

대용변수를 이용한 가변형 부분군 크기 \bar{X} 관리도의 경제적 설계

이태훈* · 이민구** · 권혁무*** · 홍성훈**** · 이주호**†

*한국원자력연구원 고온가스로개발부
**충남대학교 정보통계학과
***부경대학교 시스템경영공학부
****전북대학교 산업시스템공학과

Economic Design of Variable Sample Size \bar{X} Control Chart Using a Surrogate Variable

Lee, Tae Hoon* · Lee, Min Koo** · Kwon, Hyuck Moo*** · Hong, Sung Hoon*** · Lee, Jooho**†

*VHTR Development Division, Korea Atomic Energy Research Institute

**Department of Information and Statistics, Chungnam National University

***Division of Systems Management and Engineering, Pukyong National University

****Department of Industrial & Systems Engineering, Chonbuk National University

ABSTRACT

Purpose: This paper proposes a VSS(Variable Sample Size) \bar{X} control chart using surrogate variable and shows its effectiveness compared with FSS(Fixed Sample Size) \bar{X} control chart using either performance variable or surrogate variable.

Methods: The expected cost function of VSS \bar{X} control chart is derived. The optimal designs are then found for numerical examples using a GA(genetic algorithm) and compared to those of the FSS \bar{X} control charts.

Results: Computational results show that VSS \bar{X} control chart using surrogate variables is superior to FSS \bar{X} control chart using either performance variable or surrogate variable from the economic view points.

Conclusion: The proposed VSS \bar{X} control chart will be useful in industry fields where a performance variable is not available or too costly.

Key Words: Economic Design, Variable Sample Size, Performance Variable, Surrogate Variable, Fixed Sample Size

● Received 17 November 2017, 1st revised 28 November, accepted 29 November 2017

† Corresponding Author(jooholee@cnu.ac.kr)

© 2017, The Korean Society for Quality Management

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-Commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

※ 이 연구는 2015년도 충남대학교 학술연구비에 의해 지원되었음.

1. 서 론

관리도는 벨 연구소의 통계학자였던 Shewhart가 처음 소개한 이후, 다양한 산업현장 뿐만 아니라 서비스업에서도 광범위하게 사용되고 있는 품질 관리 기법중의 하나이다. 초기의 관리도는 부분군의 크기, 부분군의 채취 간격 및 관리 한계선이 고정되어 있어서, 작은 공정의 변화를 감지하는 민감도가 떨어진다는 단점이 있다. 이러한 단점을 보완하기 위한 방법으로 Lucas and Saccucci(1990)는 지수가중평균(EWMA) 관리도를 제시하였고, Lucas(1982)는 Shewhart 관리도에 누적합(CUSUM) 관리도를 결합한 관리도를 제시하기도 하였다. 하지만 이들 관리도도 일정한 크기의 표본을 일정한 간격으로 추출하는 것은 동일하였다. Prabhu et al.(1993), Costa(1994) 등은 표본 통계량이 타점되는 위치가 중앙선에 가까울 경우엔 부분군 크기를 작게 하고 경고한계선과 조치한계선 사이일 경우엔 부분군의 크기를 크게 함으로써 관리도의 효율을 높인 VSS(Variable Sample Size : 가변형 부분군 크기) \bar{X} 관리도를 제안하였다.

한편 Duncan(1956)은 관리도에 경제적인 개념을 최초로 도입하여 \bar{X} 관리도의 경제적인 모형을 제시하였고, 이를 단일 이상원인에 대한 모형에서 복합 이상원인에 대한 모형(Duncan, 1971)으로 확대 제시하였다. Park and Reynolds(1994)는 Duncan의 모형을 기반으로 VSS를 적용한 \bar{X} 관리도의 경제적 모형을 제시하기도 하였다. 통계적 품질관리의 역사적 흐름과 적응형 관리도에 대한 상세한 비교 결과는 Kwon(2016) 및 Lim(2008)에서 살펴 볼 수 있다.

앞에서 언급한 모든 연구들은 검사 또는 측정 대상이 되는 제품의 직접적인 특성 즉 성능변수를 직접 관리하는 것을 다루었다. 그러나 최근 공장자동화가 산업현장에 널리 확산됨으로 인하여 제품의 검사 또한 자동검사장치를 이용한 검사방법이 많이 사용되고 있다. 또한 원자력분야의 비파괴 검사나 건설 현장 등에서는 제품의 특성을 직접 측정하는 것이 불가능하거나 혹은 측정비용이 고가이거나 파괴검사인 경우가 발생하는데, 이러한 경우에는 성능 변수를 직접 측정하는 대신 이와 상관관계가 높은 대용변수를 사용하여 측정하게 된다. X-ray, Gamma-Ray, Beta-Ray, 초음파 및 진류 등을 이용한 대용검사 방법은 간접적인 측정 방법으로서 검사 비용이 적게 들고 검사의 효율성을 높일 수 있다는 장점이 있는 반면에 검사 시 측정 오류가 발생할 수 있다는 단점이 있다.

대용변수를 이용한 검사에서 검사의 기준값을 설정하는 문제에 대해서는 그 동안 Owen and Boddie(1976) 이후에 많은 연구가 진행되어왔으나, 관리도의 설계에 관해서는 대부분 성능변수를 이용한 연구로 제한되어 있다. Lee and Kwon(1999)이 성능변수와 대용변수를 함께 이용한 \bar{X} 관리도를 처음 제시한 이후 Costa and De Magalhães(2002)가 Lee and Kwon(1999)의 모형을 변형한 경제적 모형을 제시하고 마코브 연쇄를 이용하여 모형의 최적해를 구하였다. 이들의 연구는 공정상에서 성능변수와 대용변수를 번갈아 사용한다는 것을 가정하였다. 그러나 실제 공정상에서 두 변수를 번갈아 가면서 사용하는 것이 비효율적이거나 물리적으로 불가능하거나 번거로울 수 있다. 또한 대부분의 산업현장에서는 성능변수와 대용변수를 함께 이용하기 위해서 공정을 정지하는 것이 비용 및 시간 면에서 손실이 클 수 있다. 이러한 경우 성능변수의 특성을 잘 대변할 수 있는 대용변수를 이용하면 공정 관리가 보다 효율적이며 비용을 절감할 수 있다.

이에 Lee et al. (2009)는 Duncan(1956)의 모형을 기본으로 성능변수 대신에 대용변수를 사용하여 고정된 부분군 채취 간격과 부분군 크기로 공정을 모니터링할 경우에 경제적 관점 하에서 \bar{X} 관리도를 설계하였다. 그 결과 성능변수로 공정을 관리하는 방법에 비해 보다 경제적인 부분군의 채취 간격과 부분군 크기에 대한 설계 모수를 도출하였다. 하지만 Lee et al.(2009)이 제안한 모형은 공정을 모니터링할 때 고정된 변수를 활용하기 때문에 공정 운영의

유연성이 떨어지고 부분군 채취 간격 등이 고정되어 있으므로 공정의 이상을 탐지하는데 시간이 허비될 수 있는 문제점이 있다. Lee et al.(2013)은 이러한 단점을 보완하기 위해서 Lee et al.(2009)의 모형에 가변형 부분군 채취 간격을 적용하여 공정을 모니터링 할 경우의 VSI \bar{X} 관리도 설계 방법을 제안하였다. 그러나 성능변수 대신에 대응변수를 사용하여 공정을 모니터링하는 경우에 대한 VSS \bar{X} 관리도는 아직 연구가 없는 상태이다. 따라서 본 논문에서는 Lee et al.(2009)의 모형에 가변형 부분군 크기를 적용하여 공정을 모니터링 할 경우의 \bar{X} 관리도 설계 방법을 제안하고 이를 다양한 수치 예제를 통하여 그 효용성을 확인하고자 한다. 본 논문의 2절에서는 본 관리도의 설계의 기본 가정 및 공정 관리 절차를 소개하고, 3절에서는 VSS \bar{X} 관리도의 경제적 모형을 설계하고 다양한 수치 예제에 대한 최적해를 구하여 FSS \bar{X} 관리도와 비교하며, 4장에서는 결과를 요약하고 결론을 맺는다.

2. 대응변수를 이용한 VSS \bar{X} 관리도의 절차

기존의 VSS \bar{X} 관리도에서는 관리도상의 경고한계선 내에서는 부분군의 채취 크기를 작게 하고, 경고한계선과 조치한계선 사이에서는 부분군의 채취 크기를 크게 하며, 조치한계선을 벗어난 경우에는 공정을 정지하고 이상원인 유무를 조사한다. 본 절에서는 VSS \bar{X} 관리도에서 성능변수 대신에 대응변수를 이용하여 공정을 모니터링 하는 방법을 제안한다. 대응변수를 이용한 공정이 조치한계선과 그 바로 안쪽의 한계선 사이에 있을 경우에는 공정을 진행 하면서 이상원인의 유무를 조사한다고 가정하였다.

2.1 공정 관리에 관한 가정

- ① 공정은 관리상태에서 시작한다. 관리상태에서의 공정은 평균이 $\mu_{y,0}$ 이고 표준편차가 σ_y 인 정규분포를 따른다.
- ② 이상원인이 발생하면 공정 평균은 $c\sigma_y$ 만큼 변화한다.
- ③ 이상원인의 발생시간은 평균이 $1/\lambda$ 인 지수분포를 따른다.
- ④ 성능변수 Y 와 대응변수 X 는 평균이 (μ_y, μ_x) 이고 분산이 (σ_y^2, σ_x^2) 이며 상관계수가 ρ 인 이변량 정규분포를 따른다.
- ⑤ 관리도는 $m(m \geq 2)$ 쌍의 한계선 $\mu_{x,0} \pm k_j(\sigma_x/\sqrt{n_j})$ ($j = 1, 2, \dots, m$) (단, $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$)으로 구성되어 있으며, 부분군 평균이 밖에서 j 번째와 $(j+1)$ 번째 한계선 사이에 있을 때에는 크기 n_j (단, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$)인 부분군을 채취한다.
- ⑥ 부분군 평균이 조치한계선 $\mu_{x,0} \pm k_1(\sigma_x/\sqrt{n_1})$ 내에 있으나 그 바로 안쪽의 한계선 $\mu_{x,0} \pm k_2(\sigma_x/\sqrt{n_2})$ ($m=2$ 인 경우 경고한계선에 해당) 밖에 있으면 공정은 계속해서 진행하지만 공정의 이상 유무를 조사한다. 조사 결과, 공정에 이상이 없으면 공정을 계속 진행하고, 관리이탈상태로 판정되면 공정을 즉시 중단하고 이상원인을 완전히 제거한 후 공정을 재개한다.
- ⑦ 부분군 평균이 조치한계선 $\mu_{x,0} \pm k_1(\sigma_x/\sqrt{n_1})$ 을 벗어난 경우에는 공정을 중단하고 공정의 이상 유무를 조사한다. 조사 결과, 공정에 이상이 없으면 즉시 공정을 재개하고, 관리이탈상태로 판정되면 이상원인을 완전히 제거한 후 공정을 재개한다.

2.2 시간 및 비용 모수에 관한 가정

- ① 이상상태에서의 시간은 이상원인의 발생으로 인해 관리이탈상태로 있는 시간이다.
- ② 거짓 경보로 인한 시간(b_2)은 공정이 관리상태이나 공정이 변했다는 신호가 발생하여 이 신호가 거짓임을 판단하는데 소요되는 시간이다.
- ③ 이상원인을 찾고 제거하는 시간(b_1' 과 b_1'')은 이상원인의 발생으로 인해 이상원인의 추적, 판단 및 제거에 필요한 시간이다.
- ④ 부분군의 추출과 시험에 필요한 표본비용은 표본의 크기에 비례하는 가변비용(a_3)과 표본크기에 관계없이 일정한 고정비용(a_4)으로 구성된다.
- ⑤ 이상원인 발생에 따른 비용은 이상원인의 발생 유무를 판단하고 제거하는 데 소요되는 비용으로 거짓 경보를 확인하는 비용(a_2')과 거짓 경보로 인한 제품손실비용(a_2''), 그리고 이상원인의 발견 및 제거에 드는 비용(a_1)이 있다.
- ⑥ 관리상태에서의 순수입(시간당 i_1)은 관리상태에서 공정이 운영되는 동안에 발생하는 수입이다
- ⑦ 이상상태에서의 순수입(시간당 i_2)은 이상상태에서도 공정이 운영되므로 발생하는 수입이다. 이때 거짓 경보로 인한 이상상태일 경우엔 양의 수입이 발생하고 실제 이상상태일 경우에는 음의 수입이 발생한다.

2.3 공정 관리의 절차

- ① h 의 부분군 채취 간격으로 $n_j(j = 2, \dots, m)$ 개의 표본을 채취한다
- ② 부분군 평균이 타점되는 위치에 따라서 다음의 과정을 거친다.
 - 1) 조치한계선 바로 안쪽의 한계선($m=2$ 인 경우 경고한계선에 해당) 이내에 타점되는 경우: 부분군 평균이 $\mu_{x,0} \pm k_j(\sigma_x / \sqrt{n_j})$ ($j = 1, 2, \dots, m$) 내에 있을 경우에는 다음 공정 부분군 크기를 n_j 로 변경하여 ①의 과정을 계속한다.
 - 2) 조치한계선과 그 바로 안쪽의 한계선 사이에 타점되는 경우: 공정 부분군의 크기를 n_1 으로 변경하고, 공정을 진행하면서 관리상태 이탈 유무를 조사한다. 경보가 거짓일 경우에는 ①의 과정을 계속하고, 사실일 경우에는 공정을 중단하고 이상원인을 제거한 후 공정을 재개하여 ①의 과정을 계속한다.
 - 3) 조치한계선을 벗어나면 공정을 중단시키고 관리상태의 이탈 유무를 조사한다. 경보가 거짓일 경우에는 공정을 다시 진행하면서 ①의 과정을 계속하고, 사실일 경우에는 이상원인을 제거한 후 공정을 재개하고 ①의 과정을 계속한다.

이상의 공정관리 절차를 순서도로 표현하면 Figure 1과 같다.

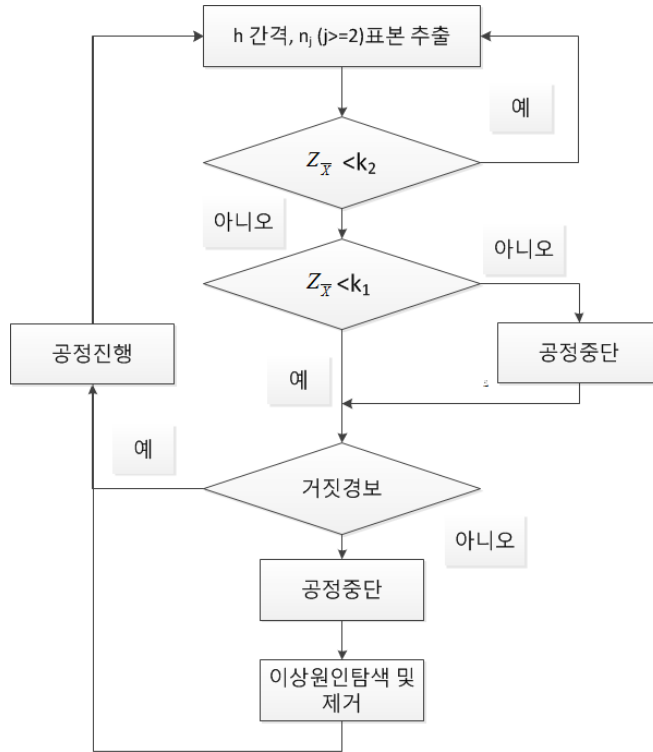


Figure 1. VSS \bar{X} control chart procedure

3. VSS \bar{X} 관리도의 경제적 모형

본 절에서는 2절의 가정과 절차를 이용하여 대응변수를 이용한 VSS \bar{X} 관리도의 경제적 모형을 설계하고자 한다. 부분군 평균이 x 일 때의 부분군의 크기를 $d(x)$ 로 표현하면 $x = \bar{X}_i$ 를 타점함으로써 다음 부분군의 크기를 결정할 수 있다. 먼저 조치한계선 안의 영역을 다음과 같이 m 개의 세부 영역으로 분할한다.

$$I_j = \begin{cases} \left(\mu_{x,0} - k_j \frac{\sigma_x}{\sqrt{n_m}}, \mu_{x,0} - k_{j+1} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n_m}} \right) \cup \left(\mu_{x,0} + k_{j+1} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n_m}}, \mu_{x,0} + k_j \frac{\sigma_x}{\sqrt{n_m}} \right), & j = 1, \dots, m-1 \\ \left(\mu_{x,0} - k_j \frac{\sigma_x}{\sqrt{n_m}}, \mu_{x,0} + k_j \frac{\sigma_x}{\sqrt{n_m}} \right), & j = m \end{cases} \quad (1)$$

i 번째 부분군의 평균이 I_j 에 속할 경우 $(i+1)$ 번째 부분군의 크기는 $d(\bar{X}_i) = n_j$ 가 된다. 이를 도식화 하면 Figure 2와 같다.

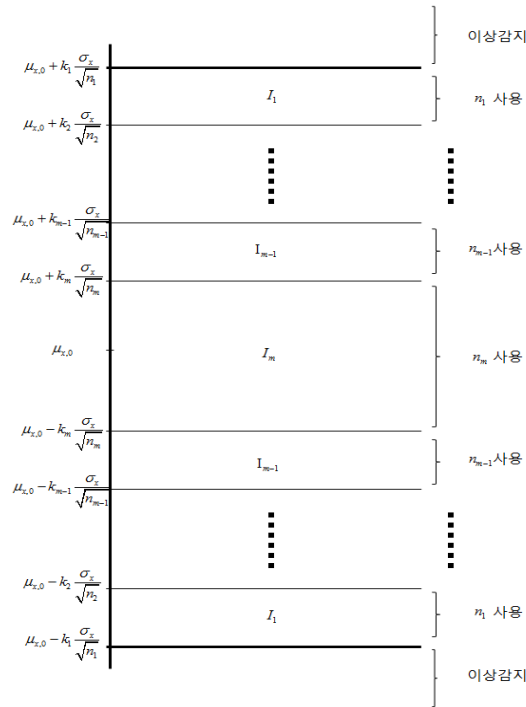


Figure 2. VSS \bar{X} control chart model

3.1 기대주기시간

본 절에서 제안하는 경제적 관리도 설계모형은 단위 시간당 기대수익을 최대화하도록 설계모수 (n_j, h, k_j) ($j=2, 3, \dots$)의 값을 결정하는 것이다. 이는 재생보상과정(renewal process)이므로 단위 시간당 기대수익은 단위 주기당 기대수익과 기대주기시간의 비로 표현할 수 있다(Ross, 1983).

먼저 기대주기시간은 관리상태에서의 시간, 이상상태에서의 시간, 거짓 경보로 인해 경과한 시간 및 이상원인을 찾고 제거하는 시간으로 구성되며 Figure 3과 같이 나타낼 수 있다.

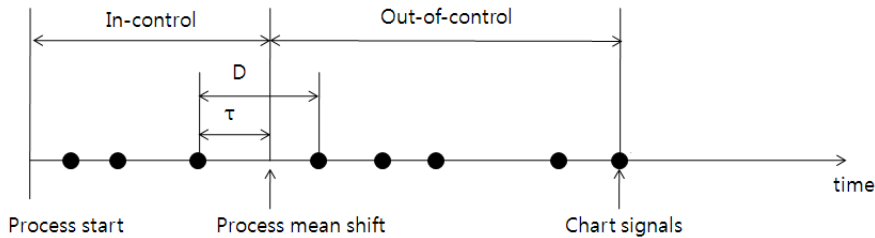


Figure 3. Composition of unit cycle time

① 관리상태에서의 기대시간

공정을 시작하여 이상원인이 발생할 때까지의 시간이다. 이상원인의 발생은 지수분포를 따르므로 관리상태에서의 기대시간은 $1/\lambda$ 이다

$$E(IC) = 1/\lambda \tag{2}$$

② 이상상태에서의 기대시간

공정 평균이 $c\sigma_y$ 만큼 변했을 때 관리도에서 관리상태를 이탈했다는 신호가 나타날 때까지의 시간이다. 본 모형에서는 \bar{X} 가 I_1 영역에 타점될 경우에 공정을 진행하면서 공정의 이탈상태여부를 조사하므로, I_2 에서 I_m 영역에서 계속 타점되는 경우에만 관리도에서 이상상태를 탐지하지 못한다. 이상상태에서의 기대시간은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(OC) = h[(E(N_s) + 1) \cdot P(S_1 \in I_{IV}) + 1 \cdot P(S_1 \notin I_{IV})] + h - \tau \tag{3}$$

여기서 I_{IV} 은 조치한계선 바로 안쪽의 한계선 이내의 영역을 나타내며, N_s 는 이상상태일 때 \bar{X} 가 I_{IV} 에 타점되는 횟수를 나타내고, S_1 은 공정이 이상상태로 변화된 후 첫 번째 부분군의 \bar{X} 이다. ($E(N_s)$ 의 유도에 관한 상세한 내용은 부록을 참조.)

성능변수의 공정 평균이 변화했을 때, 부분군의 크기가 $n_j(j = 1, 2, \dots, m)$ 인 경우 대응변수의 부분군 평균이 I_{IV} 에 속할 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & P\left(\mu_x - k_2 \frac{\sigma_x}{\sqrt{n_j}} < \bar{X} < \mu_x + k_2 \frac{\sigma_x}{\sqrt{n_j}} \mid N = n_j, \mu_y = \mu_{y,0} + c\sigma_y\right) \\ &= P\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 \mu - k_2 \sqrt{\sigma_x^2/n_j} - (\lambda_1 + \lambda_2 (\mu_{y,0} + c\sigma_y))}{\sqrt{\sigma_x^2/n_j}} < \frac{\bar{X} - (\lambda_1 + \lambda_2 (\mu_{y,0} + c\sigma_y))}{\sqrt{\sigma_x^2/n_j}} \right. \\ &\quad \left. < \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \mu_{y,0} + k_2 \sqrt{\sigma_x^2/n_j} - (\lambda_1 + \lambda_2 (\mu_{y,0} + c\sigma_y))}{\sqrt{\sigma_x^2/n_j}} \mid \mu_y = \mu_{y,0} + c\sigma_y\right) \\ &= P\left(-k_2 - \frac{\lambda_2 c\sigma_y}{\sqrt{\sigma_x^2/n_j}} < Z < k_2 - \frac{\lambda_2 c\sigma_y}{\sqrt{\sigma_x^2/n_j}} \mid \mu_y = \mu_{y,0} + c\sigma_y\right) \\ &= \Phi(k_2 - A_j) - \Phi(-k_2 - A_j) \tag{4} \end{aligned}$$

여기서 $A_j = \frac{\lambda_2 c\sigma_y \sqrt{n_j}}{\sigma_x}$ 이다.

이상원인 발생 바로 전의 부분군 추출시점과 이상원인 발생시점 사이의 시간의 기대값 τ 는 이상원인의 발생시간이 평균 $1/\lambda$ 인 지수분포를 따르므로 Duncan (1956)에 의하여 다음과 같다.

$$\tau = \frac{1 - (1 + \lambda h)e^{-\lambda h}}{\lambda(1 - e^{-\lambda h})} \tag{5}$$

③ 거짓경보로 인해 경과한 기대시간

거짓경보로 인해 경과한 시간은 거짓 경보를 확인하는 시간 b_2 와 거짓 경보의 발생 기대 횟수를 곱한 값이다. 따라서 거짓 경보로 인해 경과한 기대시간은 다음과 같다.

$$E(FA) = \frac{b_2 q_s e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} \tag{6}$$

여기서 q_s 는 거짓 경보 확률로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$q_s = 2[1 - \Phi(k_1)] \tag{7}$$

④ 이상원인을 찾고 제거하는 시간

공정에서 발생하는 이상원인이 하나인 것을 가정하고 있으므로 이상원인이 발생했을 때 부분군을 채취해 해석하는 데 필요한 시간과 이상원인을 찾는 시간(b'_1) 및 제거하는 시간(b''_1)으로 구성된다. 따라서 표본 1개를 취하고 해석

하는 시간을 b_3 라 하면 이상원인을 찾고 제거하는 시간은 식 (8)과 같다.

$$E(AC) = \sum_{j=1}^m b_3 n_j t_j + b'_1 + b''_1 \tag{8}$$

여기서 t_j 는 공정이 관리이탈상태이고 부분군의 크기가 n_j 일때 대응변수의 부분군 평균이 I_{DN} 을 벗어날 확률로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$t_j = \Phi(-k_2 - A_j) + (1 - \Phi(k_2 - A_j)) \tag{9}$$

따라서 단위 기대주기시간은 식 (2), 식 (3), 식(6) 및 식 (8)의 합으로 나타낼 수 있다.

$$E(T) = E(IC) + E(OC) + E(FA) + E(AC) \tag{10}$$

3.2 단위 주기당 기대수익

단위 주기당 기대수익은 단위 주기당 총 기대수입에서 부분군 채취 비용 및 이상원인을 찾고 제거하는 비용을 제외하면 된다.

① 단위 주기당 총 수입

단위 주기당 총 수입은 공정이 관리상태일 때와 이상상태일 때의 수입의 합과 같다. 따라서 단위 주기당 총 수입은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(T') = i_1 \cdot E(IC) + i_2 \cdot E(OC) \\ = i_1/\lambda + i_2[h\{E(N_s + 1) \cdot P(S_1 \in I_{DN}) + 1 \cdot P(S_1 \notin I_{DN})\} + E(D) - \tau] \tag{11}$$

② 단위 주기당 표본 비용

단위 주기당 기대 표본 비용은 표본의 고정비용과 가변비용의 합에 부분군 채취 횟수를 곱한 것과 같다. 공정이 관리상태일 때와 이상상태일 때의 부분군 채취 횟수를 각각 N_0 와 N_1 이라 하면, 공정이 이상상태일 때 이를 감지할 때까지 부분군을 채취하는 횟수는 각 영역 I_j 에 타점될 기대 횟수 v_j 에 의해 결정되므로 단위 주기당 기대 표본 비용은 다음과 같다.

$$E(C_1) = (a_3 + a_4 \bar{n})[E(N_0) + E(N_1)] \\ = (a_3 + a_4 \bar{n}) \frac{e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} + (a_3 + a_4 n_1)P(S_1 \notin I_{DN}) + \sum_{j=2}^m (a_3 + a_4 n_j) v_j P(S_1 \in I_{DN}) \tag{12}$$

여기서 \bar{n} 은 공정이 관리상태일 때 부분군의 평균 크기로 $q_j (j=1, \dots, m)$ 를 관리상태에서 I_j 영역에 타점될 확률이라 정의하면 식 (13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{n} = \frac{\sum_{j=1}^m n_j q_j}{1 - q_s} \tag{13}$$

③ 단위 주기당 이상원인 제거 비용

단위 주기당 이상원인 제거 비용은 경고영역과 조치영역에 타점이 되었을 때 각각 이상원인을 제거하는 비용의 합과 공정이 관리상태에 있을 때 조치 신호가 나타날 확률 및 공정이 관리상태에 있을 때 경고신호가 나타날 확률에 각각 거짓 경보로 인해 발생하는 비용을 곱해서 합한 것과 같다. 따라서 단위 주기당 이상원인 제거 비용은 다음과 같다.

$$E(C_2) = (a'_2 + a''_2) \frac{q_s e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} + a'_2 \frac{q_1 e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} + a_1 \tag{14}$$

따라서 단위 주기당 기대수익은 식 (11), 식 (12) 및 식 (14)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E(I) = E(I') - E(C_1) - E(C_2) \tag{15}$$

대용변수를 이용한 VSS \bar{X} 관리도의 경제적 설계는 단위 시간당 기대 수익 $E(A) = E(I)/E(T)$ 를 최대화하는 설계모수 (h, k_j, n_j) ($j = 1, 2, \dots, m$)를 구하는 것이다.

Table 1. Assumptions of cost and process parameters in Panagos et al. (1985)

예제	λ	c	i_1	i_2	a_1	a'_2	a''_2	a_3	a_4	b'_1	b''_1	b_2	b_3
1	0.01	1	50	0	45	25	25	0.5	0.1	1.53	1.53	4.05	0.05
2	0.01	1	150	50	350	250	250	5.0	1.0	1.53	1.53	4.05	0.05
3	0.01	2	50	1	260	25	25	5.0	1.0	2.00	2.00	41.00	0.05
4	0.01	2	150	50	135	250	250	0.5	0.1	2.00	2.00	41.00	0.05
5	0.05	1	150	100	45	250	250	5.0	0.1	2.00	2.00	41.00	0.05
6	0.05	1	50	-50	350	25	25	0.5	1.0	2.00	2.00	41.00	0.05
7	0.05	2	150	100	260	250	250	0.5	1.0	1.53	1.53	4.05	0.05
8	0.05	2	50	-50	135	25	25	5.0	0.1	1.53	1.53	4.05	0.05
9	0.01	1	50	0	135	250	250	0.5	1.0	2.00	2.00	5.00	0.50
10	0.01	1	150	50	260	25	25	5.0	0.1	2.00	2.00	5.00	0.50
11	0.01	2	50	0	350	250	250	5.0	0.1	1.53	1.53	40.05	0.50
12	0.01	2	150	50	45	25	25	0.5	1.0	1.53	1.53	40.05	0.50
13	0.05	1	150	100	135	25	25	5.0	1.0	1.53	1.53	40.05	0.50
14	0.05	1	50	-50	260	250	250	0.5	0.1	1.53	1.53	40.05	0.50
15	0.05	2	150	100	350	25	25	0.5	0.1	2.00	2.00	5.00	0.50
16	0.05	2	50	-50	45	250	250	5.0	1.0	2.00	2.00	5.00	0.50

Table 2. Results of Panagos et al (1985) and FSS \bar{X} control chart

case	Panagos et al. (1985) results				Fixed Sample Size \bar{X} control chart results					
	n_y	h	k	$E(A)$	ρ	n_x	h	k_w	k_u	$E(A)$
1	17	2.75	3.14	45.91	0.3	1	10.53	0.01	4.99	43.43
					0.6	30	1.32	2.13	5.00	44.98
					0.9	17	1.56	2.75	4.69	46.67
2	17	6.33	2.95	134.11	0.3	1	25.00	0.01	4.97	123.57
					0.6	30	3.04	2.14	4.97	131.21
					0.9	20	3.83	2.83	5.00	137.66
3	6	6.46	3.46	42.08	0.3	30	7.03	0.95	4.97	40.40
					0.6	22	5.86	1.89	4.88	42.21
					0.9	7	5.18	2.66	4.98	43.20
4	8	1.54	4.31	140.89	0.3	30	0.53	2.82	5.00	135.15
					0.6	27	1.03	3.23	4.98	140.52
					0.9	6	1.03	3.47	5.00	142.00
5	26	2.41	3.76	117.73	0.3	1	22.75	0.01	4.94	114.01
					0.6	30	2.45	2.17	5.00	120.38
					0.9	15	2.78	2.66	4.95	125.24
6	12	2.48	2.75	14.04	0.3	1	3.90	0.01	4.94	12.05
					0.6	1	3.90	0.01	5.00	12.05
					0.9	18	1.00	3.30	3.30	18.98
7	5	2.01	3.32	114.93	0.3	30	2.04	2.23	5.00	115.06
					0.6	21	1.98	2.75	4.83	120.26
					0.9	4	1.17	3.09	5.00	122.30
8	6	1.50	3.12	30.04	0.3	1	3.97	0.01	4.89	20.93
					0.6	23	1.68	2.15	2.69	25.50
					0.9	7	1.57	2.87	3.17	30.10
9	9	5.03	2.72	39.96	0.3	1	25.00	0.12	5.00	32.94
					0.6	17	1.75	2.39	4.93	36.42
					0.9	9	1.71	2.91	4.89	42.23
10	10	2.79	2.90	132.08	0.3	1	8.20	0.01	5.00	135.285
					0.6	1	8.21	0.01	5.00	135.287
					0.9	5	3.18	1.50	4.98	135.497
11	6	4.53	3.63	41.39	0.3	25	3.67	2.10	4.99	33.03
					0.6	15	4.15	2.48	4.94	38.14
					0.9	5	4.74	2.92	4.66	41.55
12	4	2.34	3.67	138.69	0.3	1	7.43	0.01	5.00	138.81
					0.6	4	1.31	1.66	4.94	139.16
					0.9	2	0.97	2.39	4.94	142.65
13	13	3.96	3.00	110.96	0.3	1	6.87	0.01	4.91	122.781
					0.6	1	6.87	0.01	5.00	122.783
					0.9	1	6.88	0.01	4.95	122.796
14	6	0.40	3.29	13.73	0.3	1	2.87	1.15	1.15	-6.34
					0.6	11	0.20	2.83	3.43	-1.36
					0.9	6	0.30	3.09	3.61	13.60
15	4	0.79	3.43	108.05	0.3	1	8.11	0.01	5.00	113.40
					0.6	5	0.98	2.01	4.94	114.09
					0.9	2	1.01	2.36	4.98	116.21
16	3	1.61	2.85	23.59	0.3	1	12.59	0.01	5.00	2.26
					0.6	8	1.49	2.25	2.68	10.31
					0.9	4	1.4671	3.0332	3.03	24.88

Table 3. Results of VSS \bar{X} control chart ($m = 2, 3$)

case	ρ	VSS \bar{X} control chart result ($m=2$)						VSS \bar{X} control chart result ($m=3$)							
		n_1	n_2	h	k_2	k_1	$E(A)$	n_1	n_2	n_3	h	k_3	k_2	k_1	$E(A)$
1	0.3	2	1	1.41	1.36	5.00	46.28	8	7	2	0.68	1.19	1.78	4.99	46.59
	0.6	6	5	0.42	2.21	4.99	46.74	11	8	1	1.26	1.36	1.54	4.99	46.97
	0.9	7	6	0.50	2.90	4.99	49.35	18	15	2	0.02	2.62	3.94	4.81	52.90
2	0.3	2	1	2.86	1.45	4.21	134.69	15	10	2	1.66	1.59	1.73	4.16	136.22
	0.6	8	6	1.45	2.07	5.00	137.52	13	10	4	0.91	1.75	2.22	4.12	142.45
	0.9	10	7	1.36	2.93	5.00	146.64	19	10	2	1.69	1.19	3.49	4.58	149.03
3	0.3	5	4	2.23	1.32	4.95	42.51	12	11	7	3.13	1.05	1.43	4.56	43.20
	0.6	5	3	1.99	1.70	5.00	44.18	11	10	3	1.78	0.70	2.58	4.50	45.21
	0.9	9	6	2.09	3.01	5.00	44.61	19	10	2	2.07	2.26	3.35	4.02	47.57
4	0.3	8	6	0.66	2.35	4.99	136.86	15	14	2	0.19	1.34	2.78	4.81	140.46
	0.6	10	7	1.13	2.68	4.99	144.19	9	8	1	1.01	1.00	2.60	4.53	147.89
	0.9	6	5	0.73	3.80	4.81	152.44	5	4	1	0.95	1.43	4.26	4.85	154.24
5	0.3	4	1	5.42	1.41	4.89	125.00	25	5	1	22.38	1.71	1.82	4.25	125.65
	0.6	3	1	5.72	1.49	4.59	125.45	9	5	2	5.19	2.09	2.13	4.95	126.88
	0.9	3	2	5.95	2.07	4.99	125.77	10	9	1	9.25	1.81	2.81	4.97	127.44
6	0.3	4	2	0.32	1.60	4.98	13.10	20	17	8	0.38	1.49	1.61	4.97	13.362
	0.6	8	5	0.28	1.90	5.00	15.14	20	18	8	0.55	1.55	1.85	4.99	15.920
	0.9	10	9	0.58	2.57	4.86	19.24	12	10	3	0.58	0.32	2.91	5.00	20.46
7	0.3	4	1	1.95	2.00	4.97	123.43	8	5	1	4.56	1.84	1.95	4.03	123.64
	0.6	3	1	0.62	2.57	4.99	125.12	11	2	1	1.41	2.35	2.39	4.99	125.47
	0.9	2	1	4.79	2.48	4.99	125.90	4	3	1	3.62	2.16	3.02	4.97	127.71
8	0.3	22	21	0.73	1.69	4.98	21.00	20	12	1	0.94	0.71	1.24	4.97	28.29
	0.6	8	7	0.65	1.95	4.99	32.83	13	10	7	0.59	0.70	2.52	4.47	37.43
	0.9	10	9	0.63	3.14	4.97	35.38	13	5	1	1.43	1.59	2.29	4.33	38.92
9	0.3	6	4	1.29	2.06	4.93	33.68	12	10	6	0.99	2.14	2.18	4.99	34.72
	0.6	14	13	1.71	2.33	4.99	38.54	14	13	8	1.10	1.37	2.45	4.99	40.32
	0.9	10	7	1.11	3.12	4.93	45.45	11	10	1	1.23	1.44	3.04	4.49	47.46
10	0.3	4	2	1.80	1.04	5.00	137.71	11	4	1	1.87	1.05	1.14	4.89	139.25
	0.6	3	2	1.48	1.25	4.98	138.64	14	10	1	0.34	1.74	2.04	4.63	142.34
	0.9	6	4	1.33	2.18	5.00	139.24	10	8	2	0.92	1.71	2.31	3.78	144.25
11	0.3	16	13	2.07	2.19	4.98	35.41	14	13	11	1.88	1.18	2.18	4.56	37.78
	0.6	13	10	3.21	2.62	4.98	40.41	21	10	9	2.52	1.69	2.71	4.59	42.91
	0.9	13	9	1.99	3.90	4.79	42.82	5	4	1	2.87	1.39	3.23	3.76	47.41
12	0.3	5	1	0.41	1.82	5.00	146.21	13	3	2	0.33	1.41	2.06	4.93	146.62
	0.6	5	3	0.42	2.33	4.99	147.60	6	5	1	0.48	1.08	2.35	4.90	149.50
	0.9	5	3	0.42	3.52	4.99	149.23	9	4	1	0.19	2.29	3.15	4.14	153.64
13	0.3	4	1	1.87	1.23	4.99	123.03	8	7	1	0.95	1.69	1.84	4.88	123.12
	0.6	3	1	2.11	1.30	5.00	123.81	7	4	1	1.26	1.64	1.69	4.99	124.17
	0.9	2	1	2.15	1.69	4.86	125.14	7	3	1	0.86	1.92	2.22	4.99	125.63
14	0.3	30	28	0.31	2.40	4.99	1.80	30	29	24	0.42	1.20	2.23	4.59	2.10
	0.6	22	20	1.71	1.97	4.65	3.64	28	24	20	0.15	2.04	2.96	4.97	12.90
	0.9	14	10	0.15	3.67	4.94	19.33	24	18	4	0.44	2.24	3.20	5.00	20.52
15	0.3	4	1	16.64	1.28	4.98	115.53	12	6	1	0.69	2.04	2.13	4.03	116.60
	0.6	3	1	11.45	1.64	4.15	115.81	11	4	1	0.29	2.29	2.64	4.99	117.50
	0.9	3	1	0.70	3.53	4.58	116.56	10	4	1	0.01	3.11	3.96	4.94	119.36
16	0.3	28	27	1.00	2.19	4.99	8.36	23	20	18	1.62	0.19	1.81	3.78	8.75
	0.6	18	16	0.78	2.83	4.86	18.26	20	17	3	0.81	0.60	2.74	4.63	22.42
	0.9	10	7	0.68	3.62	5.00	25.53	18	10	1	1.08	1.52	3.38	5.00	30.07

3.3 수치 예제

3.2절에서 제안한 관리도 모형에 대해 유도된 단위 시간당 기대 수익을 비용함수로 사용하여 $\rho = 0.3, 0.6, 0.9$, $\sigma_x = 1.250$, $\sigma_y = 0.112$, $\lambda_2 = 0.08$ 를 가정하고 나머지 모수들은 Panagos et al. (1985)가 제시한 16가지 경우에 대하여 유전자 알고리즘을 사용하여 최적해를 구하였다. 유전자 알고리즘에서 최적값군의 크기는 60, 교차 비율은 0.5, 변이 비율은 0.1, 종료 조건은 5000회를 사용하였다.

<Table 1>의 비용 및 공정 모수들을 입력 변수로 활용하여 최적해를 구한 결과가 <Table 2>와 <Table 3>에 요약되어 있다. 이들 결과로부터 다음과 같은 해석이 가능할 것이다.

- ① 본 논문에서 제안한 VSS \bar{X} 관리도의 단위 시간당 기대수익은 성능변수를 이용한 \bar{X} 관리도(Panagos et al. (1985)의 모형)과 대응변수를 이용한 FSS(Fixed Sample Size) \bar{X} 관리도에 비해서 모두 증가하였다.
- ② ρ 가 0.3에서 0.9로 커짐에 따라 단위 시간당 기대수익은 증가하였다.
- ③ ρ 가 0.9인 경우 단위 시간당 기대수익은 고정된 부분군의 채취 간격 및 부분군의 크기를 사용한 모형에 비해서 $m=2$ 인 경우 12%, $m=3$ 인 경우 19%가 각각 증가하였다. 가변형 부분군 크기가 2인 경우 보다 3인 경우에 약 7%의 단위 시간당 수익이 증가하였으므로 부분군 크기의 종류를 3가지로 하는 것이 경제적 관점에서 유리할 것이다.
- ④ ρ 가 0.6 또는 0.9인 경우 k_1 의 값이 16개 예제 모두에서 4.5이상으로 나타났다. 이는 거짓 경보 여부를 확인하는데 드는 비용보다 공정을 진행하면서 얻는 수입이 상대적으로 크기 때문에 조치한계선 계수값이 최적화를 위해 설정된 한계값에 가까운 결과가 도출되었기 때문으로 보인다.

4. 결 론

본 논문에서는 성능변수 대신에 대응변수를 사용하여 공정을 모니터링하는 경우에 적용할 수 있는 VSS \bar{X} 관리도를 개발하였다. 성능변수와 대응변수는 이변량 정규분포를 따르는 것을 가정하였으며 Duncan이 제시한 경제적 관점에서 관리도를 설계하였다. 가변 부분군 채취 간격이 2개인 경우와 3개인 경우의 경제적 설계 결과를 상관관계의 정도에 따라 성능변수를 이용한 \bar{X} 관리도 및 대응변수를 이용한 FSS \bar{X} 관리도와 비교하였다. 상관관계가 높을 경우 고정된 부분군 채취 크기를 사용하는 것보다 VSS \bar{X} 관리도를 사용하는 것이 단위 시간당 기대수익이 더 큼을 확인하였다. 그러나 실제 공정에서 부분군 크기를 자주 변화시키는 것은 것은 공정 운영상에 부담이 될 수 있으므로 부분군 변화 주기를 제한한 공정 설계가 필요할 것으로 사료된다.

추후 연구 과제로는 대응변수의 활용을 가변형 부분군 채취 간격 및 가변형 부분군 크기를 모두 고려한 적응형 관리도(adaptive control chart), 이중 부분군 채취 관리도(double sampling control chart), 두 가지 이상의 복합적인 이상원인이 있는 \bar{X} 관리도 및 다변량 관리도 등 다양한 관리도의 설계에 확대 적용이 가능할 것이다.

REFERENCES

- Costa, A.F.B. 1994. " \bar{X} charts with variable sample size." *Journal of Quality Technology* 26:155-163.
- Costa, A.F.B., and De Magalhães, M.S. 2002. "Economic design of two-stage \bar{X} charts : The Markov chain approach." *International Journal of Production Economics* 95:9-20.
- Duncan, A.J. 1956. "Economic design of \bar{X} charts used to maintain current control of a process." *Journal of American Statistical Association* 51:228-242.
- Duncan, A.J. 1971. "The economic design of \bar{X} chart when there is a multiplicity of assignable cause." *Journal of American Statistical Association* 66:107-121.
- Kwon, H.M. 2016. "Literature review on the statistical quality control in journal of the KSQM for 50 years." *Journal of the Korean Society for Quality Management* 44:1-16.
- Lee, J.H., and Kwon, W.J. 1999. "Economic design of a two-stage control chart based on both performance and surrogate variables." *Naval Research Logistics* 46:954-977.
- Lee, T.H., Lee, J. H., Lee, M. K., Lee, J.H. 2009. "An economic design of \bar{X} control chart using a surrogate variable." *Journal of the Korean Society for Quality Management* 37:46-57.
- Lee, T.H., Lee J., Lee M. 2013. "Economic design of variable sampling interval \bar{X} control chart using a surrogate variable." *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers* 39:422-428.
- Lim, T.H. 2008. "A Comparative study on the design of adaptive control charts." *Korea society quality management*, 7-19.
- Lucas, J.M., and Saccucci, M.S. 1990. "Exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements." *Technometrics* 32, 1-29.
- Lucas, J.M. 1982. "Combined Shewhart-CUSUM quality control schemes." *Journal of Quality Technology* 14:51-59.
- Owen, D.B., and Boddie, J.W. 1976. "A screening method for increasing acceptable product with some parameters unknown." *Technometrics* 18:195-199.
- Panagos, M.R., Heikes, R.G., Montgomery, D.C. 1985. "Economic design of \bar{X} control charts for two manufacturing process models." *Naval Research Logistics* 32:631-646.
- Prabhu, S.S., Runger, G.C., Keats, J.B. 1993. "An adaptive sample size \bar{X} chart." *International Journal of Production Research* 31:2895-2909.
- Park, C.S., and Reynolds, M.R. 1994. "Economic design of a variable sample size \bar{X} -chart." *Communications in Statistics - Simulation and computation* 23:467-483.
- Ross, S. M. 1983. *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, New York.

APPENDIX

VSS \bar{X} 관리도의 이상상태일 때 부분군의 기대 채취 횟수

상태 1을 조치한계선 바로 안쪽의 한계선 바깥 영역으로, 상태 $j(j = 2, 3, \dots, m)$ 를 I_j 로 정의하고, v_i 를 상태 i 에서 출발하여 상태 1까지 가는데 필요한 전이 횟수로 정의하면 각 상태에서 흡수상태인 상태 1까지 가는데 필요한 전이 횟수 벡터는 $V = (v_m, v_{m-1}, \dots, v_1)'$ 로 나타낼 수 있다. 또한 p_{ij} 를 상태 i 에서 상태 j 로 가는 전이확률이라고 정의할 때 전이확률 벡터 Q 는 다음과 같이 표현된다.

$$Q = \begin{pmatrix} p_{m,m} & p_{m,m-1} & \dots & p_{m,1} \\ p_{m-1,m} & p_{m-1,m-1} & \dots & p_{m-1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{2,m} & p_{2,m-1} & \dots & p_{2,1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이제 각 상태에서 상태 1까지 가는 도중에 먼저 다른 상태로 한 번 전이될 경우의 전이 횟수 벡터는 $W = (v_m + 1, v_{m-1} + 1, \dots, v_2 + 1, 1)'$ 이므로 각 상태에서 상태 1까지 가는데 필요한 기대 전이 횟수 $E(N_s)$ 는 다음의 식을 연립하여 구한 해 V 의 원소들을 합한 값과 같다.

$$V = QW \quad (\text{단, } \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1, i = 2, 3, \dots, m)$$

특히 $m = 2$ 인 경우 해를 구하면 $V = (1/(1-p_{22}), 1)'$ 이 되고 따라서 부분군 기대 채취 횟수는

$$E(N_s) = v_1 + v_2 = 1 + \frac{1}{1-p_{22}}$$

이 되며, $m = 3$ 인 경우 해를 구하면 $V = ((1-p_{22}+p_{32})/B, (1-p_{33}+p_{23})/B, 1)'$ 이 되고 따라서 부분군 기대 채취 횟수는

$$E(N_s) = v_1 + v_2 + v_3 = 1 + [2(p_{23} + p_{32}) + (p_{21} + p_{31})]/B$$

이 된다. 여기서 $B = (1-p_{22})(1-p_{33}) - p_{32}p_{23}$ 이다.