# 유한요소법의 기초와 전자파 해석의 응용

이 은 정

연세대학교 계산과학공학과

유한요소법은 공학, 수리물리 등 다양한 영역의 문제들을 풀기 위한 수치 기법 중의 하나이다. 열전달, 유체역학, 전자기학 등에서 모델링을 통해 그 현상을 모사하는 수학적 형태의 문제가 주어지면 이를 'computable'한 형태로 바꾸어 주는 역할을 하는 것이 바로 유한요소기법이다. 단순히 데이터와 문제의 이산화를 통해 algebraic system을 유도해 내는 것뿐만 아니라, 실해로의 접근성, 결과의 예측 등, 해의 분석 및 응용 형태의 제시 등도 유한요소법을 통하여 얻을 수 있다.

## Ⅰ. 유한요소법의 역사

함수해석학 등과 같은 해석학에 이론적인 근간을 두고 있는 유한요소법은 1940년대 A. Hrennikoff, R. Courant를 필두로 한 I. Argyris, L. Oganesyan 등의 수학자들에 의해서 그 이론과 응용이 정립되면서 구체적으로 분리된 학문으로 여겨지기 시작하였다. 대부분의 기존 방법들은 계산공간을 격자유추를 통하여 이산화 하였으나, Courant는 실린더 형태의 계산공간을 유한개의 삼각형태의 서브도메인으로 쪼개어 이차 타원 편미분 방정식을 푸는 방법을 제안함으로써 유한요소법의 발전에 획기적인 전환점을 마련하였다. 중국에서는 1950년대 후반에서 60년대 초반에 걸쳐 K. Feng이 댐 건설을 위해 'variation principle에 기반을 둔 유한차분법'이라는 방법을 제안하고, 이를 편미분방정식을 푸는데 이용하였는데, 이는 또 다른 형태에서의 유한요소기법의 시발점으로 여겨지고 있다. 비록 각각의 방법들이 각기 다른 형태로 제안되었지만, 계산공간을 일정한 모양의 서브도메인('요소')들로 구성하는 메쉬 이산화를 한다는 공통점이 있다.

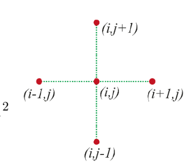
유한요소법은 60년대와 70년대를 걸쳐 J. H. Argyris, R. W. Clough, O. C. Zienkiewicz, E. Hinton, B. Irons, P. G. Ciarlet, 그리고 R. Gallagher 등에 의해 괄목할만한 발전을 하게 된다. 특히 이 시기에 open source로 제공된 유한요소법 소프트웨어 프로그램들, NASTRAN(sponsored by NASA sponsored), SAP IV(UC Berkeley), DNV GL(Sesame) 등, 이 많은 산업체 문제들로 응용되기 시작하면서 발전에 추진력을 얻게 된다.

## Ⅱ. 유한요소법의 기본 개념

### 2-1 개요

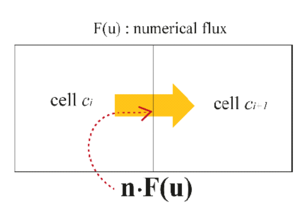
수치적으로 근사해를 찾는 방법에는 유한차분법(finite difference method), 유한체적법(finite volume method), 유한요소법(finite element method), spectral method 등의 다양한 방법들이 있다. 유한차분법은 미분을 차이(difference)를 이용하여 이산화 시키는 방법이다. 이는 그 구현이 쉬워 널리 쓰이는 방법이기는 하지만, 복잡한 계산공간에서의 이용이 용이하지 않다는 단점이 있다. 유한체적법은 근사해를 volume-wise로 계산을 해 낸다. 특히 hyperbolic 편미분 방정식이나, mass conservation 성질을 보존하는 유체방정식을 풀 때 유용하게 쓰이지만, 높은 정확도를 가지는 flux의 정의가 용이하지 않다는 단점이 있다. Spectral method의 경우에는 정확

$$u_x \approx \frac{u_{i+1} - ui}{h} \text{ or } \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \text{ or } \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$
$$\nabla^2 u \approx (u_{i+1,_j} + u_{i-1,j} + u_{i,j_{+1}} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j})/h^2$$



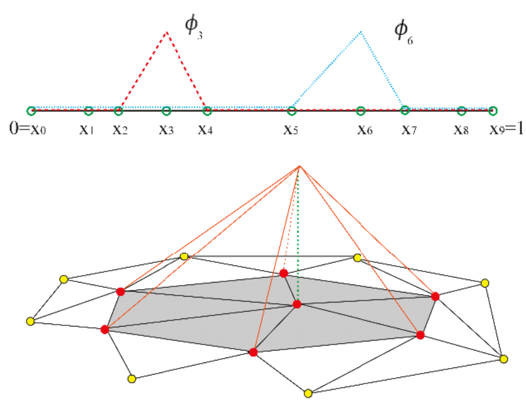

[그림 1] 유한차분법

$$u_i^n \approx \frac{1}{|V|}\int_V u(x,t_n)\,dV$$




[그림 2] 유한세척법

도가 높은 high order polynomial들을 이용할 수 있는 장점이 있지만, 사각형태가 아닌 계산공간에서의 이용이 어렵다. 유한요소법은 복잡한 계산공간에서 사용이 쉽고, high order 기저함수의 이용도 용이하기 때문에, 수치 편미분 방정식의 영역에서 많이 이용되어지고 있다.




[그림 3] 유한요소법

전통적인 유한요소법은 주어진 편미분 방정식에 임의의 테스트 함수를 곱한 뒤, 이를 계산공간에서 적분하여 weak variational formulation으로 불리는 형태로 바꾸어 그 근사 해를 찾는다. 이는 통상적으로 Galerkin 유한요소법이라 불린다. 예를 들어 경계공간에서 제로 경계조건을 가지는 아래 Poission 방정식을 푼다면

$$-\nabla^2 u = f \in \Omega,\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

이를 Green's formula를 이용해

$$\int_\Omega (-\nabla^2 u)\nu \, d\Omega = \int_\Omega f\nu \, d\Omega, \text{ for all } \nu \rightarrow$$
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \nu \, d\Omega = \int_\Omega f\nu \, d\Omega, \text{ for all } \nu$$

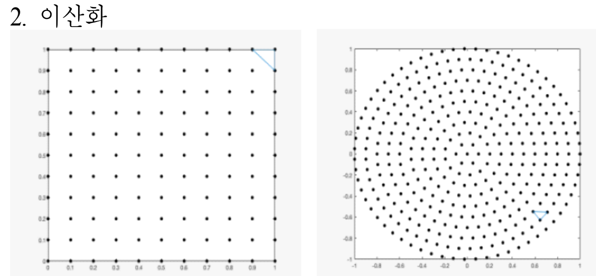
아래와 같이 적분형태의 variational 식으로 변환한다. 이를 weak 문제라 부르는 이유가 바로

$$a(u,\nu) = <f,\nu> \ \forall \nu \in V, \text{ where} \, a(u,\nu) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \nu \, d\Omega$$

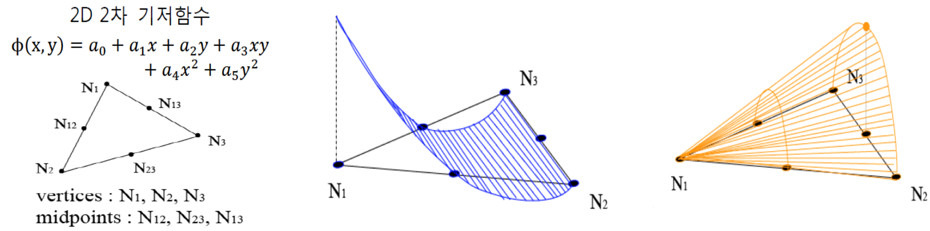
식을 보면 원래 해는 Laplacian 만큼의 미분이 보장되어야 하는 제한점이 있는 반면, 적분형태의 variational 식을 만족하는 해는 한번 미분의 적분값이 유한하기만 해도 되는 약화된 제한조건을 가지기 때문이다. 전체적인 프로세스 개요는 아래와 같다.

1. Weak problem 유도
2. 계산공간의 이산화: node generation, numbering, triangulation
3. 기저함수의 구성: 다항식으로 기저함수 구성, 그 차수에 따라 근사해의 정확도에 변화가 생김
4. 대응하는 선형방정식 구성: Ax = b
5. 선형방정식을 풀어 근사해 완성
6. 에러분석 또는 근사해의 시각화를 통한 검증

2. 이산화



Galerkin 유한요소법은 그 형태가 간단하여 분석이 쉽고, 이를 이산화 시켜 컴퓨터로 계산하는 것도 상당히 용이하여 편미분 방정식의 근사 해를 찾는데 가장 널리 쓰이는 방법 중 하나이다. 다만 Galerkin 유한요소법은 continuous 공간상에서 정의된 성질들이 이산공간의 discrete solution으로 자연스럽게 유도되지 않는다. 즉, 같은 형태의 variational formulation 이더라도 continuous 공간상에서 찾아진 weak solution (원래 편미분 방정식의 해는 strong solution, weak variational formulation의 해는 weak solution이라 불린다)과 이를 계산가능한 공간으로 옮긴 이산체계(discrete system)의 해가 다른 성질을 가질 수 있다. 또한, 각기 다른 성질을 가지는 변수를 가지는 편미분 방정식의 근사 해를 찾을 경우에는 유한요소의(inf-suf condition 이라 불리는 성질을 만족하는) 적당한 짝을 찾는데 제약이 있다. 예를 들어 Navier-Stokes방정식에서 pressure에 대응하는 변수를 standard piecewise linear finite element를 쓰면, velocity에 대응하는 변수는 반드시

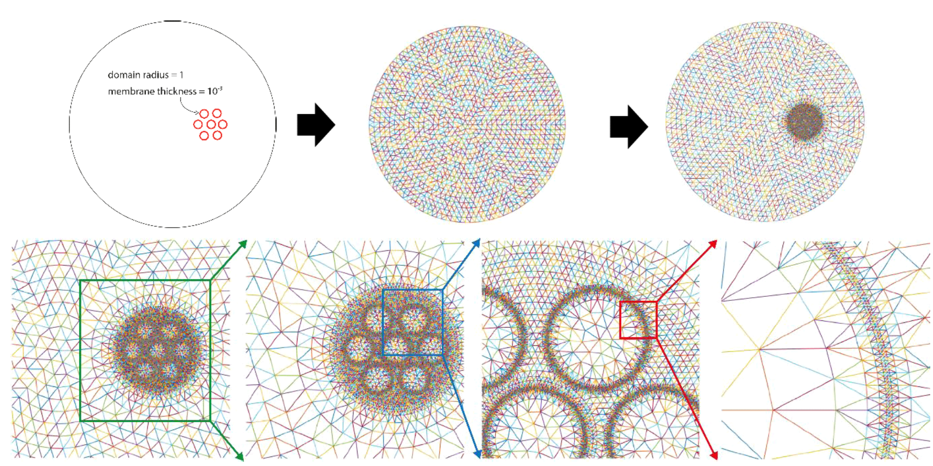



[그림 4] 유한요소 – 2D상에서의 2차 다항기저함수

piecewise quadratic finite element로 그 근사 해를 찾아야 한다. 이에 반해서 최소자승(least-squares) 유한요소법은 continuous 공간에서의 weak solution과 이산체계에서 찾은 해가 자연스럽게 같은 성질을 가지며, 유한요소의 선택에 제약이 없다는 강점이 있다. 최소자승기법은 1794년경 Carl Friedrich Gauss 가 케레스 소행성의 움직임을 예측하기 위해 사용하기 시작하면서 처음으로 명명되었다. 이후 최소자승방법은 많은 분야에서 다양한 형태로 이용되고 있다. 일반적으로 최소자승기법이라 함은 어떠한 방정식을 푸는 과정에서 발생하는 일종의 오차의 제곱의 합을 최소화 시키는 해를 의미한다. 1980년대에 들어서면서 이러한 최소자승방법과 유한요소법을 결합하여 편미분 방정식을 푸는데 이용하기 시작하였고, 이는 현재까지 편미분 방정식의 근사 해를 찾는 한 방법으로써 활발히 이용되고 있으며, 이를 최소자승 유한요소법이라고 부른다. 최소자승 유한요소법에 의해 유도된 weak variational formulation과 그 이산체계는 얻어지는 행렬이 항상 symmetric positive definite 그리고 sparse(행렬의 대부분 원소들이 0으로 이루어진)이기 때문에, 반복법을 이용해서 선형방정식을 푸는 대용량 계산에서 큰 이점을 가진다. 하지만 최소자승 유한요소법의 가장 큰 단점 중 하나는 유체 방정식 등의 mass conservation 관련된 문제를 풀 때 local mass conservation이 완벽하게 보장되지 않는다는 것이다. 최소자승 유한요소법이 가지는 모든 장점과 계산수행의 용이함 등에도 불구하고, 유체를 묘사할 때 mass loss가 일어난다면 유체의 본연의 성질이 사라져 버린 오류를 가진 쓸모없는 근사 해를 얻게 되는 것이다. 또한, 이를 극복하기 위하여 많은 연구가 이루어져 오고 있고, 성공적인 변형들이 제안되고 있다.

### 2-2 적응형 메쉬 세분화(Adaptive Mesh Refinements)

근대에 들어 계산의 양이 방대해지면서 기존의 유한요소법 알고리즘에 '적응형'의 개념을 접목하여 거의 같은 정확도를 가지면서 그 계산량은 아주 적은 양으로 줄일 수 있는 '효율성'을 추구하는 기법들이 제안되어 왔다. 그 대표적인 방법이 적응형 메쉬 세분화(adaptive mesh refinement)이다. 전형적인 유한요소법은 기저함수의 차수를 높이든지 메쉬




[그림 5] 적응형 메쉬 세분화: Heterogeneous 물질로 이루어진 계산 공간

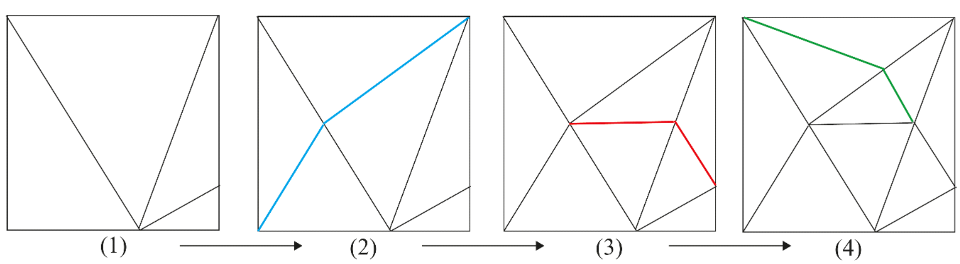
사이즈를 줄여서 근사해의 정확도를 높였었다. 특히 메쉬의 크기를 줄이는 방법은 근사해의 정확도를 높이기 위한 가장 쉬운 방법 중 하나이다. 하지만 그 계산공간이 방대한 경우, 일괄적으로 전 공간에 걸쳐 매번 메쉬를 줄인다면, 특히 3D 계산의 경우, 그 계산량이 어머어마하게 늘어나게 된다. 1989년 M. Berger, J. Oliger, and P. Colella는 dynamic gridding을 위한 "local adaptive mesh refinement" 알고리즘을 발표한다 (M. J. Berger, P. Colella(1989). "Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics". Journal of Computational Physics (Elsevier) vol. 82 pp. 64-84). 적응형 메쉬 세분화는 계산영역을 동적으로 다루는 알고리즘이다. 먼저 coarse 그리드(grid)로 덮힌 전공간에서 문제를 풀어 근사해를 얻는다. 이 과정에서 각각의 그리드 중 세분화가 필요하다고 여겨지는 그리드에 표식을 하고, 표식이 된 그리드들은 세분화를 하여, 다시 한번 부분적으로 세분화가 된 전 계산 공간에서 문제를 푼다. 이런 과정을 통해 얻어진 근사해는 일괄적으로 세분화를 해서 얻은 근사해와 거의 같은 정확도를 가지기도 한다. 물론 어디를 어떻게 세분화 하는가가 적응형 메쉬 세분화 알고리즘의 성패를 좌우하게 된다. 적응형 메쉬 세분화가 잘 되었다면 거의 같은 결과를 훨씬 더 적은 비용으로 얻을 수 있다는 것이 이런 메쉬 세분화의 가장 큰 장점이다.

어디를 어떤 식으로 세분화 하는가에 대한 연구는 많이 이루어지고 있다. 어디를 세분화 할 것인지를 결정하는 방법으로는 residual이 커지는 영역을 고르는 방법이 있다. 예를 들어 $Ax=b$를 풀때 A와 b는 알려져 있지만 x를 모르기 때문에 근사해 y를 구했다고 하더라도 x-y의 크기를 아는 것은 불가능하여(당연히 $|x-y|$가 어떤 특정 그리드 안에서 크면 그 그리드를 세분화 하면 되지만) $|Ax-Ay|$, 즉, $|b-Ay|$의 값을 비교하여 세분화를 할 그리드를 결정한다. 또, 다른 방법으로 에러의 상한이 되는 두 번 미분한 근사해의 크기를 각 그리드 위에서 비교하여 그 값이 크면 세분화를 위한 태깅을 하는 등의 방법이 있다. 이외에도 많은 복잡한 그러나 세련된 알고리즘들이 많이 제안되어져 왔다.

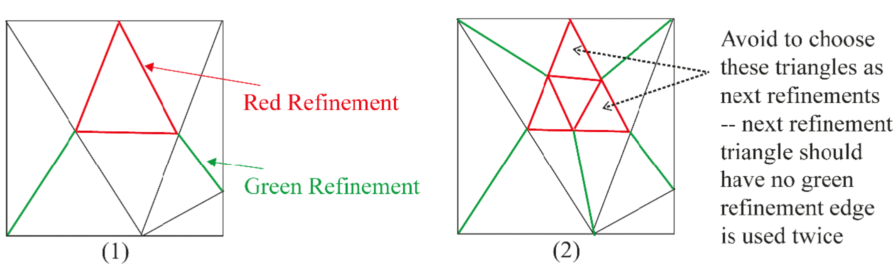
세분화 하는 방법에 대한 연구도 많이 되어왔다. 예를 들어 삼각형 요소들에서 가장 긴 사이드를 항상 반으로 쪼개는 Rivara 세분화가 있고, 삼각형의 요소 안에 같은 형태의 작은 삼각형을 넣어 세분화를 하는 regular 세분화 등 여러 접근방법들이 있다.

### 2-3 비선형 방정식을 위한 유한요소법 - Newton의 기법

많은 물리적, 공학적 현상들은 비선형의 성질을 가진다. 즉, input이 가해지면 이로부터 파생되는 output은 input들의 성질에 선형적으로 의존하여 나타나지 않는다. 모델링을 통해 이런 현상들을 모사하는 비선형 방정식을 구성하고, 이




[그림 6] Rivara 세분화




[그림 7] Regular 세분화

를 이용해 비행기를 띄우고, 우주선을 쏘아 올리며, 물속에서의 잠수함의 충돌을 방지해 왔다. 유한요소법을 이용해 비선형 편미분 방정식을 푸는 방법중 가장 많이 쓰이는 방법중 하나가 '선형화'를 통한 유한요소법이다. 먼저 초기의 guess를 통하여 주어진 값을 바탕으로 비선형 편미분 방정식을 그 값의 주변에서 근사적 선형형태로 전개한다. 선형화 방법중 Taylor 시리즈에 기반을 둔 것이 바로 Newton의 기법이다. 예를 들어 식 f(x) = 0의 해를 찾는 방법을 생각해 보자. 해를 찾기 위해서 먼저 해에 충분히 가까운 초기치 $x_0$를 선택하고, 더 나은 근사치 $x_1$을 다음과 같이 얻는다.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

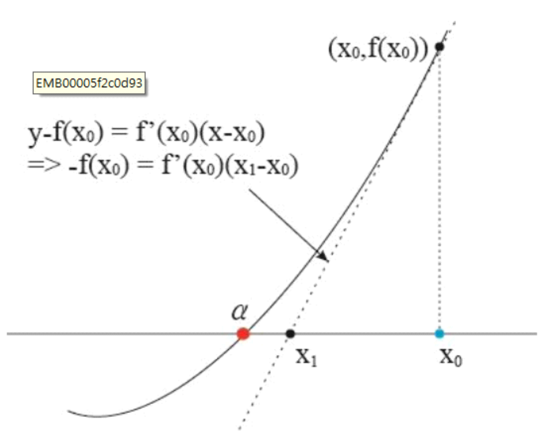
이러한 Newton의 방법은 이차의 수렴성을 가지는 비선형 방정식을 푸는 아주 효율적인 방법이다.

[그림 8]의 기본 개념을 이용한 비선형 편미분 방정식 L(U) = F 의 근사 해를 구하기 위한 Newton 방법의 과정은 다음과 같다. 우선 실해, U에 충분히 가까운 초기치 $U_0$를 가지고 L(U)에 대해 Taylor 전개 형태의 approximation을 보면

$$L(U) \approx L(U_0) + L'(U_0)(U - U_0)$$

이 된다. 여기서 $L'(U_0)(U - U_0)$는 다음과 같이 정의 된 Frechet derivative이다.

$$L'(U)[W] = \lim_{\beta \to 0}(L(U + \beta W) - L(U))/\beta$$




[그림 8] Newton의 방법

원래의 방정식 L(U) = F를 이용하여 선형화된 방정식을 다시 적으면

$$L'(U_0)(U - U_0) = L(U) - L(U_0) = F - L(U_0)$$

가 되고, exact U에 대한 correction 근사항은 바로

$$X = (L'(U_0))^{-1}(F - L(U_0))$$

가 된다. 보통 linear system을 직접적으로 inverse를 하지 않고, Newton의 방법에서는 다음 선형 방정식을 푼다.

$$(L'(U_0)X = F - L(U_0)$$

위 시스템을 풀어 correction X를 구한 다음, $U_1 = U_0 + X$로 얻어지는 값을 next Newton's iterate solution이라 부른다. 이러한 반복을 통해서 다음 단계에서의 해가 업데이트되고, 적당한 허용범위를 만족하는 iteration에서 stop을 하게 되고, 결국은 근사 해를 얻게 된다. 물론 이런 Newton 방법도 초기치 $U_0$가 실해 U에 충분히 가까워야 하고, linear system $L'(U_0)$가 nonsingular여야 하는 등의 조건을 만족할 때만 그 수렴성이 보장이 된다. 여기서 선형화 된 방정식 $L'(U_0)X = F - L(U_0)$을 유한요소법을 이용해 그 근사해를 얻을 수 있다.

## Ⅲ. 전자파 해석영역에서의 활용사례

전자파 해석분야에서 유한요소법이 사용된 구체적인 예시를 살펴보면 아래와 같다.

- 유한요소법과 전계-열전자 방출 모델에 의한 절연유체 내 공간 전하 전파해석: 절연유체 내 공간전하 해석을 위하여 푸아송 방정식, 양이온, 음이온, 전자에 대한 전하연속 방정식, 온도에 대한 열 확산 방정식으로 이루어진 5개의 지배방정식에 Fowler-Nordheim의 전계 방출과 Richardson-Dushman의 열전자 방출을 경계조건으로 부여하고, 이를 유한요소법을 이용하여 해석[1].
- 무선주파수 간 절제술을 위한 3차공간 유한요소기법: 무선주파수(RF) 간 절제술은 간암을 치료하는 대안이 되는 기술임. 유한요소법을 이용해 4개의 RF 프로브, 간, 혈관들을 가지는 3D 열전기 모델을 구성하고, 절제

과정을 시뮬레이션함[2].

- 유한요소법을 이용한 단일 또는 이중주기 수동구조에 의한 음향파의 산란을 분석[3].
- 쓰나미 파동의 전파 분석을 위한 유한요소법을 이용한 수치적 시뮬레이션과 그 분석[4].
- 유한요소법을 통한 주파수 선택적 표면으로부터의 평면파 산란 분석: 반사 및 투과 계수, 유효 유전율 및 입사 평면파에 대한 주기 구조의 투과성 분석에 유한요소법 이용[5].
- 스펙트럼 유한요소법을 이용한 종파 전파를 통한 구조물 손상 탐지: 계산 및 실험 연구를 이용한 축 방향파 전파 기술을 통한 콘크리트 파일 요소 손상 확인 연구. 많은 주파수 영역 방법 중에서 스펙트럼 SFEM (Spectral Finite Element Method)은 실제 공학 구조물에서 파 전파의 분석에 적합하다고 잘 알려짐[6].
- 유한요소법을 이용한 파 전파 해석을 위한 비 반사 경계: 무한히 긴 판에서 파 전파의 해석을 위한 유한요소법을 제시. 결함이 있거나 없는 판 구조 전반에 걸쳐 정상 상태 파 전파 특성을 연구하기 위하여 유한요소 모델의 유한 경계에 의해 생성된 가짜 반사가 없도록 비 반사 경계 조건을 달성하는 방법 소개[7].
- 유한요소법을 이용한 키로 웨이브 가이드의 전파 해석: 키로 웨이브 가이드, 즉 키랄 매체를 포함하는 도파관의 전파 분석을 위하여 키랄 매체를 포함하여 임의의 선형 조성을 가진 수많은 비균질 도파관 구조가 비 물리적 또는 허위 모드가 없이 분석될 수 있도록 하는 방식을 제안. 유한요소 결과를 정확한 솔루션과 비교되며, 대응성은 우수함이 밝힘[8].
- Functionally graded beam에서 웨이브 전파 분석을 위한 스펙트럼으로 공식화 된 유한 요소: 고주파 임펄스 로딩을 받는 기능적으로 등급이 매겨진(FG) 빔에서 웨이브 전파 거동을 분석하기 위해 스펙트럼 유한요소법을 사용[9].
- 유한요소법을 통한 광 결정 섬유로의 전파 특성의 완전 해석: 유한요소법을 사용하여 가장 낮은 전자기 모드의 광 결정 광섬유에 대한 정확한 벡터 분석을 제안[10].
- 유한요소법에 의한 무선 전자기장의 3차원 해석: 유한요소법을 통한 무선 전자기장의 3차원 해석 공식 및 타당한 계산법 제시[11].
- 타임 스텝핑 유한요소법을 이용한 새로운 자기 기어식 풍력발전기의 전자기 설계 및 해석: 풍력발전을 위한 새로운 영구 자석(PM) 기계를 제시. 타임스텝핑 유한요소법(TSFEM)을 이용하여 제안된 기계의 전자 기적 특성을 분석하여 시스템의 유효성을 검증[12].
- 유한요소법을 이용한 도파로의 탄성파 전파 모델링: 엔지니어링 구성 요소의 구조적 무결성을 비파괴적으로 결정하기 위한 유도파 기법의 적용. 유한요소법을 이용하여 환형 구조에서 초음파의 전파 특성 분석. 제안된 유한요소기법의 정확성을 증명하기 위해 먼저 평판에서 유도파의 전파를 검사하고, 두꺼운 링 구조에서 유도파 전파를 조사 후 유한요소 계산 결과와 실험 결과와 비교 분석. 이 연구의 결과는 유도된 파 전파 문제를 모델링하는데 유한요소법을 사용하는 효과를 명확하게 보여 주며 "복잡한" 구성 요소 형상으로 인해 해석 솔루션을 사용할 수 없는 경우, 문제에 대한 유한요소방법의 잠재력을 입증[13].
- 무작위 거친 표면에 의한 물결 산란의 몬테가를로 모의에 대한 유한 요소법의 적용, 침투성의 경우: 무작위 거친 표면 산란의 몬테카를로 시뮬레이션의 유한요소법(FEM)은 관통할 수 있는 거친 표면 산란으로 확장됨. 이 방법의 가장 큰 장점은 유도된 선형 시스템이 banded 형태의(0이 아닌 항들이 오직 몇 개의 띠 형식으로 나열되어 있는) 매트릭스를 산출하여 그 계산량을 다른 접근방법들에 비해 상당히 많이 줄일 수 있다는 것임[14].
- 전자기학에서의 고유치 문제에 대한 유한요소법: 유한요소법은 전자기학의 다양한 영역에서 많은 복잡한 문제를 해결하는 데 매우 강력한 도구임을 예를 통해 보임[15].
- 전자기학에서 하이브리드 유한요소법의 응용: 유한요소법과 전자기 문제의 경계요소법을 결합하는 개념을 소개. 일반적인 방정식이 도출되어, 2차원 및 3차원의 여러 사례에 대해 예제 제공[16].
- 열대 지방의 강우량에 의한 전파의 감쇠, 위상 회전 및 교차 편파 계산: 유한요소법을 사용하여 열대 지역

의 비에 의한 전파의 감쇠, 위상 회전 및 교차 편파를 계산[17].

- 다른 기법을 적용한 직사각형 패치 안테나의 유한요소 모델링 및 설계: 3차원 구조의 마이크로 스트립 패치 안테나에 대한 유한요소 계산과 수치 해석을 제시. 직사각형 패치를 기반으로 하는 두 개의 서로 다른 디자인이 모델링을 분석[18].
- 전자빔 유한요소법 시뮬레이션을 이용한 정전기장 제거용 연성 X-선관 설계 특성 연구: X선 음극관의 확산관을 전자기 유한요소법으로 설계. 연성 X선관 모델링의 형상 설계와 구체적인 좌표 성능을 분석하기 위해 전자빔 궤도를 OPERA-3D SW 프로그램으로 시뮬레이션[19].
- 자체 전류로 인한 원통형 코일에 작용하는 전자기력의 분석 및 유한요소법 기반 계산: 원통형 코일의 다른 부분은 그것을 통과하는 전류로 인해 전자기력에 노출되고, 이로 인해 코일을 축 방향 및 반경 방향으로 변형시킬 수 있음. 많은 자기 장치에서 원통형 코일의 설계 과정에서 이러한 종류의 코일의 다른 부분에 가해지는 기계적 응력이 결정되어야 하고, 이를 계산하기 위해 축 방향의 힘에 대한 해석식을 유도하여 이를 유한요소법을 이용해서 분석함[20].
- 단상 유도 기계의 전자기 특성의 3D 유한요소법 계산: 3상 유도 기계와 비교하여 현대의 단상 유도 기계는 일반적으로 비틀어진 로터를 갖지만, 시동시에는 타원 자기장 발생시킴. 이러한 기계의 시운전을 적절히 모델링하기 위하여 3D 특성을 고려한 유한요소기법을 적용시킴[21].
- 단상 음극 모터에서의 전자기장 계산: Micron-Tech사의 AKO-16 단상 음영 극 모터 내부의 전자기장 계산에 유한요소법을 사용함. 유한요소법 적용을 위한 네 가지 모터 모델이 개발하고 제안함[22].
- 유한요소법을 이용한 전기 기계 전자기장 계산: 유한요소법은 물체 내부의 전자기장 분포를 결정하기 위해 널리 쓰이는 수치적 방법으로 이 논문에서는 3가지 유도 모터를 유한요소법을 이용해 분석함[23].
- 운동을 고려한 전기기계의 유한요소 토크 계산: 전기기계에서 회전 각의 함수로서 토크를 계산하기 위해 제안된 여러가지 방법을 유한요소법을 통해 통합[24].
- 유한요소법을 이용한 삼상 변압기의 단락 리액턴스 및 전자력 계산: 전압기에서 누설 리액턴스를 측정하고, 코일에 작용하는 전자기력을 분석하는 새롭고 간단한 절차를 제안. 유한요소법을 이용하여 제조 전에 설계 과정 내에서 변압기를 모델링하고, 변압기 상태를 분석함[25].
- 유한요소법을 이용한 미세 가공용 초음파 진동 공구 혼의 설계: 유한요소 해석을 통해 얻은 프로토타입을 기반으로 초음파 혼을 설계하고, 유한요소법으로 시뮬레이션을 한 초음파 툴 혼은 레이저 진동계 및 전기 임피던스 분석을 통해 실험적으로 구축되고, 특성 분석이 되어지고 있음. 초음파 혼의 고유 진동수와 초음파 혼 형태의 최적 설계를 위한 유한요소법적 해석을 개발 제안[26].
- 금 나노 입자 이합체 플라즈몬 현상: 표면 강화 라만 분광법에 대한 전자기 강화의 유한요소법 계산: 실험적 나노 태그 후에 모델링된 90 nm Au 나노 입자 이합체에 대한 표면 강화 라만 분광법(SERS)에 대한 흡광 스펙트럼과 전자기(EM) 기여도를 결정하기 위해 유한요소법 계산이 수행됨[27].

위에서 소개된 연구 이외에도 전자파 해석 영역에서 유한요소법을 이용한 많은 연구가 이루어지고 있음을 위 문헌들에 소개된 참고자료들과 다른 문헌들을 통해 알 수 있다.

## Ⅳ. 결 론

1950년도 초반부터 두각을 나타내기 시작한 유한요소법은 방정식의 근사 수치해를 얻어내는 가장 우수하고, 그 응용이 용이한 기법 중 하나이다. 불과 60～70여년이 지났지만, 유한요소법은 그 응용 능력뿐만 아니라, 수학적 이론에 있어서도 현재 그 절정에 달했다고 여겨지고 있다. 초기의 유한요소법은 토목과 항공 공학의 complex elasticity와 structural analysis 분야 문제를 푸는데 주로 사용되었으나, 현재 거의 모든 이･공학 영역에 적용되어 많은 성공적인 결과를 내고 있고, 이에 상응하여 쉽게 구할 수 있는 상업적, 비상업적 툴박스들이 산재한다. 국내에서도 각 연구소

와 대학, 기업에서 자체적으로 개발한, 필요에 의해 특별한 형태의 문제에 맞게 제작된, 유한요소법 코드를 많이 사용하고 있다. 다만 국내에서 쓰이고 있는 상업적 유한요소법 툴박스들이 모두 비싼 외산이라는 점에서 전자파 해석에 우수성을 가지는 국산 유한요소법 패키지의 개발 여건이 갖추어지기를 희망한다.

## 참 고 문 헌


[1] 이호영, 이세희, "유한요소법과 전계-열전자 방출 모델에 의한 절연유체 내 공간전하 전파해석", 전기학회논문지, 58(10), 2011-2015, 2009년.

[2] S. Tungjitkusolmun *et al*., "Three-dimensional finite-element analyses for radio-frequency hepatic tumor ablation", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 49, no. pp. 3-9, 2002.

[3] P. Langlet, A. Hladky-Hennion, and J. Decarpigny, "Analysis of the propagation of plane acoustic waves in passive periodic materials using the finite element method", *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 98, no. 5, pp. 2792, 1995.

[4] M. Kawahara, N. Takeuchi and T. Yoshida, "Two step explicit finite element method for tsunami wave propagation analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, no. 2, pp. 331-351, 1978.

[5] I. Bardi, R. Remski, D. Perry and Z. Cendes, "Plane wave scattering from frequency-selective surfaces by the finite-element method", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 38, no. 2, pp. 641-644, 2002.

[6] K. Kumar, S. Varun, T. Saravanan, R. Sreekala, N. Gopalakrishnan, and K. M. Mini, "Structural damage detection through longitudinal wave propagation using spectral finite element method", *Geomechanics & Engineering*, vol. 12, no. 1, pp. 161-183, 2017.

[7] G. R. Liu, S. S. Quek Jerry, "A non-reflecting boundary for analyzing wave propagation using the finite element method", *Finite Elements in Analysis and Design,* vol. 39 no. 5-6, pp. 403-417, 2001.

[8] J. A. M. Svedin, "Propagation analysis of chirowave guides using the finite- element method", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 38 no. 10 pp 1488-1496, 1990.

[9] A. Chakraborty, S. Gopalakrishnan, "A spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, no. 10, pp. 2421-2448, 2003.

[10] F. Brechet, J. Marcou, D. Pagnoux, and P. Roy, "Complete analysis of the characteristics of propagation into photonic crystal fibers, by the finite element method", *Optical Fiber Technology*, vol. 6, no. 2, pp. 181-191, 2000.

[11] M. Hara, T. Wada, T. Fukasawa, and F. Kikuchi, "A three dimensional analysis of RF electromagnetic fields by the finite element method", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 19, no. 6, pp. 2417-2420, 1983.

[12] L. Jian, G. Xu, Y. Gong, J. Song, J. Liang, and M. Chang, "Electromagnetic design and analysis of a novel magnetic-gear-integrated wind power generator using time-stepping finite element method", *Progress in Electromagnetics Research*, vol. 113, pp. 351-367, 2011.

[13] M. Friedrich, J. J. Laurence, and Q. Jianmin, "Modeling elastic wave propagation in waveguides with the finite element method", *NDT and E International*, vol. 32, no. 4, pp. 225- 234, 1998.

[14] S. H. Lou, L. Tsang, and C. H. Chan, "Application of the finite element method to Monte Carlo simulations of scattering of waves by random rough surfaces: penetrable case", *Waves in Random Media*(New to Taylor & Francis for 2005) 1991.

[15] C. J. Reddy, Manohar D. Deshpande, C. R. Cockrell, and Fred B. Beck. "Finite element method for eigenvalue problems in electromagnetics", *NASA Technical Paper*, 1998 Technical Report.

[16] S. J. Salon, J. D'Angelo, "Applications of the hybrid finite element-boundary element method in electromagnetics", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 24, no. 1, pp. 80-85, 1988.

[17] S. O. Ajose, N. O. Sadiku, and U. Goni, "Computation of attenuation, phase rotation, and cross-polarization of radio waves due to rainfall in tropical regions", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, no. 1 pp. 1-5, 1995.
[18] R. Aroral *et al.*, "Finite element modeling and design of rectangular patch antenna with different feeding techniques". *Open Journal of Antennas and Propagation*, vol. 1, no. 2, pp. 11-17, 2013.
[19] 박태영, 이상석, 박래준, "전자기 유한요소법 전자빔 시뮬레이션을 이용한 정전기장 제거용 연한 X-선관 설계 특성 연구". 한국자기학회지, 24(2), 66-69, 2014년.
[20] A. Shiri, D. E. Moghadam, "Analytical and FEM based calculation of electromagnetic forces exerted on cylindrical coils due to their own current", *The Applied Computational Electromagnetics Society*, vo. 27, no. 11, pp. 866-872, 2012.
[21] J. Bacher, F. Waldhart, and A. Muetze, "3-D FEM calculation of electromagnetic properties of single-phase induction machines", *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 30, no. 1, pp. 142-149, 2015.
[22] V. J. Sarac, D. M. Cundev, "Electromagnetic fields calculation at single phase shaded pole motor", *Electrotechnica & Electronica*, vol. 47, pp. 41-45, 2012.
[23] V. Sarac, G. Stefanov, "Calculation of electromagnetic fields in electrical machines using finite elements method", *International Journal of Engineering and Industries*, vol. 2, no. 1, pp. 21-29, 2011.
[24] N. Sadowski, Y. Lefevre, M. Lajoie-Mazenc, and J. Cros, "Finite element torque calculation in electrical machines while considering the movement", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 28, no. 2, pp. 1410-1413, 1992.
[25] S. Jamali, M. Ardebili, and K. Abbaszadeh, "Calculation of short circuit reactance and electromagnetic forces in three phase transformer by finite element method", *Electrical Machines and Systems, 2005. ICEMS*, vol. 3, pp. 1725-1730, 2005.
[26] 이봉구, 김광래, 김강은, "유한요소법을 이용한 초음파 진동 공구혼 설계에 관한 연구", 한국생산제조학회지, 17(6), pp. 63-70, 2008년.
[27] J. M. McMahon *et al.*, "Gold nanoparticle dimer plasmonics: finite element method calculations of the electromagnetic enhancement to surface-enhanced Raman spectroscopy", *Analytical and Bioanalytical Chemistry*, vol. 394, no. 7, pp. 1819-1825, 2009.

≡ 필자소개 ≡

이 은 정

1997년 2월: 경북대학교 수학과 (이학사)
1999년 2월: 경북대학교 수학과 (이학석사)
2005년 8월: University of Colorado at Boulder (이학박사)
2005년 9월~2007년 8월: 콜로라도 주립대학 연구원
2007년 9월~2009년 8월: 플로리다 주립대학 연구원
2009년 9월~2013년 8월: 연세대학교 계산과학공학과 조교수
2013년 9월~현재: 연세대학교 계산과학공학과 부교수
[주 관심분야] 유한유소법, EIT 관련 역문제, 이미지분석, 의료영상분석을 위한 기계학습과 딥러닝