단기선 GPS측위 모델을 이용한 관측오차 분석

Analysis of Measurement Errors Using Short-Baseline GPS Positioning Model

홍창기[®]·한수희^{2®} Hong, Chang−Ki·Han, Soohee

Abstract

Precise stochastic modeling for GPS measurements is one of key factors in adjustment computations for GPS positioning. To analyze the GPS measurement errors, Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimators(MINQUE) approach is used in this study to estimate the variance components for measurement types with short-baseline GPS positioning model. The results showed the magnitudes of measurement errors for C1, P2, L1, L2 are 22.3cm, 27.6cm, 2.5mm, 2.2mm, respectively. To reduce the memory usage and computational burden, variance components are also estimated on epoch-by-epoch basis. The results showed that there exists slight differences between the solutions. However, epoch-by-epoch analysis may also be used for most of GPS applications considering the magnitudes of the differences.

Keywords: GPS, Short-baseline, Variance Component, MINQUE

추 로

GPS 관측값을 이용하여 측위를 하는 경우 조정계산이 수반되면 이때 관측오차에 대한 정확한 모델링이 필수적이다. 본 연구에서는 GPS 관측타입별 관측오차를 분석하기 위해 MINQUE(Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimators) 방법을 사용하였으며 단기선 GPS측위 모델을 기반으로 하였다. C1, P2, L1, L2 관측타입에 대해 각각 단위분산을 계산하였으며 그 결과 관측오차는 각각 22.3cm, 27.6cm, 2.3cm, 2.2cm로 나타났다. 단위분산 계산에는 대용량의 컴퓨터 메모리와 복잡한 계산이 필요하다. 이러한 단점을 극복하기 위해 epoch별로 단위분산을 추정하였으며 결과를 분석함으로써 epoch별 계산방법의 유효성을 검증하였다. 분석 결과, 계산된 결과값에 차이가 있긴 했으나 그 차이가 비교적 작기 때문에 대부분의 GPS 응용분야에서의 활용에는 문제가 없을 것으로 판단된다.

핵심어 : GPS, 단기선, 단위분산, MINQUE

Received 2017. 11. 30, Revised 2017. 12. 06, Accepted 2017. 12. 14

¹⁾ Member, Dept. of Geoinformatics Engineering, Kyungil University (E-mail: ckhong@kiu.ac.kr)

²⁾ Corresponding Author, Member, Dept. of Geoinformatics Engineering, Kyungil University (E-mail: scivile@kiu.ac.kr)

1 서 로

GPS는 3차워 직각좌표 형태로 위치정보를 제공하고 있으 며 위치정보가 필요한 다양한 분야에 활용되고 있다. GPS 관 측값을 통해 위치를 계산하기 위해서는 미지수와 관측값을 수학적으로 연결하는 함수모델(functional model)과 관측값 의 오차에 대한 통계모델(stochastic model)을 정의해야 한다. 즉, 정밀한 측위를 위해서는 두 부분에 대한 정확한 모델링이 필수적이다. 단독측위와 상대측위는 GPS를 이용한 대표적인 측위방법이라 학 수 있으며 이와 과려되 한수모덱득은 비교 적 정확하게 정의되어 있다(Hofmann-Wellenhof et al., 2008; Leick, 2004). 반면 관측오차에 대한 통계모델은 수신기 성능, 관측 화경 등에 영향을 받기 때문에 동일한 기종의 수신기라 도 다른 통계 특성을 나타낼 수 있다. 특히 GPS의 경우 코드 및 위상데이터의 정밀도가 서로 다른 경우라서 정확한 통계모 델링이 필수적이다. 통계특성을 정확하게 정의해야 하는 이유 는 미세한 변위 등을 판별할 때 변위벡터에 대한 분산-공분산 정보를 사용하는 데 이때 분산-공분산은 정의된 통계모델에 따라 달라지기 때문이다. 모호정수 결정을 위해 널리 사용되 는 LAMBDA방법 또한 분산-공분산 정보를 기반으로 하기 때 문에 당연히 통계모델링의 영향을 받는다(Teunissen, 1994).

통계모델링을 정확하게 하는 방법 중 하나는 관측타입 각 각에 대해 단위분산(variance component)을 계산하는 것으 로 이종데이터(heterogeneous data)를 관측값으로 사용하는 조정계산에 널리 사용되고 있다(Koch, 1986; Xu et al., 2006; Teunissen and Amiri-Simkooei, 2008). 단위분산을 계산하 는 대부분의 방법은 대용량의 컴퓨터 메모리와 복잡한 계산 과정을 필요로 하며 이로 인해 통계모델링 기법을 쉽게 적 용하기는 어렵다. 이러한 이유로 Amiri-Simkooei(2007)와 Tiberius and Kenselaar(2003)는 관측값에 geometry-free 선 형조합을 한 후 epoch별 단위분산을 계산함으로써 관측값 의 오차를 분석하기도 하였다. 본 논문에서는 널리 사용되는 MINOUE 방법을 사용하여 GPS 수신기의 관측타입별 오차 특성을 분석하였다. 이때 취득 데이터 전체에 대한 단위분산 을 계산하기 위해 geometry-free 선형조합 대신 보다 안정적 인 모델인 단기선 GPS측위 모델을 선택하였다. 또한 epoch 별 계산된 단위분산과의 비교를 통해 계산된 결과의 신뢰성 을 분석하였다.

2. 연구이론 및 방법

GPS를 이용한 위치결정 방법은 크게 절대측위와 상대

측위로 구분할 수 있으며 정밀측위가 필요한 분야에서는 일 반적으로 상대측위 기법을 사용한다. 상대측위는 기준국 (reference station)과 이동국(rover)에서 동시에 수신된 GPS 데이터에 대해 차분법을 적용함으로써 측위정확도를 향상시키는 기법으로 이중차분법이 주로 사용된다. 이중차분법을 사용하더라도 기선의 길이가 길어지게 되면 대기오차 등이충분히 소거되지 않게 되며 따라서 이에 대한 추가적인 모델링을 해야 한다. 본 연구는 GPS 관측데이터의 오차 특성을 분석하기 위한 것으로 다른 오차요인의 개입을 최대한 줄이기위해 단기선 GPS 데이터 모델을 사용하였다. 단기선의 경우대류권지연과 전리층지연 효과의 제거가 가능하며 이중차분된 관측방정식은 다음 Eq. (1)과 같이 간단한 형태로 표현할수 있다(Goad and Yang, 1997).

$$\begin{split} P_{ij,1}^{k\ell} &= \rho_{ij}^{k\ell} + e_{ij,1}^{k\ell} \\ P_{ij,2}^{k\ell} &= \rho_{ij}^{k\ell} + e_{ij,2}^{k\ell} \\ \Phi_{ij,1}^{k\ell} &= \rho_{ij}^{k\ell} + \lambda_1 N_{ij,1}^{k\ell} + \epsilon_{ij,1}^{k\ell} \\ \Phi_{ij,2}^{k\ell} &= \rho_{ij}^{k\ell} + \lambda_2 N_{ij,2}^{k\ell} + \epsilon_{ij,2}^{k\ell} \end{split} \tag{1}$$

where i and j: indices for reference and rover station, respectively, k and ℓ : indices for satellites, 1 and 2: L1 and L2 frequencies, respectively, P and Φ : code and phase measurements, respectively, ρ : geometric distance between the satellite and station, λ : wavelength, e and e: measurement errors.

Eq. (1)에서 보는 바와 같이 이중주파수 수신기의 경우 L1 과 L2에 코드와 위상데이터를 각각 수신하며 코드데이터는 위성과 수신기 사이의 기하학적 거리와 관측오차로 구성되어 있다. 위상데이터는 코드데이터에 비해 모호정수(integer ambiguity)가 추가되어 있는 형태로 나타난다. GPS 관측방정식으로부터 미지수를 결정하기 위해서는 조정계산이 필요하며 이때 비선형식에 대한 선형화 작업이 필요하다. Eq. (2)는 GPS 관측방정식을 선형화 한 후 행렬형태로 표현한 것이다.

$$\begin{bmatrix} \delta P_{ij,1}^{k\ell} \\ \delta P_{ij,2}^{k\ell} \\ \delta \Phi_{ij,1}^{k\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{ij,1}^{k\ell} \\ e_{ij,2}^{k\ell} \\ \epsilon_{ij,2}^{k\ell} \\ \epsilon_{ij,1}^{k\ell} \end{bmatrix}$$

$$(2)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 A_2 \end{bmatrix}, \ A_1 = \begin{bmatrix} A_{x_j} A_{y_j} A_{z_j} \\ A_{x_j} A_{y_j} A_{z_j} \\ A_{x_j} A_{y_j} A_{z_j} \\ A_{x_j} A_{y_j} A_{z_j} \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

where ;
$$\begin{split} A_{x_j} &= \frac{x^k - x_{j,0}}{\rho_{j,0}^k} - \frac{x^\ell - x_{j,0}}{\rho_{j,0}^\ell} \,; \\ A_{y_j} &= \frac{y^k - y_{j,0}}{\rho_{j,0}^k} - \frac{y^\ell - y_{j,0}}{\rho_{j,0}^\ell} \,; \\ A_{z_j} &= \frac{z^k - z_{j,0}}{\rho_{j,0}^k} - \frac{z^\ell - z_{j,0}}{\rho_{j,0}^\ell} \,; \end{split}$$

subscript 0 indicates initial value

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \, \xi_2 \end{bmatrix}^T, \ \xi_1 = \begin{bmatrix} \delta x_j \, \delta y_j \, \delta z_j \end{bmatrix}^T, \ \xi_2 = \begin{bmatrix} N_{ii,1}^{k\ell} \, N_{ii,2}^{k\ell} \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

일반적으로 1차 조정계산을 통해 이동국의 좌표 $(\hat{\xi_1})$ 와 실수 형(float type) 모호정수 $(\hat{\xi_2})$ 를 계산하며 정수(integer type)형 모호정수를 찾은 후 2차 조정계산을 통해 이동국의 좌표를 갱신하게 된다. Eq. (5)는 본 연구에서 사용한 Gauss-Markov 조정계산모델이다(Koch, 1988; Schaffrin, 2002).

$$y = A\xi + e, \quad e \sim (0, \Sigma = \sigma^2 P^{-1}) \tag{5}$$

where $y:n\times 1$ vector of the measurements, $A:n\times m$ design matrix, $\xi:m\times 1$ vector of unknown (parameters), $e:n\times 1$ vector of measurement errors, $\Sigma:n\times n$ variance-covariance matrix for the measurements, $\sigma^2:$ variance component (or unit variance), P: weight matrix.

Eq. (5)에 대해 최소제곱법을 적용하여 미지수($\hat{\xi}$)는 물론 조정계산 후의 잔차(\hat{e}), 그리고 단위분산($\hat{\sigma}^2$)은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\hat{\xi} = (A^T P A)^{-1} A^T P y \tag{6}$$

$$\tilde{e} = P_A^{\perp} y = \underbrace{\left(I_n - A\left(A^T P A\right)^{-1} A^T P\right)}_{P_A^{\perp}} y \tag{7}$$

$$\hat{\sigma^2} = \frac{\tilde{e}^T P \tilde{e}}{n - rk(A)} \tag{8}$$

where I: identity matrix, rk(.): rank of matrix.

Eq. (5)에서 관측값에 대한 분산-공분산 행렬(Σ)은 코드와 위상데이터의 관측오차를 기준으로 만들며 이때 정확한 오차의 크기를 미리 알 수 없는 경우 오차 크기를 가정하기도 한다. 예를 들어 코드데이터는 10cm, 위상데이터는 1mm로 가정하여 관측데이터에 대한 분산-공분산 행렬을 만들 수 있다. GPS의 경우 C1, P2, L1, L2 등의 데이터타입(data type)이 있을 수 있으며 각각에 대한 초기 설정값이 부정확한 경우 최적의 측위결과를 얻긴 어렵다. 다시 말해 Eq. (8)과 같이 모든 데이터타입에 대해 하나의 단위분산만을 계산하게 되면 각각의 데이터타입에 대한 오차특성을 충분히 반영하기 어렵게 된다. 본 연구에서는 데이터타입별로 각각의 단위분산을 추정함으로써 데이터타입에 따른 오차크기를 계산하였다. 단위분산 추정을 위한 다양한 방법들이 존재하나 가장 널리 사용되는 방법 중 하나인 MINQUE기법을 적용하였다(Rao, 1971; Rao, 1973).

따라서 Eq. (5)의 분산-공분산 행렬(Σ)은 Eq. (10)과 같이 확장된 형태로 다시 쓸 수 있다.

$$y = A\xi + e, \ e \sim \left(0, \Sigma = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 V_i\right)$$
 (10)

Eq. (9)에서의 단위분산값들은 1에 가까울수록 최적의 값이라고 할 수 있으며 반복계산(iteration)을 통해 갱신되며 이때 데이터타입별 관측오차에 대한 분산값인 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 도 동시에 갱신된다. MINQUE 기반의 단위분산은 다음 Eqs. (11), (12), (13)을 이용하여 계산할 수 있다.

$$\hat{\sigma} = S^{-1}q \tag{11}$$

$$s_{k\ell} = tr\left(V_k \Sigma^{-1} P_A^{\perp} V_{\ell} \Sigma^{-1} P_A^{\perp}\right) \tag{12}$$

$$q_k = y^T P_A^{\perp} \Sigma^{-1} V_k \Sigma^{-1} P_A^{\perp} y \tag{13}$$

where k and ℓ : indices representing elements of S and q.

3 실험 결과

31 GPS 데이터 취득 및 처리

본 연구에서는 단기선 기반 GPS 모델을 사용하였기 때문에 기준국과 이동국 사이의 기선길이가 충분히 짧도록 GPS 수신기를 설치한 후 데이터를 취득하였다. 대구에 위치한 상시관측소(TEGN)를 기준국으로 사용하였으며 기준국으로부터 약 172.7m 떨어진 곳에 GPS 수신기를 설치하였다. 기준국과 이동국의 배치는 Fig. 1과 같으며 각각의 3차원 직각좌표는 Table 1과 같다.

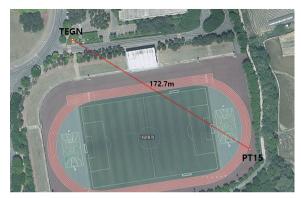


Fig. 1. Location map of reference station (TEGN) and rover (PT15)

Table 1. Cartesian coordinates of GPS stations (unit: meter)

Station	X	Y	Z
TEGN	-3,241,051.551	4,030,771.747	3,719,838.477
PT15	-3,421,191.290	4,030,728.137	3,719,747,117

이동국에서의 GPS 데이터취득은 UTC(Coordinated Universal Time)를 기준으로 2017년 6월 14일 8시 12분부터 10시 11분 59분까지 총 2 시간 동안 이루어졌으며 데이터취득 간격은 30초였다. 사용된 GPS 수신기는 정밀측위가 가능한 측지/측량용으로 수신기 모델과 안테나타입에 대한 정보는 Table 2와 같다.

Table 2. Receiver and antenna types used in this study

Station	Receiver Type	Antenna Type
TEGN	TRIMBLE NETR9	TRM59800.80 DOME
PT15	TRIMBLE R8S	TRMR8S NONE

Table 2에서 확인할 수 있듯이 수신기는 모두 TRIMBLE 회사 제품으로 데이터타입별 오차특성은 서로 유사할 것으로 예상된다.

Eq. (10)으로부터 미지수를 계산하기 위해서는 먼저 무차분 GPS데이터로부터 이중차분데이터를 만들어야 한다. 이를 위해 기준이 되는 위성과 나머지 위성과의 조합(pair)에 대해 이중차분데이터를 만들었으며 평균 고도각이 가장 큰 위성을 기준위성으로 선택하였다. 2시간 동안 취득된 데이터를 분석한 결과 PRN03이 기준위성으로 선택되었다. 또한 위성의 고도각이 낮을수록 대기효과 등에 의해 관측데이터의 오차가 커진다는 점을 고려하여 Eq. (14)과 같이 고도각 변화에 따른 가중치 함수를 적용하여 분산-공분산 행렬을 생성하였다 (Dach et al., 2015).

$$w(z) = \cos^2(z) \tag{14}$$

where z: zenith angle of the satellite.

설계행렬에 필요한 위성의 위치정보는 정밀궤도력으로부터 추출하였으며 단기선 데이터처리인 점을 감안하여 시간에 따른 조석영향(tidal effect)은 고려하지 않았다. 또한 수신기의 안테나 정보를 이용하여 L1과 L2의 안테나 phase offset에 대한 보정작업을 수행하였으며 임계고도각은 20도로 설정하였다. 임계고도각을 20도로 설정한 이유는 고도각의 영향에 따른 관측오차의 크기변화는 가능한 줄이면서 분석에 필요한 충분한 데이터를 확보하기 위한이었다.

3.2 처리결과

30초 간격으로 2시간 동안 취득한 데이터를 이용하여 이중 차분 관측방정식을 생성하는 경우 C1, P2, L1, L2 각각 1,500 개로 총 6,000개의 관측값이 생성되었다. 따라서 y 벡터의 크기는 6,000×1이며 여기에 해당되는 분산-공분산 행렬의 크기는 6,000×6,000이 된다. 따라서 MINQUE를 이용하여 데이터타입별 오차크기를 결정하기 위해서는 대용량의 컴퓨터 메모리가 필요하다는 것을 알 수 있다. 미지수의 개수는 이동국의 좌표(x,y,z) 3개와 L1과 L2의 이중차분 모호정수들로 총 21개이다. 위성조합, 동시관측시간, 그리고 계산된 L1 및 L2의 모호정수는 Table 3과 같다. 단기선 데이터처리에 해당되기 때문에 모호정수는 대부분 정수(integer)에 가까운 값으로 계산되었음을 확인할 수 있었다.

Satellite pair (PRN)	Period (hh:mm:ss)	$N_{ij,1}^{k\ell}$	$N_{ij,2}^{k\ell}$
03-01	08:12:00~09:23:30	-72.03	5.01
03-06	08:15:30~10:11:30	46.00	50.01
03-09	09:48:00~10:11:30	207.96	56.99
03-11	08:12:00~08:54:00	23.96	61.00
03-17	08:12:00~10:11:30	-144.00	51.01
03-19	08:12:00~10:11:30	113.00	71.01
03-22	08:12:00~09:35:30	10.98	1.01
03-23	09:21:00~10:11:30	46.95	94.98
03-28	08:12:00~10:11:30	80.00	71.01

Table 3. Continuous data spans for each pair of satellite and estimated float ambiguities

Eq. (11)에 의해 C1, P2, L1, L2 데이터타입별 단위분산이 계산된 후 갱신된 Q_i 값을 통해 $\sqrt{Q_i}$ 를 계산함으로써 각 데이터타입에 대한 관측오차 크기(표준편차)를 계산하였다. $\sqrt{Q_i}$ 를 계산하기 위한 초기값으로는 C1, P2, L1, L2에 대해 10cm, 10cm, 1mm, 1mm를 이용하였다. Table 4는 MINQUE를 통해 계산된 관측데이터의 오차크기를 나타내고 있으며 C1 코드데이터의 오차크기는 P2 코드데이터의 오차크기에 비해 약5cm 정도 작은 것으로 나타났다. 반면 L1 위상데이터의 오차크기는 L2 위상데이터의 오차크기에 비해 0.3mm 큰 것으로 분석되었다. 즉, C1의 경우는 P2보다 작게, L1의 경우는 L2 보다 크게 나타났으며 이러한 경향성은 관련 연구에서도 제시된 바 있다(Tiberius and Kenselaar, 2003; Amiri-Simkooei et al., 2016).

Table 4. Magnitudes of measurement errors $(\sqrt{Q_i}\,,\,i=1,2,3,4)$

	Data types			
	C1	P2	L1	L2
Magnitudes	22.3 cm	27.6 cm	2.5 mm	2.2 mm

갱신된 관측데이터의 오차크기를 반영하여 조정계산을 다시 수행한 후 Eq. (7)을 이용하여 잔차(residuals)를 계산하였으며 그 결과는 Fig. 2와 같다.

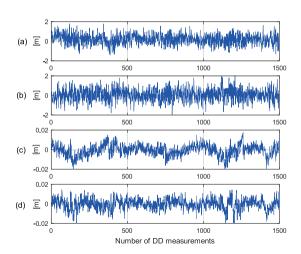


Fig. 2. Double-differenced residuals after re-adjustment computation; (a) C1 (b) P2 (c) L1 (d) L2

앞에서 언급하였듯이 단위분산을 계산하려면 대용량의 컴퓨터 메모리와 대규모의 계산이 수반되어야하며 이러한 점때문에 관측데이터의 오차크기를 쉽게 결정할 수 없다. 따라서 epoch별로 MINQUE 알고리즘을 적용하여 매 epoch마다 오차의 크기를 계산한 후 오차특성을 분석하는 경우도 있다. 하지만 한 번에 계산하는 경우와 epoch별로 계산하는 경우 결과값에 차이를 보일 수 있으므로 이에 대한 분석이 필요하다. 이를 위해 epoch별로 관측데이터의 오차크기를 계산한 후 그결과를 Table 4와 비교하였다. epoch별로 이중차분 관측값의

개수를 확인한 결과 평균 50개인 것으로 나타났으며 따라서 계산에 필요한 컴퓨터 메모리 크기를 대폭 줄일 수 있다는 장점이 있다. Fig. 3은 epoch별로 계산된 데이터타입별 오차크기를 나타내고 있으며 구체적인 통계값은 Table 5와 같다. Table 4의 결과와 비교하면 코드데이터의 경우 대략 3~5cm, 위상데이터는 0.3~0.8mm 수준에서 차이를 보이는 것으로 나타났으나 초기 설정된 코드 및 위상데이터에 대한 오차크기인 10cm와 1mm를 감안한다면 epoch별로 계산하는 방법도 대부분의 응용분야에 활용하는 데에는 무리가 없을 것으로 판단된다.

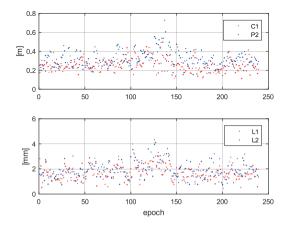


Fig. 3. Magnitudes of measurement errors based on an epoch-by-epoch analysis

Table 5. Statistical characteristics of the magnitudes of measurements errors computed on epoch-by-epoch basis $(Q_i, i=1,2,3,4)$

	C1	P2	L1	L2
Mean	25.5 cm	32.1 cm	1.7 mm	1.9 mm
Std.	7.0 cm	8.4 cm	0.6 mm	0.7 mm

5. 결 론

본 논문에서는 GPS 데이터타입별 관측오차의 크기를 분석하기 위해 MINQUE 방법을 이용하여 단위분산을 계산하였다. 이를 위해 단기선 GPS측위 모델을 선택하여 관측오차 이외의 다른 오차요인이 최소화될 수 있도록 하였으며 실제 데이터에 알고리즘을 적용함으로써 데이터타입별 관측오차의 크기를 계산하였다. C1, P2, L1, L2 각각의 관측타입에 대한

오차크기는 22.3cm, 27.6cm, 2.5mm, 2.2mm로 계산되었으며 이때 관측타입 사이에는 서로 상관관계가 없는 것으로 가정하였다. 단위분산 계산에 필요한 컴퓨터 메모리 크기를 고려하여 epoch별로 단위분산을 계산하였으며 그 결과를 비교·분석하였다. epoch별 계산된 값들의 평균과 비교했을 때 코드데이터의 경우 대략 3~5cm, 위상데이터는 0.3~0.8mm 수준에서 차이를 보이는 것으로 나타났다. 따라서 epoch별로 계산하는 방법도 일반적인 응용분야에는 활용하는 데는 큰 문제가 없을 것으로 판단된다. 실험을 통해 산출된 결과물은 장기선 데이터처리는 물론 GPS를 이용한 변위분석 등에 유용하게 활용될 수 있을 것으로 예상된다. 본 연구는 CI, P2, L1, L2의 관측오차 크기결정에 초점을 맞추어 수행되었으나 관측타입사이의 상관관계도 존재할 것으로 예상된다. 따라서 향후보다 정밀한 관측오차에 대한 분석을 위해 상관관계에 대한추가적인 분석도 필요할 것으로 사료된다.

감사의 글

이 연구는 2015년 기상청 연구개발사업의 재원으로 기상 산업기술원의(KMIPA2015-3071)의 지원을 받아 수행되었습 니다.

References

Amiri-Simkooei, A.R. (2007), Least-squares Variance Component Estimation: Theory and GPS Applications, Ph.D. dissertation, Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 202p.

Amiri-Simkooei, A.R., Zangeneh-Nejad, F., and Asgari, J. (2013), Least-squares variance component estimation applied to GPS geometry-based observation model, *Journal of Surveying Engineering*, Vol. 139, pp. 176-187.

Amiri-Simkooei, A.R., Jazaeri, S., Zangeneh-Nejad, F., and Asgari, J. (2016), Role of stochastic model on GPS integer ambiguity resolution success rate, *GPS Solutions*, Vol. 20, No. 1, pp. 51-61.

Dach, R., Lutz, S., Walser, P., and Fridez, P. (2015), Bernese GNSS Software Version 5.2 Manual, Astronomical Institute, University of Bern.

Goad, C.C. and Yang, M.A. (1997), New approach to precision airborne GPS positioning for photogrammetry,

- *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, Vol. 63, No. 9, pp. 1067-1077.
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., and Wasle, E. (2008), *GNSS Global Navigation Satellite System GPS, GLONASS, Galileo & more*, Springer, Wien New York.
- Koch, K.R. (1986), Maximum likelihood estimate of variance components. *Bulletin Geodesiaue*, Vol. 60, pp. 329-338.
- Koch, K.R. (1988), Parameter Estimation and Hypothesis Testing Linear Models, Springer-Verlag, Berlin.
- Leick, A. (2004), GPS Satellite Surveying, 3rd edition, John Wiley, New York.
- Rao, C.R. (1971), Estimation of variance and covariance components – MINQUE theory, *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 1, pp. 257-275.
- Rao, C.R. (1973), Linear Statistical Inference and its Applications, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydeny, Toronto.
- Schaffrin, B. (2002), Adjustment Computations, Lecture Notes (GS651), Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA.
- Teunissen, P.J.G. (1994), A new method for fast carrier phase ambiguity estimation, *Proceedings of IEEE PLANS'94*, Las Vegas, NV, April 11-15.
- Teunissen, P.J.G. and Amiri-Simkooei, A.R. (2008), Least-squares variance component estimation, *Journal of Geodesy*, Vol. 82, No. 2, pp. 65-82.
- Tiberius, C. and Kenselaar, F. (2003), Variance component estimation and precise GPS positioning: Case study, *Journal of Surveying Engineering*, Vol. 129, No. 1, pp. 11-18.
- Xu, P, Shen, Y., Fukuda, Y., and Liu, Y. (2006), Variance component estimation in linear inverse ill-posed models, *Journal of Geodesy*, Vol. 80, No. 2, pp. 69-81.