ISSN 1229-1889(Print)
ISSN 2287-9005(Online)
J Korean Soc Qual Manag Vol. 45, No.4:889-902, December 2017
https://doi.org/10.7469/JKSQM.2017.45.4.889

직교성에 가까운 트레이스 최적 2-수준 Resolution-V 균형 일부실험법의 실험크기 결정에 관한 연구

김상익†

건국대학교 응용통계학과

A Study on the Determination of Experimental Size of Near-orthogonal Two-level Balanced Trace Optimal Resolution-V Fractional Factorial Designs

Kim, Sang Ik†

Department of Applied Statistics, Konkuk University

ABSTRACT

Purpose: The orthogonality and trace optimal properties are desirable for constructing designs of experiments. This article focuses on the determination of the sizes of experiments for the balanced trace optimal resolution-V fractional factorial designs for 2-level factorial designs, which have near-orthogonal properties.

Methods: In this paper, first we introduce the trace optimal 2^t fractional factorial designs for $4 \le t \le 7$, by exploiting the partially balanced array for various cases of experimental sizes. Moreover some orthogonality criteria are also suggested with which the degree of the orthogonality of the designs can be evaluated. And we appraise the orthogonal properties of the introduced designs from various aspects.

Results: We evaluate the orthogonal properties for the various experimental sizes of the balanced trace optimal resolution-V fractional factorial designs of the 2-level factorials in which each factor has two levels. And the near-orthogonal 2-level balanced trace optimal resolution-V fractional factorial designs are suggested, which have adequate sizes of experiments.

Conclusion: We can construct the trace optimal 2^t fractional factorial designs for $4 \le t \le 7$ by exploiting the results suggested in this paper, which have near-orthogonal property and appropriate experimental sizes. The suggested designs can be employed usefully especially when we intend to analyze both the main effects and two factor interactions of the 2-level factorial experiments.

Key Words: Fractional Factorial Design, Balanced Design, Resolution-V, Experimental Size, Partially Balanced Array, Orthogonality

• Received 18 October 2017, 1st revised 1 November, accepted 2 November 2017

† Corresponding Author(sikim@konkuk.ac.kr)

※ This paper was written as part of Konkuk University's research support program for its faculty on sabbatical leave in 2017.

1. 서 론

실험계획의 일부실험법(fractional factorial design)은 실험에서 실시하여야 할 처리조합의 수인 실험의 크기(size of experiment)가 너무 큰 경우, 불필요한 교호작용에 대한 분석을 희생하고 일부의 처리조합(treatment combination)만을 선택하여 설계하는 실험법이다. 이러한 일부실험법에서는 주효과를 비롯한 모든 교호작용에 대한 분석이 불가능하게 되며, 일부실험법을 분류하는 방법으로 효과들에 대한 분석 가능한 정도를 측도로 하는 resolution의 개념이 사용된다. 그리고 resolution-V 일부실험법이라 함은 3인자이상의 교호작용이 모두 무시될 수 있는 경우, 주효과와 2인자 교호작용 효과까지 분석이 가능한 실험법을 의미한다. 이러한 resolution-V 일부실험법은 적은 횟수의 실험으로 주효과 뿐만 아니라 2인자 교호작용까지 분석하고자 할 때 널리 사용된다.

일부실험법을 설계하는 다양한 방법 중, 직교배열(orthogonal array)을 이용한 설계방법은 많은 통계적 장점이 있으므로 산업현장을 비롯하여 일반적으로 사용된다. 그러나 직교배열을 이용한 일부실시법은 resolution 값이 커짐에 따라 실험의 크기가 너무 커지게 될 뿐만 아니라, 설계가 가능하지 않는 경우가 많이 발생한다. 이러한 직교배열의 단점을 극복하기 위한 방법의 하나로, Chakravartie(1956)가 제시한 부분균형배열(partially balanced array)을 이용한 설계방법이 사용될 수 있다.

부분균형배열을 이용한 일부실험법의 설계 방법과 통계적 특징을 보면, t개의 모든 인자가 2개의 수준을 갖는 2^t 요인실험법은 Srivastava(1965)에 의해 고찰되었다. 그리고 2^t 요인실험법에서 실험의 크기에 따라 부분균형배열을 이용하여, 추정량의 분산-공분산 행렬의 트레이스(trace)가 최적화 되는 resolution-V 일부실험법의 설계방법이 Srivastava and Chopra(1971), Chopra and Srivastava(1973)등에 의해 연구되었다.

직교배열을 이용하여 설계된 일부실험법에서는 효과 추정량들 사이에 직교성이 만족하게 되고, 추정된 효과들의 분산들이 같게 되어 모든 효과들의 추정량들이 동일한 정밀도를 갖게 된다. 그리고 추정량들은 확률적으로 상호 독립적인 관계를 갖게 된다. 더 나아가 직교성이 만족되는 일부실험법은 실험의 크기가 동일한 다른 일부실험법과 비교하여 추정량들의 분산-공분산 행렬인 정보행렬의 트레이스(trace) 값이 최소가 될 뿐만 아니라($A-$최적), 행렬식(determinant) 값도 최소가 되고($D-$최적), 분산-공분산행렬의 고유값(eigenvalue)의 최대값이 최소가 되는($E-$최적) 실험법이 된다. 따라서 일부실시법의 최적성을 평가하는 또 다른 측도로 직교성(orthogonality)이 중요한 고려대상이 된다.

본 연구에서는 2^t 요인 실험법에서 $4 \le t \le 7$ 경우, 부분균형배열을 이용하여 다양한 실험크기에 따라 트레이스 최적성을 만족하는 2^t resolution-V 균형 일부실험법의 설계방법을 고찰하고 직교성을 평가하여, 직교 혹은 직교성에 가까운 트레이스 최적 균형일부실험법으로서 효율적인 실험크기를 갖는 계획을 제시하고자 한다.

2. 부분균형배열을 이용한 일부실험법 설계방법

행(row)의 수가 n이고 열(column)의 수가 t인 $(n \times t)$ 행렬 $T=(x_{ij}),\ x_{ij} \in \{0,1,\cdots,a-1\}$에서 임의의 $(n \times s)$부분행렬(submatrix)을 취하였을 경우($s \le t$), 출현 가능한 모든 행벡터 $(x_1,x_2,\cdots,x_s)$ 가 $\alpha(x_1,x_{2,}\cdots x_s)$ 회 출현하고 $\alpha(x_1,x_{2,}\cdots x_s)$ 값이 $(x_1,x_2,\cdots x_s)$ 의 모든 치환(permutation)에서 동일할 때, 행렬 T 를 강도가 s인 부분균형배열(partially balanced array: PBA))이라 한다(Chakravartie,1956). 그리고 $\alpha(x_1,x_{2,}\cdots x_s)$ 값들이 모든 행벡터 $(x_1,x_2,\cdots,x_s)$ 에 대하여 동일할 때, T는 강도(strength)가 s인 직교배열이 된다. 따라서 부분균형배열은 일반화된 직교배열이라 할 수 있다.

그리고 2수준 부분균형배열에서 각 인자의 수준 값인 x_i를 0 혹은 1로 표기할 때,

$\alpha(x_1,x_{2,}\cdots x_s)=\alpha_w,\ w=\sum_{i=1}^{s}x_i$ 로 나타낼 수 있으며, $\alpha_\omega,\ \omega=0,1,\cdots,s$들을 부분균형배열의 index number라 하며 $\underline{\alpha}=\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$ 를 index 집합이라 한다.

특히 인자의 수가 t이고 각 인자가 a개의 동일한 수준을 갖는 a^t 요인실험인 경우, 직교배열에서 각 행이 수준조합을 나타낸다고 할 때 강도가 s인 직교배열은 resolution이 $(s+1)$인 일부실시법이 된다는 것이 입증되어있으며, 직교배열을 이용한 일부실험법에서는 추정량들은 직교성을 만족하게 된다.

그러나 인자의 수인 t와 인자의 수준 수인 a 뿐만 아니라 강도 s가 커짐에 따라 직교배열에서 실험의 크기 n은 급격하게 증가하게 될 뿐만 아니라 어떤 경우에는 직교배열이 존재하지 않게 된다. 따라서 직교배열을 이용하여 일부실험법을 설계하는 경우, Taguchi에 의해 개발된 강건설계법(robust design)에서와 같이, 강도가 2인 직교배열을 사용하여 설계되는 resolution-Ⅲ 일부실험법이 일반적으로 많이 사용된다. 그러나 resolution-Ⅲ 일부실험법에서는 주효과만 분석 가능하게 되어 일부의 교호작용이 유의한 경우에는 효율적인 방법이 되지 못한다(Kim,2008).

Srivastava(1965)는 특히 2^t요인실험에서 강도가 $s=4$인 부분균형배열은 주효과를 비롯한 2-인자 교호작용까지 분석이 가능한 resolution-Ⅴ 일부실험법이 됨을 보였다. 그리고 Srivastava는 강도가 4인 균형배열에 의해 설계되는 resolution-Ⅴ 일부실험법에서, 전체 모평균을 μ, 주효과를 F_i , 2-인자 교호작용 효과를 F_{ij} , 그리고 $\hat{A}$을 효과 A의 추정량이라 할 때, 추정량들의 분산 및 공분산 값들은 (2.1)식과 같이 10개의 군(group)으로만 분류될 수 있고, 각 군에서 분산 혹은 공분산 값은 같게 된다는 사실을 입증하였다. 그리고 이와 같은 실험법을 균형실험법(balanced design)이라고 정의하였다.

$$Var(\hat{\mu})\ ,\ Var(\widehat{F_i})\ ,\ Cov(\hat{\mu},\widehat{F_i})\ ,\ Var(\widehat{F_{ij}})\ ,\ Cov(\hat{\mu},\widehat{F_{ij}})\ ,\ Cov(\widehat{F_i},\widehat{F_j}),$$
$$Cov(\widehat{F_i},\widehat{F_{ij}})\ ,\ Cov(\widehat{F_i},\widehat{F_{jk}})\ ,\ Cov(\widehat{F_{ij}},\widehat{F_{jk}})\ ,\ Cov(\widehat{F_{ij}},\widehat{F_{kl}})\quad \text{단 } i \ne j \ne k \ne l, \qquad (2.1)$$

따라서 균형계획에서는 주효과 추정량들의 분산은 모두 같고, 2-인자 교호작용효과들의 추정량들의 분산도 동일하지만 주효과와 교호작용효과의 분산은 군이 같지 않으므로 다를 수 있다. 그리고 직교배열에 의해 설계되는 resolution-Ⅴ 일부실시법에서는 (2.1)식에서 $Var(\widehat{F_i})=Var(\widehat{F_{ij}})$ 이고, 추정량들은 모두 확률적으로 독립적이 되어 공분산 값들은 모두 0이 된다.

실험을 설계할 때 고려해야 할 사항은 실험의 크기뿐만 아니라 실험계획의 최적성이다. 그리고 A-최적, D-최

적, $E-$최적의 평가측도 중, 일부실험법의 최적성을 평가하는 데는 효과 추정량들의 분산들의 합이 최소가 되는 $A-$최적성의 평가척도가 널리 사용된다. 특히 추정량들의 교락(confounding)의 정도가 강할수록 추정량들의 분산-공분산 행렬식이 작게 되므로, $D-$최적성의 평가척도는 일부실험법의 최적성을 평가하는데 적절하지 않게 된다 (Srivastava, 1965).

그리고 강도가 $s=4$ 이고 index 집합이 $\underline{\alpha}=\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$인 $(n\times t)$부분균형배열 T로 설계된 2^t resolution-V 일부실험법에서 추정량들의 분산-공분산행렬 C_T의 트레이스 값은 Srivastava and Chopra(1971)에 의해 규명되었으며, 본 연구에서 정확한 계산을 위해 그 결과를 제시하면 다음과 같다.

$$tr(C_T)\equiv(\delta_2/\delta_1)+p(\delta_4/\delta_3)+q/(16\alpha_2) \tag{2.2}$$

단, $p=t-1$, $q=t(t-3)/2$ 이고

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \tau_1^3-\frac{t(t-1)^2}{2}\tau_3^3+\frac{(t-1)(3t-8)}{2}\tau_1\tau_3^2+\frac{(t-2)(t-3)}{2}\tau_1^2\tau_5\\
&\quad+\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{2}\tau_1\tau_3\tau_5-\frac{(t-1)(t-2)^2}{2}\tau_1\tau_4^2-\frac{t(t-2)(t-3)}{2}\tau_2^2\tau_5\\
&\quad+(3t-5)\tau_1^2\tau_3+t(t-1)(t-2)\tau_2\tau_3\tau_4+2t\tau_2^2\tau_3-2(t-1)(t-2)\tau_1\tau_2\tau_4-(3t-2)\tau_1\tau_2^2\\
\delta_2 &= 3\tau_1^2+\frac{(t-1)(3t-8)}{2}\tau_3^2-\frac{(t-1)(t-2)^2}{2}\tau_4^2+\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{2}\tau_3\tau_5\\
&\quad+2(3t-5)\tau_1\tau_3+2(t-1)(t-2)\tau_2\tau_4-(3t-2)\tau_2^2\\
\delta_3 &= (\tau_1-\tau_3)\times(\tau_1+(t-4)\tau_3-(t-3)\tau_5)-(t-2)(\tau_2-\tau_4)^2\\
\delta_4 &= 2\tau_1+(t-5)\tau_3-(t-3)\tau_5 \text{이고,}\\
\tau_1 &= \alpha_0+4\alpha_1+6\alpha_2+4\alpha_3+\alpha_4\\
\tau_2 &= (\alpha_4-\alpha_0)+2(\alpha_3-\alpha_1)\\
\tau_3 &= \alpha_4-2\alpha_2+\alpha_0\\
\tau_4 &= (\alpha_4-\alpha_0)-2(\alpha_3-\alpha_1)\\
\tau_5 &= \alpha_0-4\alpha_1+6\alpha_2-4\alpha_3+\alpha_4.
\end{aligned}$$

위의 결과를 이용하여 Srivastava and Chopra(1971)는 인자의 수 t가 6보다 작은 경우 그리고 Chopra and Srivastava(1973)는 $t=7$인 경우, 실험크기 n에 따라 식(2.2) 값이 최소가 되는 강도가 $s=4$ 인 부분균형배열을 설계하는 알고리듬을 제시하였다. 특히 Kim(1992)은 인자의 수에 관계없이 식(2.2)가 최소가 되고 실험의 크기와 추정량들의 개수가 같은 작은 $s=4$ 인 부분균형배열을 설계하는 방법을 고찰하여 resolution-V 포화실험법(saturated design)을 제시하였다. 이러한 연구들의 결과를 종합하여 실험크기가 주어진 경우, 설계가 가능한 강도가 $s=4$인 부분균형배열들 중에서 식(2.2)값이 최소가 되는 트레이스 최적 resolution-V 균형일부실험법을 설계하면 Table 1, Table 2, Table 3, Table 4와 같다.

Table 1은 인자의 수가 $t=4$인 경우로서, index 집합 $\underline{\alpha}=\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_4\}$ 인 강도가 $s=4$인 부분균형배열은 $\sum_{i=1}^{4}x_i=j, j=0,1,2,3,4$를 만족하는 모든 행벡터 $(x_1,x_2,\cdots,x_4)$가 각각 α_j회 출현하도록 구성하면 설계될 수 있다.

예를 들어, $n=12$ 이고 $\underline{\alpha}=\{1,0,1,1,1\}$인 경우, $\sum_{i=1}^{4}x_i=0$ 을 만족하는 행벡터 $(0,0,0,0)$가 $\alpha_0=1$개, $\sum_{i=1}^{4}x_i=1$를 만족하는 행벡터는 $\alpha_1=0$ 개, $\sum_{i=1}^{4}x_i=2$ 를 만족하는 가능한 모든 6개의 행백터 (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0,), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)가 각각 $\alpha_2=1$개, $\sum_{i=1}^{4}x_i=3$ 를 만족하는 가능한 모든 4개의 행백터 (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)은 각각 $\alpha_3=1$개, 그리고 $\sum_{i=1}^{4}x_i=4$ 를 만족하는 가능한 하나의 행벡터 (1, 1, 1, 1)은 $\alpha_4=1$개로 구성된다. 이렇게 설계계수이자 index 집합인 $\underline{\alpha}=\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_4\}$로 설계되는 부분균형배열에서는 $n=\alpha_0+4\alpha_1+6\alpha_2+4\alpha_3+\alpha_4$의 관계가 있게 된다. 그리고 위와 같이 구성되는 $(n\times 4)$부분균형배열에서 각각의 행벡터를 처리조합으로 하여 실험을 설계하면 실험의 크기가 n인 2^4 resolution- V 균형일부실험법이 된다.

그리고 각 인자의 수준이 0, 1로 표기하는 2^t요인실험법에서는 모든 처리조합의 수준 0 은 수준 1로, 수준 1은 수준 0으로 변환하여 설계한 실험을 쌍대실험(dual design)이라 한다. 이러한 두 개의 쌍대실험 간에는 index 집합만 다를 뿐 모든 통계적 성질은 동일하게 된다(Srivastava, 1965; Srivastava and Chopra,1971). 예를 들어 Table 1에서 실험크기가 $n=11$인 경우 11a, 11b가 이에 해당한다. 그리고 Table 1, Table 2, Table 3, Table 4에서 각각의 실험크기 n에 따라 다른 하나의 쌍대실험이 모두 가능하게 된다.

Table 2는 인자의 수가 $t=5$인 경우로서, 부분균형배열을 설계하는 방법은 $t=4$인 경우와는 다르게 설계계수(construction coefficient)에 의해 설계할 수 있다. 설계 방법은 $\sum_{i=1}^{5}x_i=0,1,2,3,4,5$를 만족하는 행벡터 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)들이 각각 $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$개로 구성하여 설계된다. 예를 들어 <표 2>에서 $n=17$이고, 설계계수가 $(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)=(2,0,1,0,1,0)$경우, $\sum_{i=1}^{5}x_i=0$ 를 만족하는 행백터 (0,0,0,0,0)가 2개, 그리고 $\sum_{i=1}^{5}x_i=2$을 만족하는 가능한 10개의 행백터가 각각 $\beta_2=1$개, 그리고 $\sum_{i=1}^{5}x_i=4$를 만족하는 가능한 5개의 행백터가 각각 $\beta_4=1$개씩 모두 17개의 행백터로 구성하여 설계된다. 그리고 $t=4$ 인 경우에는 Table 1의 index number들인 $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$가 설계계수가 된다.

Table 3은 인자의 수가 $t=6$인 경우로서 부분균형배열을 설계하는 방법도 위와 유사한 방법으로 $\sum_{i=1}^{6}x_i=0,1,2,3,4,5,6$을 만족하는 가능한 모든 행벡터 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$가 각각 Table 3에 제시된 설계계수 값들인 $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\ \beta_5,\beta_6$개로 구성하여 설계하게 된다.

그리고 Table 4는 인자의 수가 $t=7$ 인 경우 부분균형배열을 설계하는 방법도 유사한 방법으로 Table 4에 제시된 설계계수에 따라 $\sum_{i=1}^{7}x_i=0,1,2,3,4,5,6$을 만족하는 가능한 모든 행벡터 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$가 각각 Table 4에 제시된 $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6,\beta_7$개로 구성하여 설계할 수 있다.

Table 1. Trace Optimal PBA's and Values of Orthogonality Criteria for $t=4$ $(s=4,\ n \leq 28)$

size of design: n	index set: $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$	$trace$	values of orthogonality criteria			
			$(E_1)_T$	$(E_2)_T$	$(E_3)_T$	$(E_4)_T$
11,a	(0,1,1,0,1) (dual design)	1.4861	0.6729	0.4297	0.5	0.3487
11,b	(1,0,1,1,0) (dual design)	1.4861	0.6729	0.4297	0.5	0.3487
12	(1,0,1,1,1)	1.3125	0.6984	0.3750	1.0	0.2941
13	(2,0,1,1,1)	1.2639	0.6695	0.4063	0.5	0.3512
14	(0,1,1,1,0)	1.1875	0.6617	0.2188	0.0	0.5429
15	(1,1,1,1,0)	0.8250	0.8889	0.1172	0.5	0.5497
16	(1,1,1,1,1)	0.6875	1.0000	0.0000	0.0	1.0000
17	(2,1,1,1,1)	0.6620	0.9774	0.1172	0.5	0.6044
18	(2,1,1,1,2)	0.6375	0.9586	0.2188	0.0	0.7866
19	(3,1,1,1,2)	0.6270	0.9234	0.3281	0.5	0.5051
20	(1,2,1,1,1)	0.5863	0.9381	0.3750	1.0	0.3950
21	(1,2,1,1,2)	0.5610	0.9332	0.4297	0.5	0.4836
22	(1,2,1,1,2)	0.5385	0.9285	0.4688	0.0	0.6322
23	(2,1,2,1,1)	0.5137	0.9310	0.4922	0.5	0.4673
24	(1,2,1,2,1)	0.4896	0.9361	0.5000	0.0	0.6241
24	(2,1,2,1,2)	0.4896	0.9361	0.5000	0.0	0.6241
25	(1,2,1,2,2)	0.4693	0.9376	0.4922	0.5	0.4706
26	(2,2,1,2,2)	0.4517	0.9366	0.4688	0.0	0.6377
27	(2,1,2,2,1)	0.4275	0.9530	0.4297	0.5	0.4939
28	(2,2,2,1,2)	0.4104	0.9573	0.3750	1.0	0.4031

Table 2. Trace Optimal PBA's and Values of Orthogonality Criteria for $t=5$ $(s=4,\ n \leq 32)$

size of design: n	index set: $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$	construction coefficient: $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$	*trace*	values of orthogonality criteria			
				$(E_1)_T$	$(E_2)_T$	$(E_3)_T$	$(E_4)_T$
16	(1,1,1,1,1)	(1,0,1,0,1,0)	1.0000	1.0000	0.0000	0.0	1.0000
17	(2,1,1,1,1)	(2,0,1,0,1,0)	0.9688	0.9715	0.1172	0.5	0.5998
18	(2,1,1,1,2)	(2,0,1,0,1,1)	0.9398	0.9458	0.2188	0.0	0.7795
19	(3,1,1,1,2)	(3,0,1,0,1,1)	0.9296	0.9059	0.3281	0.5	0.4978
20	(2,1,1,1,3)	(3,0,1,0,1,2)	0.9194	0.8701	0.4375	0.0	0.6052
21	(2,2,1,1,1)	(1,1,1,0,1,0)	0.8438	0.9029	0.4297	1.5	0.3072
22	(2,2,1,1,2)	(1,1,1,0,1,1)	0.8125	0.8951	0.4688	1.0	0.3646
23	(3,2,1,1,2)	(2,1,1,0,1,1)	0.7980	0.8717	0.5469	1.5	0.2855
24	(3,1,1,1,3)	(2,1,1,0,1,2)	0.7881	0.8459	0.6250	1.0	0.3238
25	(1,2,2,1,1)	(3,1,1,0,1,2)	0.7815	0.8189	0.7031	1.5	0.2560
26	(1,2,2,1,1)	(1,0,2,0,1,0)	0.6875	0.8951	0.4688	1.0	0.3646
27	(2,2,2,1,1)	(2,0,2,0,1,0)	0.6563	0.9029	0.4297	1.5	0.3072
28	(2,2,2,1,2)	(2,0,2,0,1,1)	0.6300	0.9073	0.3750	1.0	0.3832
29	(3,2,2,1,2)	(3,0,2,0,1,1)	0.6199	0.8902	0.4063	1.5	0.3062
30	(1,2,2,2,1)	(0,1,1,1,1,0)	0.5830	0.9148	0.2188	0.0	0.7467
31	(2,2,1,2,1)	(1,1,1,1,1,0)	0.5312	0.9716	0.1172	0.5	0.5998
32	(2,2,2,2,2)	(2,0,2,0,2,0)	0.5000	1.0000	0.0000	0.0	1.0000

Table 3. Trace Optimal PBA's and Values of Orthogonality Criteria for $t=6$ $(s=4,\ n \leq 40)$

size of design: n	index set: $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$	construction coefficient: $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6)$	$trace$	values of orthogonality criteria			
				$(E_1)_T$	$(E_2)_T$	$(E_3)_T$	$(E_4)_T$
22,a	(2,2,1,1,2) (dual design)	(1,0,1,0,0,1,0)	1.1517	0.8683	0.4688	1.0	0.3517
22,b	(1,2,1,1,3)	(0,0,1,0,0,1,1)	1.6249	0.6154	0.5156	0.0	0.4025
22,c	(2,1,1,2,2) (dual design)	(0,1,0,0,1,0,1)	1.1517	0.8683	0.4688	1.0	0.3517
23	(3,2,1,1,2)	(2,0,1,0,0,1,0)	1.1241	0.8501	0.5469	1.5	0.2790
24	(3,2,1,1,3)	(2,0,1,0,0,1,1)	1.1145	0.8225	0.6250	1.0	0.3124
25	(3,2,1,1,4)	(2,0,1,0,0,1,2)	1.1100	0.7928	0.7031	0.5	0.3586
26	(4,2,1,1,4)	(3,0,1,0,0,1,2)	1.1012	0.7684	0.7813	1.0	0.2769
27	(2,2,2,1,1)	(0,1,0,1,0,0,1)	0.9754	0.8354	0.4297	1.5	0.2867
28	(2,2,2,1,2)	(0,1,0,1,0,0,2)	0.9487	0.8282	0.3750	1.0	0.3495
29	(3,2,2,1,2)	(1,1,0,1,0,0,2)	0.9371	0.8095	0.4063	1.5	0.2787
30	(3,2,2,1,3)	(1,1,0,1,0,0,3)	0.9279	0.7903	0.4375	1.0	0.3241
31	(1,2,2,2,2)	(0,0,1,0,1,0,1)	0.7562	0.9385	0.1172	0.5	0.5813
32	(2,2,2,2,2)	(1,0,1,0,1,0,1)	0.6875	1.0000	0.0000	0.0	1.0000
33	(3,2,2,2,2)	(2,0,1,0,1,0,1)	0.6747	0.9881	0.1172	0.5	0.6122
34	(3,2,2,2,3)	(2,0,1,0,1,0,2)	0.6633	0.9755	0.2188	0.0	0.8041
35	(3,2,2,2,4)	(2,0,1,0,1,0,3)	0.6582	0.9550	0.3281	0.5	0.5197
36	(4,2,2,2,4)	(3,0,1,0,1,0,3)	0.6532	0.9356	0.4375	0.0	0.6539
37	(3,3,2,2,2)	(0,1,1,0,1,0,1)	0.6245	0.9521	0.4297	1.5	0.3243
38	(3,3,2,2,3)	(0,1,1,0,1,0,2)	0.6087	0.9511	0.4688	1.0	0.3848
39	(4,3,2,2,3)	(1,1,1,0,1,0,2)	0.5992	0.9414	0.5468	1.5	0.3085
40	(4,3,2,2,4)	(1,1,1,0,1,0,3)	0.5939	0.9261	0.6250	1.0	0.3543

Table 4. Trace Optimal PBA's and Values of Orthogonality Criteria for $t=7(s=4,\ n\leq 42)$

size of design: n	index set: $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$	construction coefficient: $(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6,\beta_7)$	*trace*	values of orthogonality criteria			
				$(E_1)_T$	$(E_2)_T$	$(E_3)_T$	$(E_4)_T$
29,a	(3,1,1,3,4) (dual design)	(0,1,0,0,0,1,0,1)	1.4861	0.6729	1.0156	2.5	0.1490
29,b	(4,3,1,1,3) (dual design)	(1,0,1,0,0,0,1,0)	1.4861	0.6729	1.0156	2.5	0.1490
30	(5,3,1,1,3)	(0,1,0,0,0,1,0,2)	1.4479	0.6676	1.0938	3.0	0.1311
31	(6,3,1,1,3)	(0,1,0,0,0,1,0,3)	1.4352	0.6518	1.1719	3.5	0.1149
32	(7,3,1,1,3)	(0,1,0,0,0,1,0,4)	1.4288	0.6343	1.2500	4.0	0.1015
33	(7,3,1,1,4)	(1,1,0,0,0,1,0,4)	1.4248	0.6168	1.3281	3.5	0.1058
34	(8,3,1,1,4)	(1,1,0,0,0,1,0,5)	1.4247	0.5987	1.4063	4.0	0.0935
35	(9,3,1,1,4)	(1,1,0,0,0,1,0,6)	1.4185	0.5841	1.4844	4.5	0.0836
36	(4,3,1,2,6)	(0,2,0,0,0,1,0,1)	1.3099	0.6150	1.0625	0.0	0.2982
37	(5,3,1,2,6)	(0,2,0,0,0,1,0,2)	1.2717	0.6163	1.1406	0.5	0.2334
38	(6,3,1,2,6)	(0,2,0,0,0,1,0,3)	1.2590	0.6062	1.2188	1.0	0.1883
39	(7,3,1,2,6)	(0,2,0,0,0,1,0,4)	1.2526	0.5936	1.2969	1.5	0.1563
40	(8,3,1,2,6)	(0,2,0,0,0,1,0,5)	1.2488	0.5806	1.3750	2.0	0.1327
41	(8,3,1,2,7)	(1,2,0,0,0,1,0,5)	1.2467	0.5674	1.4531	1.5	0.1435
42	(8,3,1,2,3)	(2,2,0,0,0,1,0,5)	1.2453	0.5545	1.5313	1.0	0.1570

3. 강도가 4인 부분균형배열의 직교성 평가 방법

앞에서 언급한 바와 같이, 실험의 직교성은 실험의 효율성을 평가하는 데 중요한 평가측도가 된다. 그리고 본 연구에서 다루고자 하는 부분균형배열은 직교성을 만족하는 직교배열을 일반화한 배열이므로 부분균형배열을 이용하여 일부실험을 설계하는 경우, 설계된 실험법의 직교성을 평가하는 측도를 개발하여 보다 직교배열에 가까운 일부실험법을 설계할 필요가 있게 된다.

일반적으로 사용되는 직교성 평가측도는 실험법의 상대적 트레이스 최적성 값을 평가하는 방법이 사용된다. 예를 들어 2^t resolution-V 일부실험에서 효과에 대한 추정량들의 개수는 전체 모평균 1개와 t개의 주효과 그리고 $t(t-1)/2$개의 2인자 교호작용의 개수를 합한 $\xi_t = 1+t+(t(t-1)/2)$이고, 직교성을 만족하는 직교배열이 존재하는 경우 직교배열로 설계되는 실험법의 추정량들의 분산공분산 행렬의 트레이스 값은 ξ_t/n가 된다. 따라서 강도가 4인 2-수준계 부분균형배열 T로 설계되는 일부실험법의 직교성을 평가측도로, Srivastava and Chopra(1971)는 트레이스 관점에서 식(2.2)을 이용한 (3.1)과 같은 척도를 제시하였다. 그리고 식(3.1)의 최대값은 직교성을 만족하는 경우 1이 되므로, 1에 가까울수록 직교성을 만족하는 것으로 평가될 수 있다.

$$(E_1)_T = \frac{\xi_T}{n \times tr(C_T)} \tag{3.1}$$

그리고 부분균형배열의 통계적 구조는 index 집합 $\underline{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$에 의해 결정되며, α_i 값들이 모두 동일한 경우 직교배열이 되므로, 트레이스 관점의 식(3.1)과는 달리 배열의 구조적 관점에서 직교성을 평가하는 방법이 필요하게 된다. 배열의 구조적 관점에서 직교성을 평가하는 방법으로 Ma et.al(2000)은 강도가 2인 직교배열과의 구조적 유사성을 평가하는 측도를 제안하였으며, 이를 일반화하여 Kim(2008)은 강도가 4인 균형배열의 직교성의 구조를 평가하는 방법을 다음과 같이 제시하였다. 먼저 부분균형배열에서는 임의의 $(n\times 4)$ 모든 부분행렬(submatrix)에서 출현 가능한 모든 행벡터 (x_1, x_2, x_3, x_4) 가 $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 회 출현하고 $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 값이 (x_1, x_2, x_3, x_4) 의 모든 치환(permutation)에서 동일하게 된다. 그리고 직교배열에서는 $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$값이 항상 같게 되므로, 이러한 구조적 원리에 따라 다음의 식(3.2) 값이 0에 가까울수록 배열 T는 강도가 $s=4$인 직교배열과 유사한 것으로 평가될 수 있다.

$$(E_2)_T = \frac{1}{\binom{t}{4}} \sum_{1\le i<} \sum_{j<} \sum_{k<} \sum_{l\le t} \gamma(\psi_\pi(\underline{x_i}, \underline{x_j}, \underline{x_k}, \underline{x_l})) \tag{3.2}$$

여기서 $\psi_\pi(\underline{x_i}, \underline{x_j}, \underline{x_k}, \underline{x_l}) = \frac{1}{16} \sum_{x_1} \sum_{x_2} \sum_{x_3} \sum_{x_4} \pi\left(\left| C_{\underline{x_i}, \underline{x_j}, \underline{x_k}, \underline{x_l}}(x_1, x_2, x_3, x_4) - \frac{n}{16} \right| \right)$이고,

$\gamma(\bullet)$와 $\pi(\bullet)$는 $[0, \infty)$에서 정의되고, $\gamma(0) = \pi(0) = 0$을 만족하는 단조증가함수이고 $C(\underline{x_i}, \underline{x_j}, \underline{x_k}, \underline{x_l})$ 는 배열 T에서 임의의 4개 열 $(\underline{x_i}, \underline{x_j}, \underline{x_k}, \underline{x_l})$로 구성되는 $(n\times 4)$부분행렬에서 처리조합인 행백터 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수를 의미한다.

식(3.2)에서 $\gamma(\bullet)$와 $\pi(\bullet)$의 함수형태로 Ma et.al(2000), Jang(2002)은 선형함수를 사용할 것을 제안하였으며,

Fang et.al(2003)은 이차함수를 제안하였다. 본 연구에서는 Kim(2008)과 같이 $\gamma(x)=\pi(x)=x$의 선형함수를 사용하고자 하며, 이러한 경우 식(3.2)는 다음과 같게 된다.

$$(E_2)_T=\frac{1}{16}\left(\left|\alpha_0-\frac{n}{16}\right|+4\left|\alpha_1-\frac{n}{16}\right|+6\left|\alpha_2-\frac{n}{16}\right|+4\left|\alpha_3-\frac{n}{16}\right|+\left|\alpha_4-\frac{n}{16}\right|\right) \tag{3.3}$$

그리고 $(n\times t)$배열 T의 모든 열에서 수준 0과 1이 동일한 빈도로 출현하는 경우 일양계획(uniform design)이라 하며, 직교배열이 되기 위해서는 일양계획은 필요조건이 된다. 따라서 배열 T의 직교성을 평가하는 방법으로 Kim(2008)은 다음과 같은 측도 $(E_3)_T$ 를 제안하였다.

$$(E_3)_T=\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}\chi(f_\rho(\underline{x_i})) \tag{3.4}$$

여기서 $f_\rho(\underline{x_i})=\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\rho(\left|C_{\underline{x_i}}(x)-(n/2)\right|)$ 이고,

$\chi(\bullet)$와 $\rho(\bullet)$는 $[0,\infty)$에서 정의되는 단조 증가함수로서 $\chi(0)=\rho(0)=0$을 만족하고 $C_{\underline{x_i}}(x)$는 열백터 $\underline{x_i}$에서 수준 x의 출현 횟수를 의미한다.

그리고 강도가 $s=4$인 부분균형배열에서 $\chi(\bullet)$와 $\rho(\bullet)$의 함수형태가 선형함수인 경우 식(3.4)는 다음과 같이 된다.

$$(E_3)_T=\frac{1}{2}\left(\left|\alpha_0+3\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3-\frac{n}{2}\right|+\left|\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4-\frac{n}{2}\right|\right) \tag{3.5}$$

그리고 식(3.1)의 평가측도 $(E_1)_T$의 최대값은 1이고, 값이 클수록 직교성을 만족한다고 평가할 수 있고, 식(3.3)과 식(3.5)의 $(E_2)_T,(E_3)_T$는 최소값이 0으로서 작을수록 직교배열과 더욱 유사하다고 할 수 있다. 따라서 트레이스 관점과 배열의 구조적 관점에서 평가한 세 가지 측도를 동시에 고려한 측도로는 다음과 같은 측도 $(E_4)_T$를 사용할 수 있으며, 이 값은 0과 1사이의 값을 가지며, 값이 클수록 직교성에 가까운 효율적인 계획이 된다고 할 수 있다.

$$(E_4)_T=\frac{(E_1)_T}{1+(E_2)_T+(E_3)_T} \tag{3.6}$$

식(3.6)은 세 개의 직교성 평가측도를 종합한 측도라 할 수 있다. 먼저 $(E_1)_T$는 일부실시법의 직교성을 트레이스 관점에서 평가한 측도이며, 두 번째 요소인 $(E_2)_T$는 배열의 구조적 관점을 평가한 측도라 할 수 있으며, 세 번째 요소인 $(E_3)_T$는 일양계획의 측면에서 평가한 측도이다. 그리고 인자의 수와 실험크기에 따라 설계된 일부실험법의 트레이스 값과 직교성 평가척도들인 (2.2), (3.1), (3.3), (3.5)및 (3.6)의 평가값들은 Table 1, Table 2, Table 3, Table 4의 마지막 5개의 열에 제시되어 있다.

4. 직교성에 가까운 최적실험법의 실험크기 결정

일부실시법을 설계하고자 할 때, 실험크기를 결정하는데 있어서 Table 1, Table 2, Table 3, Table 4는 직교성에 가까운 실험크기를 갖는 resolution-Ⅴ 최적 균형일부실험을 설계하는데 유용하게 사용될 수 있다. 먼저 인자의 수가 $t=4$인 경우, Table 1에서 알 수 있는 바와 같이 실험의 크기가 $n=14,16,18,22,24,26$인 경우 일양계획이 된다. 특히 $n=16$인 경우는 직교배열이 됨과 동시에 반복이 없는 완전요인 실험법(full factorial design)이 되며 모든 직교성 측도들에서 최적실험이 된다. 그리고 $n=16$을 중심으로 실험의 크기를 작게 하고 싶은 경우에는 $n=14$혹은 $n=15$인 경우 직교성에 가까운 실험법이 됨을 알 수 있으며, 일양계획을 설계하고자 하는 경우에는 $n=14$인 경우가 추천될 수 있다. 그리고 실험의 크기를 크게 하고자 하는 경우에는 $n=18$인 경우 일양계획이 됨과 동시에 $(E_1)_T$과 $(E_2)_T$ 측도 면에서도 비교적 우수한 실험법이 된다. 그리고 실험의 크기를 직교배열보다 크게 하고자 하는 경우에는 $n=26$으로 설계하는 실험법이 추천될 수 있다.

인자의 수가 $t=5$인 경우 Table 2를 살펴보면, $n=16,32$인 경우 직교배열이 되지만, $n=16$인 경우는 포화실험(saturated design)이 되어 일반적인 분산분석법의 방법으로는 분석할 수 없는 단점이 있고, $n=32$인 경우에는 완전요인 실험법으로서 실험의 크기가 너무 크게 된다.따라서 $n=18$인 경우와 $n=30$인 경우 또는 $n=20$인 경우가 일양계획이 됨과 동시에 다른 직교성 측도 면에서도 비교적 우수한 실험법이 됨을 알 수 있다. 그러므로 실험의 크기를 작게 하고자 하는 경우에는 $n=18$인 경우가 추천될 수 있으며, 실험의 크기를 크게 하고자 하는 경우에는 $n=32$ 또는 $n=30$인 경우가, 그리고 적당한 크기의 실험을 설계하고자 하는 경우에는 $n=20$이 우수한 실험법이 된다.

그리고 인자의 수가 $t=6$인 경우에는, Table 3에서 알 수 있는 바와 같이 $n=32$인 경우 직교배열이 됨과 동시에 최적 실험이 된다. 그리고 이러한 직교배열 보다 실험의 크기를 작게 하고자 하는 경우에는 $n=25$인 경우 트레이스 관점이나 일양계획의 관점 또는 배열의 구조적 관점에서도 직교성에 가까운 실험법이 되어 추천될 수 있다. 그리고 실험의 크기를 크게 하고자 하는 경우에는 $n=34$인 경우 일양계획이 됨과 동시에 다른 측도 면에서도 비교적 효율적인 실험법으로 평가될 수 있다.

Table 4를 살펴보면 인자의 수가 $t=7$인 경우에는, $n=36$인 경우 일양계획이 됨과 동시에 다른 측도인 $(E_1)_T$, $(E_2)_T$, 그리고 종합적 측도인 $(E_4)_T$ 관점에서도 다른 실험법보다 우수한 실험법이 됨을 알 수 있다. 그리고 $n=37$인 경우는 비록 일양계획이 되지 않지만 직교성에 가까운 실험법으로서 추천될 수 있다.

5. 결론 및 추후 연구과제

실험계획의 부분실험법을 설계할 때 일반적으로 고려하여할 사항은 resolution의 정도와 실험의 크기인 처리조합의 수, 그리고 통계적 최적성이라고 할 수 있다. 본 연구에서는 2-수준 요인 실험에서 직교배열을 일반화한 부분균형배열에 의해 설계되는 일부실험법의 통계적 최적성를 평가하는 방법으로 추정량의 분산-공분산 행렬의 트레이스와 배열의 구조적 관점 그리고 일양계획의 특성을 고려한 다양한 형태의 직교성 평가 측도를 제시하였다. 그리고 부분균형배열에 의해 설계되는 균형실험법으로서 주효과와 2-인자 교호작용까지 분석이 가능하고 직교성에 가까운 효율적인 실험크기를 갖는 resolution- Ⅴ 일부실험법을 설계하는 방법을 고찰하였다.

특히 본 연구에서 고찰한 resolution-Ⅴ 일부실험법은 Kim(1992)이 제시한 포화실험법과는 달리 실험오차의 평가가 가능하므로 일반적인 분산분석법을 적용하여 분석할 수 있다는 장점이 있다. 따라서 산업현장에서 주효과 및

2-인자 교호작용까지 분석하고자 하는 실험을 설계할 때, 본 연구에서 제시한 결과를 사용하면 직교성에 가까우면서도 효율적인 실험계획을 다양하게 설계할 수 있을 것이다.

그리고 인자의 수가 $t \geq 8$인 경우에 대해서도 강도가 $s=4$인 부분균형배열을 설계하는 방법과 아울러 본 연구에서 제시한 다양한 관점에서 직교성을 평가하여, 2-수준계 요인실험에서 인자의 수가 많은 경우에도 주효과와 2-인자 교호작용까지 분석이 가능하고 직교성에 가까운 최적의 resolution-Ⅴ 일부실험법을 설계하는 방법에 대한 연구는 앞으로 진행되어야할 과제이다.

REFERENCES

Chakravartie, I.M. 1956.“Fractional Replications in Asymmetrical Factorial Design and Partially Balanced Arrays." Sankhya 17:143-164.

Chopra, D.V., and Srivastava, J.N. 1973. "Optimal Balanced 2^7 Fractional Factorial Designs of Resolution V with N ≦ 42." Annals of Institute of Statistical Mathematics 25:587-604.

Fang, K.T., Lin,D. K.J., and Liu, M. 2003. “Optimal Mixed-level Supersaturated Design." Metrika 58:279-291.

Jang, D.H. 2002. "Measures for Evaluating Non-orthogonality of Experimental Designs.” Communications in Statistics-Theory and Methods 31:249-260.

Kim, S.I. 1992. "Minimal Balanced 2^t Fractional Factorial Designs of Resolution V and Taguchi Method." The Korean Journal of Applied Statistics 5:19-28.

Kim, S.I. 2008. "Evaluation of the Degree of Orthogonality of 2- level Resolution-V Designs of Constructed by Balanced Array." Comumunications of the Korean Statistical Society 15: 235-244.

Ma, C., Fang, K., and Liski, E. 2000. “A New Approach in Constructing Orthogonal and Nearly Orthogonal Arrays.”Metrica 50:255-268.

Srivastava, J. N. 1965. "Optimal Balanced 2^m Fractional Factorial Designs." S.N. Roy Memorial Volume, Univ. of North Carolina and Indian Statistical Institute.

Srivastava, J. N. and Chopra, D.V. 1971. "Balanced Optimal 2^m Fractional Factorial Designs of Resolution V, m ≦ 6." Technometrics 13:257-269.