *2.3절 3장 행렬과 행렬연산 3.1절, 3.2절, 3.3절	Q&A 질문과 답변
4주차	3장 행렬과 행렬연산 : 3.4절, 3.5절, 3.6절, *3.7절	Q&A and 1st PBL 보고서
5주차	4장 행렬식 : 4.1절, 4.2절, 4.3절	Q&A 질문과 답변, 퀴즈 1
6주차	4장 행렬식 : *4.4절, 4.5절 6장 선형변환 : 6.1절, 6.2절	Q&A 질문과 답변
7주차	6장 선형변환 : 6.3절, 6.4절, *6.5절	Q&A and 2nd PBL, 발표
8주차	1장-6장 복습 및 프로젝트 제안서 / 중간고사	중간고사
9주차	*행렬 모델 : 5장 Sketch 7장 차원과 부분공간 : 7.1절, 7.2절	Q&A 질문과 답변
10주차	7장 차원과 부분공간 : 7.3절, 7.4절, 7.5절, *7.6절	Q&A 질문과 답변
11주차	7장 차원과 부분공간 : 7.7절, *7.8절, 7.9절, 7장 복습	Q&A 질문과 답변
12주차	8장 행렬의 대각화 : 8.1절, 8.2절, 8.3절	Q&A and 3rd PBL, 발표
13주차	8장 행렬의 대각화 : 8.4절, *8.5절, *8.6절, 8.7절, 8.8절	Q&A 질문과 답변
14주차	8장 행렬의 대각화 : *8.9절, 8장 복습	Q&A 질문과 답변
15주차	9장 일반벡터공간 : 9.1절, 9.2절, *9.3절, 10장 Jordan 표준형 : 10.1절	Final PBL and 발표
16주차	7-8-9장 프로젝트 발표 / 기말고사	기말고사

²²⁾ <http://aimath.org/knowledge/>

<예제> 벡터의 내적

R^4 의 벡터 $\mathbf{x} = (2, -1, 3, 2)$, $\mathbf{y} = (3, 2, 1, -4)$ 에 대하여 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ 를 구하여라.

```

1 a=vector([2, -1, 3, 2])
2 b=vector([3, 2, 1, -4])
3 print "a=", a
4 print "b=", b
5 print
6 print a.inner_product(b)
7 # 내적 계산, 형식은 a.inner_product(b)

```

실행(Evaluate) Language: Sage Syntax Highlighting

```

a= (2, -1, 3, 2)
b= (3, 2, 1, -4)
-1

```

Powered by **SAGE**

[그림 II-5] SageMath 코딩 설명(실습코드 모음 참조)

정의 특수한 선형변환

- 문제 선형변환 4
- 문제 선형변환 5
- 정리 선형변환의 성질 1
- 정리 선형변환의 성질 2
- 정리 선형변환의 성질 3
- 컴퓨터실습 선형변환 6

정의 특수한 선형변환

문제 선형변환 4

문제 선형변환 5

R^2 의 벡터 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 에 대하여 선형변환 $T: R^2 \rightarrow R^3$ 를 다음과 같이 정의하면 T 는 **행렬변환**이다.

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x-y \end{bmatrix}$$

풀이

주어진 선형변환 T 는

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

이므로 T 는 행렬변환이다.

Sage-linear-transformation5.knowl

Sage-linear-transformation5.knowl

정리 선형변환의 성질 1

[그림 II-6] 실습실 화면 구성(팝업기능) <http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-8.html>

따라서 교수자와 학습자는 시간과 공간의 제약 없이 인터넷만 연결되면 모바일 기기를 통하여 핵심 개념 파악 및 컴퓨터 실습을 한 화면에서 모두 경험할 수 있으며 복잡한 계산을 빠르게 수행하고, 시뮬레이션 및 시각화를 통해 선형대수학의 개념을 시각적, 직관적으로 파악할 수 있게 된다. 이렇게 수학 학습 과정에 컴퓨팅 도구를 활용하게 되면, 학생들은 강의와 연결된 컴퓨터 실습실을 곁에 두고, 수학적 이해와 문제해결력을 향상시키는 데 웹 자료와 클라우드 컴퓨팅 도구를 구체적으로 활용하게 된다(Drijvers, 2013).

앞서 언급한 바와 같이 디지털 교육환경에서는 여러 가지 교수·학습을 시도할 수 있다. 본 연구에서는 지식, 계산, 실습, 적용 등을 최대한 포함하여 학습자가 시간과 공간의 제약 없이 선형대수학을 교수·학습할 수 있도록 몇 가지 수업 안을 체계화하였다.

첫째, 협동을 통한 예습과 복습을 활용하여 실습실 운영하기이다. 공학적 도구를 이용한 실습실 사용을 통해 절약된 시간을 개념의 깊은 이해를 위해 활용할 수 있다는 장점을 유지하면서 학생들이 자칫 개념은 잘 모르는 채 계산기나 컴퓨터와 같은 공학적 도구의 기능에만 집중할 수도 있다는 사항을 고려하였다. 즉, 학생들이 온라인상에서 개념에 대하여 토론하고 협동을 통해 예습과 복습을 진행할 수 있도록 [그림 II-7]과 같이 질문·답변·수정·토론이 가능하도록 하였다. 또한 교수자와 조교는 온라인 학생 활동을 평가에 적극 반영하여 학기를 마칠 때까지 학생들이 지속적으로 체계적으로 참여할 수 있도록 하였다.

둘째, 학습자들이 디지털 교육환경에 적응하는 시간을 갖도록 돕기 위해 매주 학습 목표 달성을 위한 예습용 과제(3-4개 정도)를 제시하여 학생들 스스로가 과제의 문제/숫자를 변경하면서 디지털 환경에 쉽게 적응할 수 있도록 하였다. 이때 예습용 과제는 5주차에 진행되는 퀴즈를 통해 팀을 고르게 편성(3-4명)하는데 활용되었다.

번호	제목	작성자	작성일자	조회수	첨부파일
782	Ch 8, Problem 15 변형문제 문제풀이	김태현	2017.05.28	15	
781	Final: Ch 8, Problem 15 변형문제 문제풀이	김태현	2017.05.29	12	
780	Ch 8, Problem 14 변형문제 문제풀이	김태현	2017.05.28	16	
779	Final: Ch 8, Problem 14 변형문제 문제풀이	김태현	2017.05.29	6	
778	Ch 8, Problem 13 변형문제 문제풀이	김태현	2017.05.28	16	
777	Ch 8, Problem 13 변형문제 문제풀이	박민근	2017.05.30	6	
776	Final: Ch 8, Problem 13 변형문제 문제풀이	김태현	2017.05.29	11	
775	복습 : ch8.3최고대각화, 8.4이차형식	박민근	2017.05.28	8	N
774	요약 : 8.6 SVD and Pseudo-inverse	김태현	2017.05.28	17	N
773	Good* Sec 8.6 읽어보고 궁금한 것은 질문하고 오세요^^	(교수)	2017.05.28	6	N
772	chapter 8.3 증명 중 궁금한 것이 있어 질문합니다	조형주	2017.05.27	13	N
771	RE:chapter 8.3 증명 중 궁금하신 점에 대한 설명입니다.	김태현	2017.05.28	12	N
770	chapter8, ex prob12 new	오명진	2017.05.26	17	
769	ch7 exercise 17번 오타	우현택	2017.05.26	16	N
768	직교 관계 (오타 아닙니다)	송민규	2017.05.26	13	N
767	Dear 김하영, Finalize this revised Exs Problem 8,10	(교수)	2017.05.26	27	N
766	Dear 김하영영, 아직도 Finalize 안하든 것만 그 조 못두가 모른다는 의미인가요?	(교수)	2017.05.28	14	N
765	Dear 송민규 군 또는 그 조원이 Finalize 하세요^^	(교수)	2017.05.28	14	N
764	Final : revised Exs Problem 8.10	차지호	2017.05.28	13	N
763	[서울포럼 2017 볼프럼 "20년 후엔 "수학" 사라질 수도" 개념의 관점에서 교육해야 한다	(교수)	2017.05.26	20	N

[그림 II-7] 온라인 학생 활동 (질문, 답변, 수정, 토론)

이때, 교수자는 디지털 수학학습이 효과적으로 진행되도록 적절하게 토론문제, 주제 및 개념을 이해할 수 있는 참고자료 등을 제시하여 학생들이 협동을 통하여 예습 및 복습을 할 수 있도록 세심하게 교수·학습을 준비해야 한다.

2.3 평가 부분

디지털 교육환경에서 가장 쉽게 간과할 수 있는 부분이 평가이다. 따라서 본 디지털 선형대수학 강의에서는 4주에 한번씩 PBL 보고서를 제출하여 학습자 스스로 학습한 내용을 정리하고 배운 개념을 복습하도록 평가부분을 강화하였다. PBL 보고서는 ‘개인 성찰 노트’, ‘자기 평가’, ‘동료평가’, ‘참여활동 평가’, ‘PBL 참여 부분’, ‘소감’ 등으로 구성했으며([그림 II-8] 참조), 그 중 ‘PBL 참여 부분’은 추후 정리하여 내용을 보강한 후 기말고사 대비용으로 제공하며, 일부는 기말고사에 실제로 출제하여 학습을 연장할 수 있도록 하였다. PBL 보고서 양식과 예시는 각주의 웹 사이트 주소²³⁾에서 볼 수 있다.

PBL Report (자기평가서, QnA 활동 상황 포함)

PBL Report (개인성찰 노트)

Spring, 201*

PBL Report (Form)

Flipped/PBL Action Learning

Your Class: Linear Algebra

Prof :

과제함 Due day : 2017/**/**(***)

Name (이름) :

Major and Student No (전공 및 학번) :

Team Number and Team Leader :

e-mail and phone (이-메일 및 전화번호):

Sample:

SKKU PBL Report: <http://matrix.skku.ac.kr/MT2010/pbl/pbl-heb.pdf>

<http://lib19192.history.com/category/Mathematics/Linear%20Algebra>

<https://matrix.skku.ac.kr/PBL/>

Final PBL Presentation: <http://youtu.be/20GcT-5eHY8>

<http://matrix.skku.ac.kr/2015-FA-FS/LinearAlgebra/Flipped-Class-SKKU.htm>

[Sample] Ch-1-Prob-8-ReFinal-* (New) (page 48)**

LA Chapter 1 Exercises < Finding a vector equation with given two points. >

Find a vector equation of the line between the two points $P(5,0,1,0)$, and $Q(0,2,6,5)$

Sol. Let a be the vector through the points $P(5,0,1,0)$, $Q(0,2,6,5)$. x be the parallel to vector a . O be $(0,0,0,0)$ that is particular point in \mathbb{R}^4 (also O could be changed any point in \mathbb{R}^4).

then, $a = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{OQ} = (0,2,6,5) - (0,0,0,0) = (0,2,6,5)$, $\overrightarrow{OP} = (5,0,1,0) - (0,0,0,0) = (5,0,1,0)$

so $a = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (0,2,6,5) - (5,0,1,0) = (-5,2,5,5)$

Hence $x = \overrightarrow{OP} + t a (t \in \mathbb{R})$.

$x = (5,0,1,0) + t(-5,2,5,5)$ $\therefore x = (5,0,1,0) + t(-5,2,5,5)$ ■

Checked by Sage.

```
var('x,y,z,h')
var('t')
P = vector[[5,0,1,0]]
Q = vector[[0,2,6,5]]
R = Q-P
print "vector equation= ", P+R*t
vector equation= (-5*t + 5, 2*t, 5*t + 1, 5*t)
=> (x,y,z) = (5,0,1,0) + t(-5,2,5,5)     OK ■
http://math3.skku.ac.kr/home/pub/163
```

Note : 두 점이 주어질 때 그 두점을 지나는 vector equation을 구하는 문제이다. 각 점을 O 라 P 라 할 때, $x = \overrightarrow{OP} + tR (t \in \mathbb{R})$ 임을 이용하여 문제를 해결하였다. 다른 표에서도 위와 같이 문제를 해결할 수 있을 것이다.

[그림 II-8] 디지털 선형대수학 강의에 대한 자기보고식 평가 (https://youtu.be/E-5m65-8Ea8; PBL발표)

디지털 교육환경에서 공정한 평가를 위한 한 가지 예로 온/오프라인 출석, QnA 참여 횟수, 퀴즈, 중간고사, PBL 보고서, 기말고사 등을 종합하여 평가를 내리는 포트폴리오를 이용할 수 있다. 따라서 S대학교의 디지털 선형대수학 강좌에서는 앞서 언급한 PBL 보고서에 근거하여 매주 또는 2주마다 평소 점수를 평가하였고, 출석, 퀴즈, 중간고사, 기말고사 점수에 강의계획서에 제시한 가중치를 부여하여 마지막에 합산하여 성적을 산출하는 방식을 이용하였다. 또한 교수자는 매주 또는 정기적으로 참여 상황에 따른 임시 성적을 공지하여 학생들이 꾸준히 학습에 참여할 수 있도록 하였다([그림 II-9] 참조).

이때, 공정하고 공평한 평가를 위하여 교수자와 지원 조교는 학기 일정에 따라 전체적인 구조가 잘 진행되도록 확인하고, 토론 및 예습, 복습, 과제의 방향을 잘 조정해주며, 선형대수학이 응용되는 사례, 읽을거리, 깊이 있는 수학 개념 등 추가적인 자료들을 충분히 제공하려고 노력하였다. 참고로, 모든 학생은 선형대수학 입문 강좌를 같이 수강하고, 경쟁하면서 학습하고, 이어지는 선형대수학 심화과정 강좌 (선형대수학 2)에서 수학전공 학생

23) PBL 보고서 양식 <http://matrix.skku.ac.kr/2017-Album/PBL-Report-Form.hwp>
 PBL 보고서 예시 <http://matrix.skku.ac.kr/2015-album/2015-F-LA-Sep-Record.pdf>

을 포함한 다양한 학생들이 증명기반의 추가 이론과 임용고사, 산업수학 등에 연계하여 학습하는 방법을 권장한다. 실제 수학전공 학생은 대개 선형대수학 1(입문)과 2 (행렬론)를 두 학기에 걸쳐 수강한다.

Name	Online	on 출석	Q	A	Q&A	off 출석	Quiz/30	Quiz	MidTerm	Exam	PBL	midSUM	Grade
***	120	5	6	14	7	5	26	17.33	90	45	10	89.33	A+
***	116	5	17	13	9	5	20	13.33	90	45	10	87.33	A+
***	109	5	10	16	9	5	21	14.00	89	44.5	8	85.50	A
***	109	5	3	11	7	5	18	12.00	82	41	10	80.00	A
***	94	4	6	5	6	5	14	9.33	88	44	9	77.33	B+
***	104	5	9	2	7	5	17	11.33	75	37.5	7	72.83	B+
***	108	5	8	17	8	5	14	9.33	67	33.5	9	69.83	B
***	98	4	1	4	4	4	18	12.00	73	36.5	5	65.50	B
***	95	4	2	1	3	4	16	10.67	52	26	9	56.67	C+
***	16	2	2	0	1	2	4	2.67	47	23.5	3	34.17	D+
***	0	0	0	0	0	1	1	0.67	0	0	1	2.67	F

[그림 II-9] 분야별 및 종합 평가 예시

위 내용을 종합하여 구체적인 평가 방안을 제시하면 다음과 같다(봄 학기(3월-6월) 기준).

- ① 강의 1-2주까지의 QnA 활동(예습, 복습, 질문과 답변), 퀴즈, 온/오프라인 출석을 합산하여 임시 점수 (expected grade : 이대로 계속 진행할 경우 학생이 받는 점수)를 A, B, C, D, F로 부여한다. 이는 학기 초 점수가 낮은 학생들의 주의를 환기시켜 공부에 집중하도록 한다. 그럼에도 집중하지 않는 학생들은 수강 변경할 수 있도록 유도한다.
- ② 자신이 참여한 QnA 활동을 정리하여 3월 말 QnA 또는 LMS에 PBL보고서를 제출하도록 한다. 교수자는 PBL 보고서에 가중치를 부여하여 앞서 진행한 QnA, 출석과 합산하여 임시 점수를 부여한다.
- ③ 제출된 PBL 보고서 중 잘 작성된 자료를 모아 하나의 예시로 공개한다. 이 과정에서 학생들은 자신의 현재 임시 점수를 이해하고 받아들일 수 있으며, 낮은 점수를 받은 학생들은 잘 정리된 예시를 보며 다음 번 PBL 보고서에 충실하게 된다. 또한 점수가 높은 학생들도 자신의 보고서 형태에 머무르지 않고 더 나은 PBL 보고서가 되도록 할 수 있다.
- ④ 4월 PBL 보고서를 모아 수정 및 정리 후 중간고사 대비용으로 학생들에게 돌려준다. 실제로 이 중 일부를 중간고사 문제로 활용한다. 이때도 PBL 보고서 점수와 QnA 활동, 출석을 합산하여 임시점수를 부여하되 이전의 PBL 보고서의 가중치를 줄이고 최신의 PBL 보고서에 가중치를 더 높게 부여한다. 이는 이전에 낮은 점수를 받은 학생들이 포기하지 않고 새로 시작할 수 있도록 하며, 높은 점수를 받은 학생들도 끝까지 높은 상태를 유지할 수 있도록 해준다.
- ⑤ 5월 PBL 보고서를 모아서 하나의 예시로 공개한다. 이를 보장하여 6월 10일경 Final PBL를 만들도록 한다. 이를 모아 수정 및 정리 후 기말고사 대비용으로 학생들에게 돌려준다. 실제로 이 중 상당부분을 기말고사로 제시한다. 본 연구진의 운영 경험으로 보아 충실하게 복습한 학생은 기말고사를 잘 볼 수 있으며, PBL 보고서를 통해 자신의 언어로 지금까지 학습한 내용을 설명할 수 있게 된다.

2.4 강의를 마치고

한 학기 본 강의가 진행되는 동안 학생들은 팀 단위로 예습, 복습, 토론, 질의 및 답변 등의 활동을 하였다. 학생들이 이번 강의를 통하여 주로 경험하고 느꼈다고 보고한 내용의 일부는 다음과 같다([그림 II-10] 참조).

자세한 내용은 <부록>의 [2. 학생중심교수법 수업 포트폴리오 웹 사이트]에서 확인할 수 있다.

- ① 팀원 간에 의사소통하며 지식을 공유하고 서로의 단점을 보완해주었다.
- ② 역할분담을 통해 문제 해결을 이끌어내는 방법을 배웠다.
- ③ 문제를 다각도에서 해결할 수 있는 능력을 키웠다.
- ④ 개념에 대한 확신이 토론을 통해 점점 확립되어 간다.
- ⑤ 학생들이 주도적으로 예습하고, 질문하고, 답변하고, 복습하고, 발표한다.

교수님의 강의를 처음 들었을 때는 '아 이 수업 힘들겠다'였고 실제로도 시간을 적게 투자하는 과목은 아니었습니다. 하지만 들으면서 교수님의 '연정적인 강의, 선진화된 시스템을 체험하면서 저 자신도 변해갈 수 있었고 수학의 본질 및 활용이란 무엇인가를 알게 되었습니다. 물론 선형대수학에 대해서도 제대로 배웠지만 sage 활용 및 왜 수학을 배우는 지에 대해 알아서 굉장히 뿌듯한 수업이었습니다. 감사합니다.

한 학기동안 선형대수학을 배우면서 수학 공부할 왜하는가에 대해서 많은 생각을 하게 되었습니다. 단순히 이론만 깨우치거나 문제를 푸는법이 아닌 실생활에 적용하고 있는 분야에서부터 적용시켜는 법까지 많은 배움을 얻었습니다. 비록 많은 참여를 하지 못하게 아쉽지만 많은 가르침을 받았다고 생각합니다. 한 학기동안 고생 많으셨습니다. 감사합니다.

PBL 수업은 처음 들은 물론, 다른 수업과는 달리 (예습과 약간의 복습이 필요하지만) 내용 이해에 관해서는 지금까지 들어왔던 수업과는 많이 달랐다. 다른 수업의 경우 있는 것은 적당히 익힌 수업이지만 이 수업에서는 다른 학원들과의 교류를 통해 그런 부분도 보일 수 있었다. PBL 수업의 장점이 것 같다.

공학수학 교과목에서 더욱 생략한 내용이 많아서 공부할 때 어려움을 겪었는데 이 과목에서 그 부족했던 부분들이 다 채워진 느낌입니다. 감사합니다, 교수님.

[그림 II-10] 본 강의를 수강한 학생들의 반응 일부

그리고 본 강의를 운영하며 교수자의 입장에서 느낀 점은 다음과 같다.

- ① 이번 학기에 적용한 강의방식은 기대 이상의 좋은 효과를 보였다([그림 II-10] 참조).
- ② 학생들의 학습태도가 변하고, 학습능력과 협동학습 능력이 향상되고, 실제 학력이 대단히 크게 성장하였다. ([그림 II-11] 참조)
- ③ 그러나 일부 학생들이 중간에 포기한다. 수강철회 비율이 상대적으로 높았다.
- ④ 교수와 학생 모두 시간과 노력을 더 쓴다.
- ⑤ 그러나 그렇기 때문에 실력이 늘고 마지막에는 보람을 느낀다.

성적입력(확인용)

반드시 저장버튼을 눌러주시기 바랍니다. **저장**

학년도: 2017 학기: 1학기
 교과목명[학수번호]: 선형대수학 [GEDB003-42]

등급	상대평가비율	배정가능인원		현재배정인원	학부생	대학원생	교원학생	총수강생
		최소	최대					
A+ ~ A	0% ~ 50%	0	12	5				
A+ ~ B	0% ~ 90%	0	21	14	23	0	1	24

번호	과목정보	성적	학생수	비율	
1	과목명	선형대수학	A+	3	12.5
	[학수번호-분반]	[GEDB003-42]	A	2	8.33
	담당교수		B+	4	16.67
	개설컴퍼스	자연과학	B	5	20.83
	수강인원	24	C+	3	12.5
			C	1	4.17
			D+	0	0
			D	0	0
			P	0	0
			F	6	25
		미입력	0	0	

[그림 II-11] 본 강의를 수강한 학생들의 성적 분포

“수강 철회와 추가 등록 등으로 학생들에게 새로운 학습방법을 이해시키는 과정을 몇 차례 반복하는 것을 경험하면서, 이 과정의 효율성을 높이기 위하여 학생들이 새로운 교수법의 진행 과정을 모두 고르게 이해하도록 처음 단계에서 자세한 방법을 제공해 줄 필요가 있다. 이에 [그림 II-12]와 같이 학생들 스스로 자신의 언어로 교수자의 설명을 요약하면서 보충한 강좌 서바이벌 키트(survival kit)를 만들어 공유하도록 하였다.”

- ① **다루는 내용:** 벡터, 노름, 내적, 선형연립방정식, 가우스-조던 소거법, 행렬, 역행렬, 특수행렬, 대각합, 행렬식, 고유값, 고유벡터, 기저, 차원, 일차독립, 대각화, 일반벡터공간, Jordan 표준형 등
- ② **강좌진행 방법:** 동영상 강의로 예습하고, QnA 게시판에 질의 및 응답한다. 수업시간에 토의하고 배운 내용에 대해 예습 후 QnA 게시판에 올린다. 그리고 배운 내용에 대해 기억에 남는 것도 QnA 게시판에 올린다. 교수자가 제시하는 의견 또는 문제에 대해 최초 답변 또는 최우수 답변자는 가산점을 부여한다.

[그림 II-12] 서바이벌 키트

많은 교수자들은 교수 방법의 개선에 관심은 크지만 연구 업적에 더욱 큰 가치를 주는 현재 대학의 환경 때문에, 교수자가 강의/교육에 많은 신경을 쓸 수 없고 새로운 교육모델을 적용하기가 쉽지 않다고 얘기한다. 그러나 본 저자가 경험한 바에 따르면, 교수자가 강의/교육에 신경을 많이 쓸수록 학생들의 전반적인 수학실력이 향상되었고 학생들은 이를 통해 자신감을 갖게 되어 미래를 설계하는 데 적극적이었으며, 많은 학생은 자신감을 가지고 사회에 기여하는 인재가 되었을 뿐 아니라 일부는 세계 최고 수준의 대학원에 진학하여 유의미한 연구를 시작하는 것을 목격하였다. 이 과정에서 교수자도 최선의 교육환경에 노출되고 새로운 디지털 환경의 활용에

능숙하게 되어 자신의 연구에도 이를 적용하면서 연구 능력이 동시에 향상되는 경험도 하였다. [그림 II-13]은 실제 대학에서 교육에 시간과 열정을 쏟는 것이 연구를 포함한 종합적인 성과에서도 긍정적인 결과로 나타나는 것을 보여주는 하나의 사례가 될 수 있다. 따라서 교수자가 새로운 시도로 열심히 가르치는 것을 두려워 할 필요가 전혀 없는 것이다. 본 연구진은 이를 포함한 지난 15년 이상의 경험과 자료 데이터에 근거하여 앞서 언급한 선형대수학의 교육 모델이 디지털 시대에 적합한 수학교육의 대안이 될 수 있을 것으로 판단한다.

평가년도	교육성적		종합성적	
	학득점수 (백분위점수) (평가대상인원)	순위	학득점수 (백분위점수) (평가대상인원)	순위
1999	127.5 (99.96)	1 (11)	564.6 (98.89)	2 (10)
2000	74.2 (59.51)	8 (17)	1240.2 (84.33)	2 (11)
2001	122.7 (93.27)	1 (10)	1154.7 (92.95)	1 (10)
2002	95.7 (90.93)	2 (10)	954.7 (91.89)	3 (10)
2003	102.8 (93.66)	1 (9)	1114.9 (91.93)	1 (9)
2004	105.2 (93.45)	1 (11)	1474.2 (274.71)	3 (11)
2005	135.7 (95.4)	1 (13)	1175.7 (277.71)	4 (13)
2006	145.45 (95.65)	1 (13)	884.45 (335.14)	5 (13)
2007	136.0 (97.93)	1 (13)	1065.26 (231.55)	4 (13)
2008	136.2 (93)	1 (15)	1554.2 (252.83)	1 (15)
2009	139.2 (93.12)	2 (15)	1991.2 (293.43)	5 (15)
2010	74.1 (60.03)	1 (15)	1503.1 (231.35)	2 (15)
2011	137.3 (93.12)	1 (15)	1204.3 (275.59)	3 (15)
2012	143.6 (92.77)	1 (14)	970.9 (254.59)	5 (14)
2013	145 (91.95)	1 (15)	1242 (253.54)	7 (15)
2014	69.5 (57.81)	연구년 (20)	1429.5 (237.75)	연구년 (20)
2015	657 (1)	1	1869 (8)	8
종합평균	150.8 (87.77)		1253.7 (214.01)	

[그림 II-13] 본 연구자의 지난 15년간 교육 및 종합 평가 결과

III. 결론

21세기의 변화된 디지털 교육 환경은 교수·학습 방법의 변화에 큰 영향을 주고 있다. 이러한 변화와 함께 디지털 시대의 수학교육에 대한 인식과 방법 또한 동시에 바뀌어 왔다. 본 연구에서는 디지털 환경에 적합한 대 학수학교육에 대한 고민과 함께 구체적인 대학수학교육 모델을 만드는 시도를 하였다.

본 연구진이 제안하는 21세기에 적합한 수학교육은 디지털과 첨단 모바일/인터넷 환경을 강의에 적절히 반영 하여 이 과정에서 학생이 스스로 학습과정에 참여하게 하는 것이다. 이를 위해 본 연구진은 다양한 웹 링크와 시뮬레이션 및 계산이 가능한 코드를 갖춘 실습실을 개발하여 강의에 활용하여 학생들이 언제든지 실습할 수 있게 하였고, 계산된 결과를 LMS를 통해 동료 및 교수자와 함께 질문, 답변, 토론하며 개념에 대해 깊게 이해하 고 설명할 수 있도록 하였다. 또한 이 과정을 평가에 적절히 반영하여 학생들은 학습하는 과정에서 자신의 문제 를 해결해가는 과정을 서술하고, 발표하는 비판적 사고 능력을 자연스럽게 갖추도록 힘썼다. 실제로 이 모델을 디지털 교육환경에 가장 적합한 강좌 중 하나인 선형대수학에 적용하여 최근 공개된 선형대수학 디지털 전자 교과서와 콘텐츠를 활용한 교수학습 모형과 대학 선형대수학강좌 운영에 대한 구체적인 방법을 제시하였다.

더불어 본 연구진이 제안하는 대학 수학 강좌의 운영 방식은 미적분학, 공학수학, 미분방정식, 기초통계학 등 다른 수학 강좌를 운영하는 모델로 활용될 수 있을 것으로 본다.

참 고 문 헌

- 고래영 · 김덕선 · 박진영 · 이상구 (2009). 모바일 환경에서의 Sage-Math의 개발과 선형대수학에서의 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **23(4)**, 1023-1041.
- Ko, R.Y., Kim, D.S., Bak, J.Y. & Lee, S.G. (2009). Development of Mobile Sage-math and its use in Linear Algebra, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **23(4)**, 1023-1041.
- 김경원 · 이상구 (2013). 모바일 선형대수학 스마트폰 콘텐츠 개발과 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **27(2)**, 121-134.
- Kim, K.W. & Lee, S.-G. (2013). Development of smart-phone contents for mobile linear algebra, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **27(2)**, 121-134.
- 박경은 · 이상구 (2015). “컴퓨팅 사고력(Computational thinking)” 향상과 Sage 도구를 이용한 수학교육, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **29(1)**, 19-33.
- Park, K.E. & Lee, S.-G. (2015). Improving Computational Thinking Abilities Through the Teaching of Mathematics with Sage, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **29(1)**, 19-33.
- 이상구 · 이궁희 · 최용석 · 이재화 · 이지영 (2015). R을 활용한 ‘대화형 통계학 입문 실습실’ 개발과 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **29(4)**, 573-588.
- Lee, S.-G., Lee, G.H., Choi, Y.S., Lee, J.H. & Lee, J.J. (2015). Interactive Statistics Laboratory using R and Sage, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **29(4)**, 573-588.
- 이상구 · 이재화 · 김경원 (2013). Sage 행렬계산기와 선형대수학 Sage 콘텐츠, 한국수학논문집, **21(4)**, 503-521.
- Lee, S.-G., Lee, J.H. & Kim, K.W. (2013). Sage Matrix Calculator and full Sage contents for Linear Algebra, *The Korean Journal of Mathematics*, **21(4)**, 503-521.
- 이상구 · 이재화 · 김경원 (2014). [빅북] 선형대수학, 교보출판사.
- Lee, S.-G., Lee, J.H. & Kim, K.W. (2014). [BigBook] Linear Algebra, Kyobo Book.
<http://matrix.skku.ac.kr/2015-Album/BigBook-LinearAlgebra-SGLee-New-2015.pdf>
- 이상구 · 이재화 · 박준현 · 김웅기 (2016). SageMath를 활용한 ‘대화형 공학수학 실습실’의 개발과 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **30(3)**, 281-294.
- Lee, S.-G., Lee, J.H., Part, J.H. & Kim, E.-K. (2016). Interactive Engineering Mathematics Laboratory, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **30(3)**, 281-294.
- 이상구 · 장지은 · 김경원 (2013). Sage와 Geogebra를 이용한 선형대수학 개념의 Visual-Dynamic 자료 개발과 활용, 수학교육 학술지, 2013국제수학영재교육학술대회 프로시딩, 113-123.
- Lee, S.-G., Jang, J.E. & Kim, K.W. (2013). Development and Application of Visual-Dynamic Data for Linear Algebra Using Sage and Geogebra, *Studies in Mathematical Education, Proceedings of the 2013 International Conf on Math Edu.* 113-123.
- Drijvers, P. (2013). Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't), *PNA* **8(1)**, 1-20.
- Lawrence, S. (2014). The Epistemology of Mathematics in the Digital Age, *SINTEZA 2014*, 62-65.
- Mitra, S. (2015) Meeting of the minds: Research collaborations. [Hole in the Wall]. Retrieved March 2015, from <http://www.hole-in-the-wall.com/findings.html>
- NCSM (2015). Mathematics Education in the Digital Age. *NCSM's newest initiative: Iris Project*, 1-8.
- Pink, D. H. (2011). *Drive: The surprising truth about what motivates us*. New York: Riverhead Books.

Linear Algebra Teaching in the Digital Age

Sang-Gu Lee

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea

E-mail : sglee@skku.edu

Jae Hwa Lee[†]

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea

E-mail : jhlee2chn@skku.edu

Kyung-Eun Park

Department of Mathematics Education, Sungkyunkwan University, Seoul 110-745, Korea

E-mail : postmedu@skku.edu

The educational environment in the digital age of the 21st century definitely affects teaching and learning methods to be changed. In addition, the perceptions and methods of mathematics education in the digital age have also been changing. This study proposes a university mathematics education model suitable for the digital age, which makes full use of the internet/digital environment and leads the students to participate in the learning processes. We apply the proposed model to Linear Algebra course, and present a concrete method of teaching and learning model including evaluation. This will be the first study on how to organize and operate digital courses in Korea in accordance with the mathematics education in the digital era which is rapidly spreading around the world.

* ZDM Classification : U25, U75

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20, 97U70

* Key Words : Digital Era, Mathematics, Internet, Linear Algebra, College Math education

* This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Education(2017R1D1A1B03035865).

[†] Corresponding author

<부록>

1. 선형대수학 사이버랩 / 강의록

목차 \ 웹 주소	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/
실습코드 모음	http://matrix.skku.ac.kr/Lab-Book/Sage-Lab-Manual-2.htm
1주차 벡터	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-1.html
2주차 선형연립방정식	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-2.html
3주차 행렬과 행렬대수 1	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-3.html
4주차 행렬과 행렬대수 2	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-4.html
5주차 행렬식 1	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-5.html
6주차 행렬식 2	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-6.html
7주차 행렬모델	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-7.pdf
8주차 선형변환	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-8.html
9주차 차원과 부분공간 1	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-9.html
10주차 차원과 부분공간 2	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-10.html
11주차 행렬의 대각화 1	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-11.html
12주차 행렬의 대각화 2	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-12.html
13주차 행렬의 대각화 3	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-13.html
14주차 일반벡터공간	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-14.html
15주차 Jordan 표준형	http://matrix.skku.ac.kr/K-MOOC-LA/cla-week-15.html

2. 학생중심교수법 수업 포트폴리오

(전체 내용은 웹사이트 <http://matrix.skku.ac.kr/2017-LA-portfolio-sglee/>에서 확인 가능)

수업 포트폴리오

	2017학년도	개설학기	1학기
학수번호	G***03		
교과목명	선형대수학	담당교수	이 * *

출 문

장 귀하

2017 1학기 학생중심교수법 수업 포트폴리오를 별첨과 같이 제출합니다.

2017년 6월 30일

개발자: 교수 이 * * (서명)

3. 강의 후기 일부

- 이번 선형대수학 수업을 들으며 **능동적**으로 수업에 참여할 줄 아는 능력을 길렀다고 생각합니다. 또한 저는 평소 틀리는 것이 두려워 수업시간에 거의 대답을 하지 않았는데 교수님께서 저의 대답을 이끌어내 주시고 제가 참여할 수 있도록 기회를 주셨습니다.
- 예습 및 복습과 **QnA**의 적극적인 활용이 없었다면 중간에 놓친 내용이 발생하였을 때, 만회하기가 어려웠을 것이다.
- 혼자 공부해서 혼자 해결하는 것이었다면 이제는 QnA와 조원과의 **토론**을 적극적으로 활용할 수 있게 된 것 같습니다.
- 교수님이 올린 자료에서 사람들끼리 **토론**하고 올바른 답을 향해 찾아가는 과정은 정말 좋았습니다. 어쩌면 이런 학습 방법은 대학을 다니면서 가장 효율적이고 기억에 남는 방법일 것 같습니다.
- 백지장도 맞들면 낫다고 하듯이, **집단지성**을 적극적으로 활용하는 이 형태의 수업이 앞으로 교육을 주도하게 될 것으로 전망된다. 이번 PBL보고서를 쓰면서 지난 한 달이 넘는 시간동안 내가 해왔던 활동들을 정리함으로써 의미 있는 시간을 가졌다고 생각한다.
- 학생들에게 주입식 교육을 하기 보다는 학생 스스로가 참여하여 **수업을 만들어나간다는 느낌**이 들었습니다. 따라서 새로웠고, 수업에 더욱 집중하게 되었던 것 같습니다.
- 선형대수학 강의를 통해 **코드**들과 더 친숙해졌습니다. 나중에 실제적인 문제를 처리할 때에는 손으로 문제를 풀기가 불가능하기 때문에 프로그램을 이용해서 푸는 방법을 익혀야 하는데 이런 점에서 생각해보면 한 학기동안 강의 내적으로나 외적으로나 많은 것을 배운 것 같습니다.
- Sage 페이지는 후에도 유용하게 사용될 것 같으며, 여기에 쓰인 개념들을 구현하는 데 쓰인 **코드**들도 직접 사용할 수 있을 만큼 익히면 더 유용할 것 같다.
- 푸는 방식, 과정 속에서 이해하고 있는가를 몰랐고 여기서 우리가 깨우치는 것은 결국 수학을 푸는 방법이 아니라 **배우는 과정**이라는 생각이 들더군요. 이러한 방식이 진정 수학을 한다는 것이라는 생각이 들었습니다.
- **강의저장 수업**이므로 교수님의 작년과 재작년 수업영상과 더불어 현장에서 들었던 수업까지 언제든지 원할 때에 들으며 이해를 다듬을 수 있는 기회가 제공되는 점이 장점이라고 생각한다.
- 시험공부는 보다 여유 있게 할 수 있었습니다. ... 문제를 푸는 것보단 전체적인 개념/정의/정리/증명과정을 이해하고 있는지, **논리적으로 설명**할 수 있는지와 **실제 현실 문제를 해결**할 수 있는 **계산 능력**과 **알고리즘**을 이해한 정도를 판단하는 것을 중시하는 문제를 중심으로 평가를 받았다는 것이 기억에 오래 남을 것 같습니다.
- Q&A를 활용하여 학우들과 답변을 주고받고 **서로 틀린 것을 고쳐주면서** 저도 성장하고 학우도 성장할 수 있는 기회를 가졌습니다. ...이 수업은 미리미리 공부를 하지 않으면 수업에 참여를 하지 못하기 때문에 평소에 공부를 할 수 밖에 없었습니다. 따라서 시험기간에 부담이 엄청 줄어서 개념 정리만 한번 쭉 하고 시험 본 결과 좋은 성적을 얻을 수 있었습니다.
- 대학에 와서 들은 수업들 중에 기억에 남는, 가치 있는 활동을 한 수업이라고 기억될 것입니다. ■