Journal of the Korea Convergence Society
Vol. 7. No. 5, pp. 213-219, 2016 http://dx.doi.org/10.15207/JKCS.2016.7.5.213

상한 융합 변수를 갖는 단선형제약 오목함수 최소화 문제의 해법

오세호
청주대학교 산업공학과

An Algorithm for the Singly Linearly Constrained Concave Minimization Problem with Upper Convergent Bounded Variables

Se-Ho Oh
Dept. of Industrial Engineering, Cheongju University

요 약 본 논문에서는 한 개의 선형 제약식 하에서 의사결정변수가 상한 값을 갖는 오목 함수 최소화 문제를 다룬다. 제시된 분지 한계 해법은 단체를 분할 단위로 사용하였다. 오목함수를 가장 단단하게 하한추정하는 볼록덮개함수를 단체 상에서 유일하게 구할 수 있기 때문이다. 분지가 일어날 때마다 후보 단체로부터 1 차원 낮은 2 개의 하위 단체들이 생성된다. 이 때 후보 단체에 포함되어 있던 가능해 집합은 각각의 하위 단체로 분할된다. 한계 연산 절차는 선형인 볼록 덮개 함수를 목적 함수로 하는 선형계획법을 부문제로 정의하고 해를 구한다. 부문제의 최적 목적함수 값으로부터 최적 오목목적함수의 하한과 상한을 갱신하고, 원문제의 최적해를 포함하지 않는 단체들을 고려 대상에서 제외시킨다. 본 해법의 최대 장점은 하위 단체로 분할될수록 부문제들의 크기가 점점 작아진다는 데 있다. 이것은 한계 연산의 계산량이 줄어든다는 것을 의미한다. 본 연구의 결과는 배낭 제약식 유형의 제약식 하에서의 오목 함수 최소화 문제의 해법을 개발하는데 응용될 수 있을 것이다.

• 주제어 : 분지 한계, 오목 함수 최소화, 볼록 덮개, 분할, 단체

Abstract This paper presents a branch-and-bound algorithm for solving the concave minimization problem with upper bounded variables whose single constraint is linear. The algorithm uses simplex as partition element. Because the convex envelope which most tightly underestimates the concave function on the simplex is uniquely determined by solving the related linear equations. Every branching process generates two subsimplices one lower dimensional than the candidate simplex by adding 0 and upper bound constraints. Subsequently the feasible points are partitioned into two sets. During the bounding process, the linear programming problems defined over subsimplices are minimized to calculate the lower bound and to update the incumbent. Consequently the simplices which do certainly not contain the global minimum are excluded from consideration. The major advantage of the algorithm is that the subproblems are defined on the one less dimensinal space. It means that the amount of work required for the subproblem decreases whenever the branching occurs. Our approach can be applied to solving the concave minimization problems under knapsack type constraints.

• Key Words : Branch-and-bound, Concave minimization, Convex envelope, Partition, Simplex

*Corresponding Author : 오세호 (ohsho@cju.ac.kr)
Received September 9, 2016 Revised October 7, 2016
Accepted October 20, 2016 Published October 31, 2016

1. 서론

본 연구에서는 다음의 오목함수 최소화 문제를 다루고자 한다. n개의 집단이 목적함수 기준에 따라 주어진 용량 내에서 선택되는 상황을 나타낸다.

$$(P) \quad \begin{array}{l} \min f(x) \\ s.t \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \\ \quad x_i = 0 \text{ or } u_i, \ i = 1,..,n \\ where \ f(x) : concave \end{array} \qquad (1)$$

오목함수 최소화 문제는 Tui[1]의 모형을 시작으로 0-1 정수 계획법 문제[2,3,4,5,6,7], 선형 고정비용 문제[8,9,10,11], 전략 무기 계획 문제[12], 오목 함수 설비배치 문제[13]를 다루는 과정에서 다양한 형태로 제시되었다. 하지만 볼록 혹은 선형인 목적함수 문제를 대상으로 하는 전통적인 최적화 해법으로는 이러한 오목함수 문제의 최적해를 구할 수가 없다. 목적함수의 오목성이 일반적인 최적화 해법의 적용을 불가능하게 만들기 때문이다. 그러므로 전통적인 최적화 기법들을 반복적으로 사용함으로써 최적점을 찾아가는 최적 해법을 제시하고자 한다.

오목함수 최소화 문제에 대한 가장 일반적인 접근법은 분지-한계 절차이다[14,15]. 목적함수의 형태와 가능해 집합의 구조적 특이점은 많은 연구자들에게 분지-한계 전략에 대한 착상을 제공했다.

분지 전략은 가능해 집합이 어떤 형태로 분할되느냐에 따라 달라진다. 즉 분할 단위(partition element) 결정이 분지 전략의 핵심이라고 볼 수 있다. Tui[1]는 직원뿔(cone)을 Kalantari & Rosen[16]은 평행다면체(parallelpiped)를 분할 단위로 채택하였다. 단체(simplex)도 분할 단위로 쓰였는데 Benson[17], Benson & Erenguc[18], Falk & Hoffman[19], Horst[20,21], Cho[22], Oh[23] 등에 의해서다.

이러한 분지 전략과 함께 또 하나의 중요한 절차는 한계 연산이다. 가능해 집합 위에서 오목 목적함수를 하한추정(underestimating)하는 볼록 함수를 구한 다음 일반 최적화 해법을 적용시키는 과정을 반복함으로써 가능해들을 평가하는 과정이다. 따라서 하한추정 함수의 선택이 무엇보다도 중요하다. Tui[1]는 가장 원시적 형태인 절단식(cut)을, Falk & Hoffman[12]은 부분 선형식(piecewise linear)을, 그리고 Kalantari & Rosen[16]은 2차식 하한 추정함수를 그들의 해법에서 사용하였다. 특히 Benson은 단체(simplex) 상에서는 목적함수에 가장 가까이 하한추정하는 볼록함수가 일차식임을 밝히고 볼록덮개함수(convex envelope)라 명명하였다[17].

본 연구에서의 최적 분지-한계 해법 개발 과정은 이산조건 완화로부터 시작된다. 문제 (P)의 이산 조건을 부등식으로 완화시키면 문제 (P)는 볼록유계다면체(convex polytope) 상에서의 오목함수 최소화 문제로 변환된다. 완화된 가능해 집합인 볼록유계다면체의 정점 중이 하나가 이 오목함수 문제의 부분 최적해이고 (P)의 가능해이다. 따라서 매 반복 회차마다 볼록유계다면체의 정점이 발견되고, 이 점이 (P)의 최적인지 평가되도록 분지-한계 절차를 만들고자 한다. 한계 절차에서의 부문제가 선형 볼록덮개 함수를 목적함수로 하는 선형계획법이면 유계다면체의 정점, 즉 (P)의 가능해를 얻게 된다. 이러한 볼록덮개 함수를 결정하기 위해 볼록유계다면체를 포함하는 단체를 도입한다. 볼록 덮개 함수가 단체상에서 유일하게 고정된다는 사실에 착안한 것이다. 그리고 매 한계 연산마다 이와 같은 절차가 가능하도록 후보단체가 하위단체로 분할이 되도록 하였다. 후보단체들은 선택된 분지 변수를 양쪽의 경계 값으로 고정시킴으로써 반복적으로 1차원 낮은 단체들로 나누어진다. 따라서 후보 단체가 품고 있던 (P)의 가능해들은 생성된 하위 단체상으로 분할된다. 실제로 새로운 부문제(subproblem)들이 만들어지는 과정에서 일차방정식을 풀어야 하는 계산상의 부담이 발생한다. 그러나 본 연구에서의 단체 생성은 후보 단체를 초평면에 투사시킴으로써 이루어지기 때문에 하위 부문제의 크기가 점차 줄어드는 장점이 있다.

2장에서는 분지-한계 전략이 구체화 되는 과정을 자세하게 설명하였고 3장에서는 해법의 절차를 기술하고 수치 예제를 통해 그 타당성을 확인하였다. 마지막으로 결론과 추후 연구 방향에 대하여 언급하였다.

2. 분지-한계 전략

2.1 단체 생성(simplex generation)

분지 전략은 가능해 집합을 분할(partition)하는 방법을 의미한다. 본 연구에서는 (P)의 가능해 집합을 포함하고 있는 단체를 분할함으로써 (P)의 가능해를 분할하는 방법을 수립하였다.

해법의 이론적 토대를 명확하게 설명하고 절차를 명료하게 표현하기 위해 다음과 같은 표기와 정의를 사용한다.

표기

Θ: 후보 단체(candidate simplex) 목록 집합

$S_\varphi(\varphi\in\Theta)$: 후보 단체

(CP_φ): S_φ로부터 정의된 부문제(subproblem)

$L.B_\varphi$: (CP_φ)의 최적 목적함수 값

$U.B_k$: k번째 부문제 연산 후 갱신된 최적 목적함수 값의 상한

i_φ: S_φ에서 하위 단체를 생성하기 위해 선택된 분지변수의 첨자

$\overline{x^\varphi}$: (CP_φ)의 최적해

Ψ_φ: (CP_φ)에서 고정되지 않은 변수 집합

Φ_φ: (CP_φ)에서 상한값으로 고정된 변수 집합

정의 1[17]: $v^0, v^1, .., v^n$을 (n+1)개의 점독립인 점(affinly independent points in R^n)이라 할 때 conv $\{v^0, v^1, .., v^n\}$의 convex hull을 n차원 단체(simplex)라 하고 점$v^0, v^1, .., v^n$를 단체의 정점(vertice)이라 한다.

문제 (P)의 이산 조건을 완화시켜 다음과 같이 나타내자.

$$\Omega = \left\{ x \in R^n \middle| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b, 0 \le x_i \le u_i, i = 1, .., n \right\}$$

(P)의 가능해는 Ω의 정점이다.

해법의 시작을 위해 Ω를 포함하는 단체를 도입하여야 한다. 다음의 S_0를 초기 단체로 잡을 수 있다.

$$S_0 = \left\{ x \in R^n \middle| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b, x_i \ge 0, i = 1, 2, ..., n \right\}$$

S_0은 n-차원 단체이고 점독립인 정점들은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & v^0 = (0, 0, ..., 0) \\ & v^i = (0, 0, ..., 0, \frac{b}{a_i}, 0, ..., 0),\ i = 1, 2, .., n \end{aligned} \tag{2}$$

이렇게 결정된 초기 단체는 하위 부문제 생성을 위해 분할이 이루어져야 한다. 일반적으로 동일한 해공간에서 단체를 분할하는 작업은 많은 계산을 필요로 한다. 그러나 본 해법에서는 후보단체를 1차원 낮은 초평면 상에 투사시킴으로써 하위 단체를 생성한다. 이 과정에서 Ω의 일부가 손실되지만 (P)의 정점들은 다음의 정리에 의해 정확하게 두 개의 집합으로 분할됨을 알 수 있다.

정리 1. Ω를 포함하는 n-차원 단체 S_0를 고려하자. 임의의 i에 대하여 $H^0 = \{x \in R^n | x_i = 0\}, H^1 = \{x \in R^n | x_i = u_i\}$ 라면 $S_{01} = H^0 \cap S_0, S_{02} = H^1 \cap S_0$는 Ω의 정점들의 집합을 2개의 부분 집합으로 분할(partition)하는 단체들이다.

증명: S_{01}은 S_0의 facet이므로 (n-1)차원 단체이다. S_{02}의 정점들은 정점$(0,0,..,0,\frac{b}{a_i},0,..,0)$와 S_{01}의 정점을 잇는 선분 상에 놓여 있다. 그러므로 이 점들은 n 개의 점독립인 점들이고 S_{02} 역시 (n-1)차원 단체이다.

정리 1.에서의 H^0, H^1은 분지 변수 x_i가 0과 상한값 u_i을 만족시키는 초평면들이다. 따라서 S_{01}, S_{02}은 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} & S_{01} = conv(v_{01}^1, v_{01}^2, ..., v_{01}^n), \\ & \quad v_{01}^i = (0, 0, ..., 0_i, ..., 0) \\ & \quad v_{01}^j = (0, 0, ..., \xi_j, ..., 0),\ \xi_j = \frac{b}{a_j} \text{ for } j \ne i \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} & S_{02} = conv(v_{02}^1, v_{02}^2, ..., v_{02}^n), \\ & \quad v_{02}^i = (0, 0, ..., u_i, ..., 0) \\ & \quad v_{01}^j = (0, 0, ..., \xi_j, ..., 0),\ \xi_j = \frac{b - a_i u_i}{a_j} \text{ for } j \ne i \end{aligned} \tag{4}$$

후보 단체를 기반으로 하는 부문제에서 아직 0 또는 상한값으로 고정되지 않은 변수 중 하나가 분지 변수로 선택되어 위의 정리에서와 같은 방법으로 새로운 하위 단체를 생성한다. 후보 단체 목록에 있는 단체 $S_\varphi(\varphi\in\Theta)$에 대해서는 한계 연산이 이루어져 하한값 $L.B_\varphi$이 계산되어 있는데 이 값들 중에서 최소값을 갖는 것으로 확인된 단체로부터 하위 단체를 생성하게 된다. 즉, 후보 단체 선택 기준은 다음과 같다.

후보 단체 선택 기준:
다음 식을 만족시키는 단체 S_φ을 선택

$$L.B_\varphi = \min_{j\in\Theta} L.B_j \tag{5}$$

선택된 후보 단체로부터 하위 단체를 생성하기 위한 분지 변수를 선택 기준은 다음과 같다.

분지 변수 선택 기준:
다음 식을 만족시키는 변수 x_{i_φ}를 선택

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_{i_\varphi}}(\overline{x^0})\right| = \max_{j\in\Psi_\varphi}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x^0})\right| \tag{6}$$

위의 기준은 목적함수 값의 변화가 가장 큰 방향을 선택하려는 의도에서 만들어졌다.

지금까지의 설명을 바탕으로 분지 해법을 요약하면 다음과 같다.

하위단체(subsimplices) 생성 절차
단계 1. 후보 단체 목록 Θ에서 S_φ선택
단계 2. 분지 변수 x_{i_φ}선택
단계 3. 하위단체의 정점을 계산
단계 4. 생성된 2개의 단체$S_{\varphi 1},S_{\varphi 2}$를 Θ에 등록

2.2 하한추정함수(underestimating function)

한계 연산의 목적은 최적 목적함수 값의 상.하한을 갱신하는 것이다. 매 연산이 이루어질 때마다 완화된 문제의 정점 해가 발견되면 이점에서의 하한추정함수 값은 현 부문제로부터 생성되는 하위 부문제들의 하한이 된다. 또한 이 정점이 (P)의 가능해면 최적 목적함수 값을 수정한다. 한계연산 절차는 단체 목록에서 분할된 가능해 집합의 일부를 포함하고 있는 후보 단체를 선택함으로써 시작한다. 선택된 단체 상에서 목적함수를 하한추정하는 식을 구해 부문제의 목적함수로 잡는다.한계전략은 하한추정함수의 선택에 의해 구현되는데 분지 전략에서 채택하고 있는 가능해 집합의 분할 방법과 밀접한 관계가 있다. 즉 분할 방법에 따라 가능한 하한추정함수가 제한된다. 본 연구에서 채택한 분할 단위인 단체상에서 오목 목적함수를 가장 단단하게 하한추정하는 볼록덮개 함수의 정의와 그것을 구하는 방법에 대해 알아보자.

정의 2[7]. 유계다면체(polytope) Ω상에서 다음의 조건을 만족하는 함수 $\Gamma(x)$를 $f(x)$의 볼록덮개함수(convex envelope)라 한다.

i) $\Gamma(x)$는 Ω 상에서 볼록.
ii) $\Gamma(x) \le f(x), \forall\ x\in\Omega$.
iii) i),ii)를 만족하는 임의의 함수 $g(x)$에 대하여
$g(x) \le \Gamma(x), \forall\ x\in\Omega$.

$\Gamma(x)$는 볼록유계다면체 Ω상에서 $f(x)$의 선형 하한추정함수 중에서 상한이다. Falk & Hoffman은 Ω의 정점에서 $f(x)$와 일치하고 부분 선형식을 구했다[19]. Benson은 단체의 정점들이 확인되면 다음의 선형연립방정식을 풀어 유일한 선형식 $\Gamma(x)$를 구했다[17].

$$\begin{gathered}<\alpha,v^i>+\gamma=f(v^i),\ i=0,1,...,n\\ \text{for}\ \alpha\in R^n,\gamma\in R\end{gathered} \tag{7}$$

S_0의 (n+1)개의 정점들을 (7)에 대입하여 얻은 연립방정식의 해 α,v^i를 구하면 볼록덮개함수는 다음과 같다.

$$\Gamma_0(x) = <\alpha,x>+\gamma \tag{8}$$

따라서 최초의 한계연산을 위한 부문제는 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned}&\min \Gamma_0(x)\\ (CP_0)\ \ & s.t \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b\\ & 0\le x_i \le u_i, i=1,..,n\end{aligned} \tag{9}$$

후보단체 S_φ로부터 정의된 부문제는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}&\min \Gamma_\varphi(x)\\ (CP_\varphi)\ & s.t \sum_{i\in\Psi_\varphi} a_i x_i \le b-\sum_{i\in\Phi_\varphi} a_i u_i\\ & 0\le x_i \le u_i, i\in\Psi_\varphi\end{aligned} \tag{10}$$

부문제 (CP_φ)의 최적해 $\overline{x^\varphi}$를 이용해서 상.하한을 수정한다.

일반적으로 후보단체 S_φ에 대한 한계연산의 절차는 다음과 같다.

한계연산 (bounding operation) 절차

단계 1. 단체 S_φ의 정점을 확인

단계 2. 선형연립방정식을 풀어 덮개함수 Γ_φ를 구하고 부문제 (CP_φ)를 정의

단계 3. $\overline{x^\varphi}$로부터 하한값 $L.B_\varphi(=\Gamma_\varphi(\overline{x^\varphi}))$을계산 $\overline{x^\varphi}\in\Omega$이면 $U.B_k(=f(\overline{x^\varphi}))$ 수정

3. 해법 및 수치 예제

3.1 해법 절차

본 연구에서 제시하고자 하는 문제 (P)의 최적 해법은 다음과 같다. 단체 목록 집합이 ∅ 이면 상한값을 갱신한 해가 최적이다.

Iteration 0: 초기화

0-1: 초기 단체 S_0선택

0-2: 한계연산 절차 수행

0-3: $\overline{x^0}\in\Omega$ 이면 $U.B_0=f(\overline{x^0})$

아니면 $U.B_0=0$

0-4; 후보 단체 목록 Θ에 S_0등록

Iteration k: 단체 선택 기준에 의해 후보 단체 S_φ선택

k-1: 분지변수를 선택하고 단체분할 절차를 수행

k-2: $S_{\varphi 0},S_{\varphi 1}$을 후보 단체 목록에 등록

k-3: $S_{\varphi 0},S_{\varphi 1}$을 이용하여 부문제를 정의하고 한계연산 절차를 수행

k-3: $L.B_{\varphi 0},L.B_{\varphi 1}$을 구하고 $U.B_k$를 수정

k-4: $U.B_k$보다 작은 하한값을 갖는 부문제를 정의 하는데 사용된 단체들을 목록에서 제거

3.2 수치 예제 및 부문제(subproblem table)

해법의 타당성을 확인하기 위하여 다음의 예제를 풀어보자.

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1^2-2x_2^2-9x_3^2-x_4^2+2x_1x_2-8x_2x_3+6x_3x_1 \\ s.t\ & x_1+x_2+3x_3+3x_4 \le 18 \\ & x_1=0\,\mathrm{or}\,2,\ x_2=0\,\mathrm{or}\,2,\ x_3=0\,\mathrm{or}\,3,\ x_4=0\,\mathrm{or}4 \end{aligned}$$

<Table 1>은 최적해를 구할 때까지의 부문제와 한계 연산 결과를 보여준다.

4. 결론

본 논문에서는 한 개의 선형 제약식 하에서 의사결정 변수가 0 혹은 상한 값을 갖는 오목함수 최소화 문제를 다루었다. 제시된 분지·한계 해법은 후보 단체상에서 분지 변수를 0과 상한 값으로 고정시킴으로써 새로운 하위 단체를 생성한다. 단체가 생성되면 선형 하한추정함수를 구해 이 함수를 목적함수로 하는 부문제를 정의하고 한계 연산을 수행한다. 분지가 일어날 때마다 부문제 해공간의 차원이 감소하므로 부문제의 크기가 점차 줄어 분지·한계 연산에 필요한 계산량이 감소하는 점이 본 해법의 가장 큰 장점이라고 볼 수 있다.

<Table 1> the subproblem at the kth iteration

k	subproblem	convex envelope	$\overline{x^\varphi}$	$L.B_\varphi$	$U.B_k$	branching var
0	CP_0	$-36x_1-36x_2-54x_3-6x_4$	(2,2,3,5/3)	-316	0	x_3
1	CP_{01}	$-32x_1-32x_2-\frac{16}{3}x_4$	(2,2,0,4)	-448/3	-24	x_4
2	CP_{02}	$-42x_2-3x_4-81$	(0,2,3,7/3)	-172	-24	x_2
3	CP_{021}	$-3x_4-81$	(0,0,3,4)	-90	-24	x_3
4	CP_{022}	$8x_1-\frac{7}{3}x_4-137$	(0,2,3,7/3)	-1319/9	-24	x_1
5	CP_{011}	$-8x_1-8x_2$	(2,2,0,0)	-32	-24	pruned
6	CP_{012}	$-8x_1-8x_2-16$	(2,2,0,4)	-48	-24	pruned
7	CP_{0221}	$-\frac{7}{3}x_4-137$	(0,2,3,0)	-137	-137	fathomed optimal
8	CP_{0222}	$-\frac{5}{3}x_4-101$	(2,2,3,0)	-101	-137	fathomed pruned

해법의 효율성은 하한추정함수가 목적함수에 근접한 정도에 달려있고 가능해 영역을 포함하는 단체의 크기와 밀접한 관계가 있다. 따라서 절단 제약식을 추가하여 단체를 압축시키는 방법과 분지 변수를 선택하는 기준에 대한 연구가 필요하다. 본 연구의 결과는 다중 선택 오목함수 배낭 문제와 같은 의사 결정모형의 최적 해법을 개발하는데 응용될 수 있을 것이다.

ACKNOWLEDGMENTS

이 논문은 2016-2017년도 청주대학교 산업과학연구소가 지원한 학술연구조성비(특별연구과제)에 의해 연구되었음.

REFERENCES

[1] H. Tui, "Concave Programming under Linear Constraints", Dok. Akad. Nauk SSSR 159, 32-35, Translated 1964 in Soviet Math. Dokl. Vol. 4, pp. 1437-1440, 1964.

[2] B. Kalantari and A. Bagchi, "An Algorithm for Quadratic Zero-One Programs", Naval Research Logistics Quarterly Vol. 37, pp. 527-538, 1990.

[3] J. J. More and S. A. Vavasis, "On the Solution of Concave Knapsack Problem", Math. Prog. Vol. 49, pp. 397-411, 1991.

[4] J. B. Rosen, "Global Minimization of a Linearly Constrained Concave Function by Partition of Feasible Domain", Math. Opns. Res. Vol. 8, pp. 215-230, 1983.

[5] X. L. Sun, F. L. Wang and L. Li, "Exact Algorithm for Concave Knapsack Problems: Linear Underestimation and Partition Method", J. of Global Optimization, Vol. 33, pp.15-30, 2005.

[6] Young-Jae Park, "The Design of the Container Logistics Information System Reflects the Port Logistics Environment", Journal of digital Convergence, Vol. 13, No. 5, pp. 159-167, 2015.

[7] Dong-Hee Hong and Chang-Gon Kim, "Improvement of wireless communications environment of Web-pad on board Yard tractor in container terminal use convergence technology.", Journal of digital Convergence , Vol. 13, No. 8, pp. 281-288, 2015.

[8] T. V. Tieu, "Convergent Algorithms for Minimizing a Concave Function", Acta Mathematica Vietnamica, Vol. 5, pp. 106-113, 1978.

[9] Soon-Ho Kim and Chi-Su Kim, "An Algorithm of the Minimal Time on the (sLa-Camera-pLb)path", Journal of digital Convergence , Vol. 13, No. 10, pp. 337-342, 2015.

[10] In-Kyoo Park, "A Big Data Analysis by Between-Cluster Information using k-Modes Clustering Algorithm", Journal of digital Convergence , Vol. 13, No. 11, pp. 157-164, 2015.

[11] Yong-Tae Kim, Yoon-Su Jeong, "Optimization Routing Protocol based on the Location, and Distance information of Sensor Nodes ", Journal of digital Convergence , Vol. 13, No. 2, pp. 127-133, 2015.

[12] J. E. Falk and K. R. Hoffman, "A Successive Underestimation Method for Concave Minimization Problems", Math. Opns. Res. Vol. 1, pp. 251-259, 1976.

[13] R. M. Soland, "Optimal Facility Location with Concave Costs", Opns. Res. Vol. 22, pp. 373-382, 1974.

[14] K. G. Murty, Operations Reasearch: deterministic optimization models, Prentice-Hall, Inc, 1995.

[15] H. P. Benson, "Deterministic Algorithms for Constrained Concave Minimization: A Unified Critical Survey", Naval Research Logistics Quarterly Vol. 43, pp. 756-795, 1996.

[16] B. Kalantari and J. B. Rosen, "An Algorithm for Global Minimization of Linearly Constrained Concave Quadratic Functions", Math. Opns. Res. Vol. 12, pp. 544-560, 1987.

[17] H. P. Benson , "A Finite Algorithm for Concave Minimization over a Polyhedron", Naval Research Logistics Quarterly Vol. 32, pp. 165-177, 1985.

[18] H. P. Benson and S. S. Erenguc, "A Finite Algorithm for Concave Minimization over a Polyhedron", IEEE, 2009.

[19] J. E. Falk and K. R. Hoffman, "Concave Minimization via Collapsing Polytopes", Opns. Res. Vol. 34, pp. 919-929, 1986.

[20] R. Horst, “An Algorithm for Nonconvex Programming Problems”, Math. Prog. Vol. 10, pp. 312-321, 1976.
[21] R. Horst, “A General Class of Branch-and-bound Methods in Global Optimization with Some New Approachs for Concave Minimization”, J. Optim. Theory Appl. Vol. 51, pp. 271-291, 1986.
[22] Sang Cho, “Blockly webc Programming Convergent Learning System”, Journal of the Korea Convergence Society, Vol. 6, No. 1, pp. 23-28, 2015.
[23] Se-Ho Oh, “A Fuzzy Linear Programming Problem with Fuzzy Convergent Equality Constraints”, Journal of the Korea Convergence Society, Vol. 6, No. 5, pp. 227-232, 2015.

저자소개

오 세 호(Se-Ho Oh) [종신회원]

- 1984년 2월 : 서울대학교 서울대학원 산업공학과 (산업공학석사)
- 1991년 2월 : 서울대학교 서울대학원 산업공학과 (산업공학박사)
- 1986년 3월 ~ 현재 : 청주대학교 산업공학과 교수

<관심분야> : 선형계획법, 일정관리